RESUMO

TRAÇADO DE RETAS, ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS E PROPAGAÇÃO DE ERROS

- **Dados experimentais em um gráfico.**

Quando se obtém dados experimentais em um gráfico nunca pode se contentar com quantidade de dados inferior que 10 pontos ou pares de dados.

Os dados experimentais devem estar espalhados, ocupando toda a página ou área de gráfico. Para isto sempre podemos expandir ou encolher o intervalo de variação do parâmetro nos eixos X e Y.

O gráfico sempre deve estar acompanhado de enunciado do gráfico logo abaixo do mesmo.

Os eixos X e Y sempre devem conter a potência e unidade do variável em questão.

As barras de erro dos dados experimentais são colocadas quando cada dado experimental tem valores de erros distintos, quando são todos iguais basta colocar uma barra só e anunciar que todas as barras possuem mesmo valor.

Eixo X é sempre variável independente, e o eixo Y é sempre dependente.

Podemos traçar uma reta representativa de dados experimentais de duas formas:

- **Traçado de uma reta estatística.**

Em geral os dados experimentais podem ser representados por uma reta estatística, onde **coeficiente angular, coeficiente linear, R (coeficiente de correlação), e σ (desvio padrão)** fornecem informações importantes sobre parâmetros do experimento, qualidade de medidas, e os erros estatísticos resultantes.

Obtido uma reta representativa, por exemplo por regressão linear, é sempre necessário fornecer junto, na forma como apresentada pelo programa do computador, **os valores de dois coeficientes, R e σ,** no próprio gráfico.

Em um gráfico de uma reta é necessário saber quem é a variável independente e o dependente. O independente é aquele valor imposto inicialmente, isto é, a variável que você escolhe inicialmente, e o dependente o resultante desta imposição. Na forma de equação escrevemos como:

$$Y = b + aX \qquad (1)$$

Note que primeiro é colocado o valor de X para depois obter o valor de Y. Então o X é variável independente e Y o dependente.

Por exemplo, se um gráfico é apresentado com voltagem no eixo X e corrente no eixo Y, isto significa que o aluno colocou primeiro os valores de voltagem para depois, obter os valores de corrente.

Para se obter os valores de coeficiente linear “b” e do angular “a”, e seus erros, o método mais utilizado é o de **Mínimos Quadrados**.

Estimadores do coeficiente angular e coeficiente linear da equação:

$$\mathbf{y = ax + b} \qquad (2)$$

$$\mathbf{a = \Sigma (x_i - \bar{x}) y_i \ / \ \Sigma (x_i - \bar{x})^2} \qquad (3)$$

$$\mathbf{b = \bar{y} - a \bar{x}} \qquad (4)$$

variância dos y_i

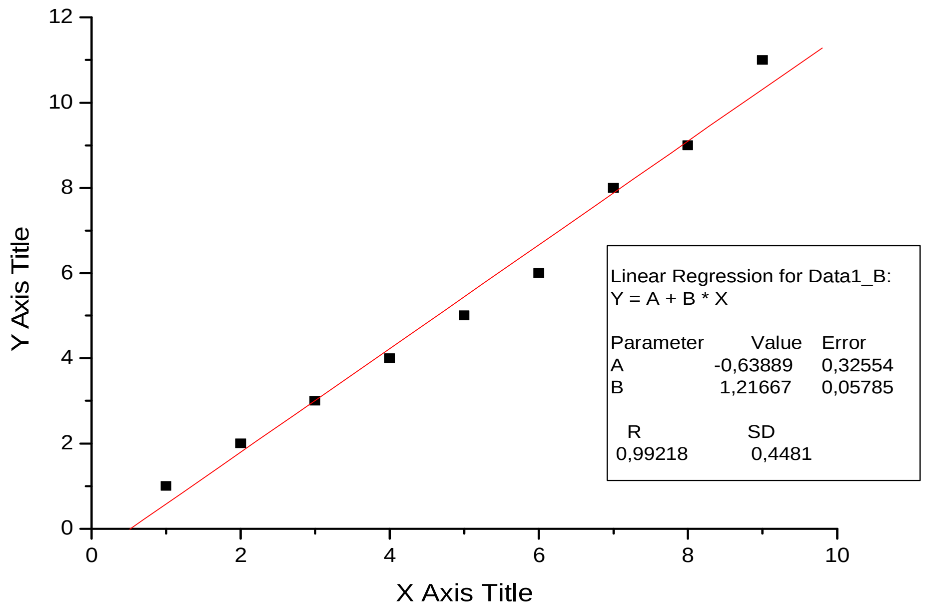
$$\mathbf{S^2 = \Sigma (y_i - a x_i - b)^2 \ / \ (N - 2)} \qquad (5)$$

erro padrão do estimador do coeficiente angular e linear

$$\mathbf{\Delta a = S \ / \ (\Sigma (x_i - \bar{x})^2)^{1/2}} \qquad (6)$$

$$\mathbf{\Delta b = S} \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \qquad (7)$$

Em geral, estes cálculos são executados diretamente via softwares como Origin ou SciDAVis, quando realizamos esta regressão linear é **obrigatório** sempre apresentar junto ao gráfico, **na forma como obtido**, os valores de coeficiente angular e linear com respectivos erros ou incertezas dos coeficientes bem como os valores de R e σ. Os alunos que não apresentarem estes resultados nos relatórios terão que obter via calculadora, os valores de coeficientes linear e angular com seus respectivos erros.



O que significa coeficiente linear não nulo, se a equação teórica admite que o mesmo seja nulo?.

METODO GRÁFICO

O método gráfico é utilizado quando não se tem acesso à calculadora ou como realizar o método de mínimos quadrados. Entretanto, o seu resultado não deve ser muito discrepante do método de mínimos quadrados. Procedimento a seguir:

- Obtenha valor médio dos valores de x, e o valor médio de y. ($\bar{x}$, $\bar{y}$), e colocando no gráfico o ponto equivalente ao ($\bar{x}$, $\bar{y}$).
- Coloque a ponta do lápis no ponto ($\bar{x}$, $\bar{y}$), e apoie a régua neste ponto.
- Gire a régua em torno do ponto ($\bar{x}$, $\bar{y}$) até que 50% dos pontos fique acima (abaixo) da régua. Trace a reta média.
- Apoie novamente a régua no lápis e gire em torno do ponto ($\bar{x}$, $\bar{y}$) até deixar em torno de 16% acima e 84% abaixo da reta. A equação desta reta é $y = \bar{y} + a_{max} (x - \bar{x})$ e esta reta determina a inclinação máxima e sua prolongação até x = 0 obtem se b_{min}
- Da mesma forma, mas agora colocando 16 % abaixo e 84% acima da reta obtendo a equação $y = \bar{y} + a_{min} (x - \bar{x})$, que define o valor de b_{max}.
- Os valores de a, b, Δa, Δb são respectivamente:

  $a = (a_{max} + a_{min}) / 2$

  $b = (b_{max} + b_{min}) / 2$

  $\Delta a = [a_{max} - a_{min}] / (2 \sqrt{N})$

  $\Delta b = [b_{max} - b_{min}] / (2 \sqrt{N})$

Note que na região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima ficam aproximadamente 68% dos pontos experimentais, que é consistente com o conceito de desvio padrão para uma distribuição normal.

Valor Médio e seus erros.

Para cálculo do valor médio e seu desvio da média para um mesmo parâmetro efetuado N vezes a mesma medida: (cuidado que a definição do valor de S aqui é diferente a do método dos mínimos quadrados).

Nome	Símbolo e fórmula	Nome por extenso
média	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$	média aritmética
desvio padrão	$\Delta x = S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$	desvio padrão de cada medida
erro padrão	$\Delta\bar{x} = S_m = \frac{S}{\sqrt{N}}$	desvio padrão da média

Propagação de erros em um cálculo matemático

Quando obtemos qualquer medida experimental, sempre teremos o envolvimento do erro da medida. Ao realizarmos cálculo com essas medidas terá uma propagação de erros e o resultado também deve ser representado com um erro.

Se tivermos duas medidas do tipo, x +- Δx, e y +- Δy, e realizarmos uma operação matemática qualquer, o resultante f(x,y) também terá um erro Δf(x,y). O valor do erro Δf(x,y) pode ser obtido pela equação:

$$\Delta f(x,y) = [\ (\delta f / \delta x)^2\ (\Delta x)^2 + (\delta f / \delta y)^2\ (\Delta y)^2\ ]^{1/2}$$

Para um cálculo rápido e simplificado, apresentamos a seguir uma lista de fórmulas para operações mais comuns: (na tabela w = f e "σ" são os erros de cada função w)

Tabela 1. ***Exemplos de fórmulas de propagação de erros.***

$w = w(x, y, \cdots)$	Expressões para σ_w
$w = x \pm y \pm \cdots$	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \cdots$
$w = x^m$	$\sigma_w = \mid m x^{m-1} \mid \sigma_x$ ou $\mid \frac{\sigma_w}{w} \mid = \mid m \frac{\sigma_x}{x} \mid$
$w = a x$	$\sigma_w = \mid a \mid \sigma_x$ ou $\mid \frac{\sigma_w}{w} \mid = \mid \frac{\sigma_x}{x} \mid$
$w = a x + b$	$\sigma_w = \mid a \mid \sigma_x$
$w = a x y$	$\sigma_w^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (\frac{\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a \frac{x}{y}$	$\sigma_w^2 = (\frac{a}{y})^2 \sigma_x^2 + (\frac{ax}{y^2})^2 \sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (\frac{\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a x^p y^q$	$\sigma_w^2 = (a\, p\, x^{p-1} y^q)^2 \sigma_x^2 + (a\, x^p\, q\, y^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (p \frac{\sigma_x}{x})^2 + (q \frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a\, sen\, b x$	$\sigma_w = \mid ab \cos bx \mid \sigma_x$ (σ_x em radianos)
$w = b \log_a x$	$\sigma_w = \mid \frac{b}{\ln a} \mid \frac{\sigma_x}{x}$

Algarismos Significativos

Quando usamos uma calculadora, programa de computador (como Origin), ou utilizando coeficientes angular ou linear de uma reta, os resultados são fornecidos com todos os algarismos disponíveis no instrumento ou programa. O aluno **não pode** por conta própria eliminar ou acrescentar algarismos nos valores obtidos. É necessário saber quantos algarismos devemos utilizar, antes e depois da vírgula ou na forma de potência, denominados algarismos significativos. Como exemplo, temos a seguir:

Um resistor de 47 Ω com 5% de erro que seria 2,35 Ω. Como devemos escrever?

A) R = (47 +- 2,35) Ω
B) R = (47 +- 2,4) Ω
C) R = (47 +- 2) Ω
D) R = (47,00 +- 2,35) Ω
E) R = (47,0 +- 2,4) Ω

REGRAS

1. Os erros (as incertezas) das medidas são **sempre** representados com **um** ou **dois** algarismos significativos no máximo.
2. Primeiro obtém se o valor do erro para depois obter a posição do ultimo algarismo significativo do valor principal.
3. O valor principal deve sempre ter seu último algarismo significativo na mesma casa do ultimo algarismo significativo do erro.
4. O valor principal e o seu erro devem sempre estar na mesma potência.
5. Os erros lidos diretamente nos instrumentos, ou fornecidos pelo fabricante, escreve se apenas com **um** algarismo significativo, exceto se vier com 2 algarismos escritos no instrumento.
6. No valor do erro resultante de cálculos com propagação de erros deve ter **dois** algarismos significativos no caso de primeiro algarismo na incerteza for 1 ou 2.
7. No caso de primeiro algarismo na incerteza for 3 ou maior, o valor do erro resultante de cálculos com propagação de erros normalmente é representado por **um** algarismo significativo. Em alguns casos, quando avisado, pode ter **dois** algarismos significativos
8. Para arredondamento, vai para baixo de 0,000 até 0,499.. e para cima para 0,500 até 0,999...
9. O número zero colocado à esquerda do valor principal ou do erro não é algarismo significativo, mas colocado à direita é um algarismo significativo do número.
10. Para o efeito de cálculo, trabalha se com todos os números disponíveis no instrumento, mas a representação final **sempre** deve obedecer às regras acima.