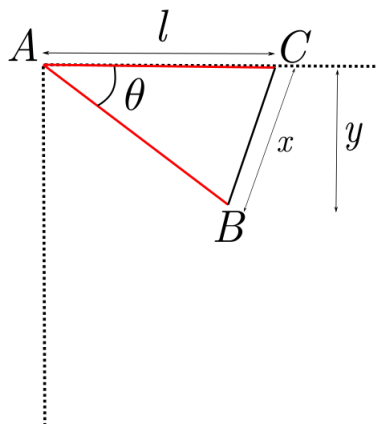


Problema 1

(a) Vamos escrever a energia potencial do sistema: $U(\theta) = -mgy + \frac{kx^2}{2}$.

Pela figura, $y = l \sin(\theta)$ e $x = 2l \sin(\theta/2)$.

Assim,

$$U(\theta) = -mgl \sin(\theta) + \frac{k[2l \sin(\theta/2)]^2}{2} = -mgl \sin(\theta) + 2kl^2 \sin^2(\theta/2).$$

No equilíbrio, a energia potencial é tal que

$$\frac{dU}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow -mgl \cos(\theta) + 2kl^2 \left[2 \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow -mgl \cos(\theta) + kl^2 \sin(\theta) = 0$$

$$\text{Logo, } \tan(\theta_0) = \frac{mg}{kl} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 45^\circ.$$

(b) Vamos escrever a energia potencial quando fazemos $\theta \rightarrow \theta_0 + \delta\theta$ onde $\delta\theta \ll \theta_0$ é uma pequena perturbação na coordenada próxima ao equilíbrio.

Então, a energia fica

$$E = K(\theta + \delta\theta) + U(\theta + \delta\theta) = \frac{ml^2[d(\delta\theta)/dt]^2}{2} + \left[\frac{d^2U(\theta)/d\theta^2}{2} \right] (\delta\theta)^2,$$

o que pode ser reconhecido como a equação de um MHS com frequência $\omega = \sqrt{\frac{d^2U(\theta)/d\theta^2}{ml^2}}$, onde a segunda derivada é calculada na posição de equilíbrio.

Para a segunda derivada,

$$d^2U/d\theta^2 = \frac{d}{d\theta}[-mgl \cos(\theta) + kl^2 \sin(\theta)] = mgl \sin \theta + kl^2 \cos \theta$$

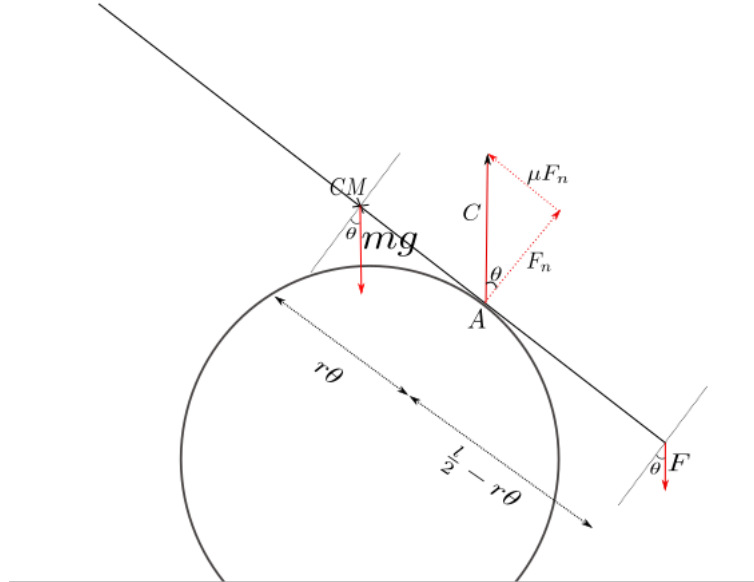
.

Como $\theta = 45^\circ$ é a posição de equilíbrio, conforme o item *a*,

$$\omega = \sqrt{\frac{[mgl \sin(45^\circ) + kl^2 \cos(45^\circ)]}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{k}{m} \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5 \cdot 2^{-1/4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 2^{1/4}}{5} \text{s} \approx 1,5 \text{s}.$$

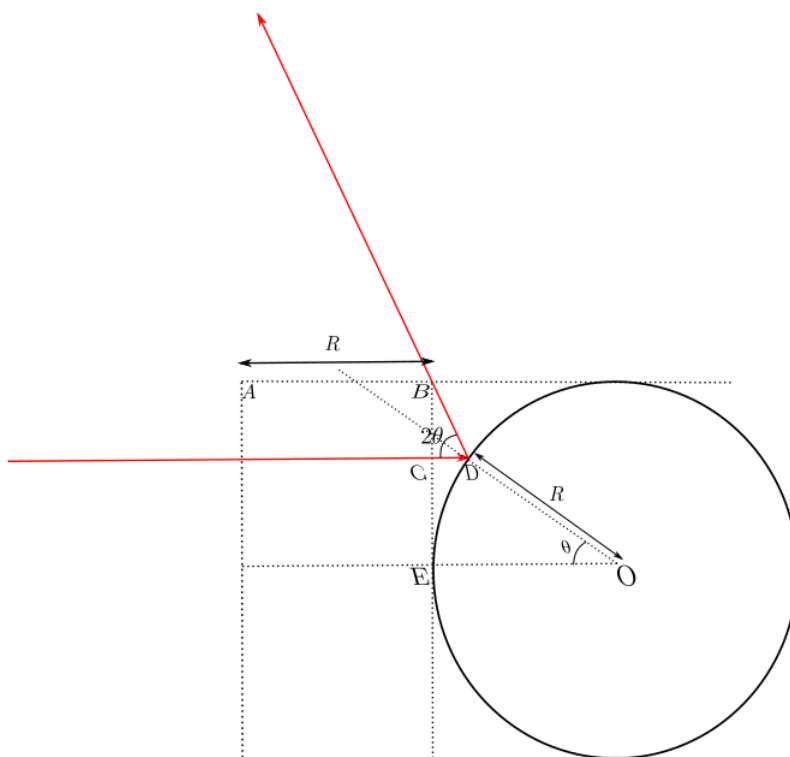
Problema 2



(a) Note que temos três forças relevantes agindo na barra: o peso $m\vec{g}$, a força vertical $\vec{F}$ e a força de contato $\vec{C}$ (composição da normal e da força de atrito). Uma vez que o peso e $\vec{F}$ são verticais, o equilíbrio só pode ocorrer se $\vec{C}$ também for vertical. Pela figura, isso acontece para $\mu = \tan 30^\circ \approx 0,57$

(b) Vamos escrever o equilíbrio de torques para o ponto de contato A indicado na figura. Temos: $\tau_{\text{peso}} = mg \cos \theta \cdot (r\theta)$ e $\tau_F = F \cos \theta \cdot (l/2 - r\theta)$, como $\tau_{\text{peso}} = \tau_F \Rightarrow F = mg \cdot \frac{r\theta}{l/2 - r\theta} \approx 0,08N$

Problema 3



(a) Por considerações geométricas, podemos escrever na situação crítica $CD + R \cos \theta = R$. Porém, $CD = \frac{BC}{\tan 2\theta}$, sendo que $BC = R(1 - \sin \theta)$. Assim, nossa equação fica $\frac{1 - \sin \theta}{\tan 2\theta} + \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \tan 2\theta$, onde $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{y_{\max}}{R} \right)$.

(b) Uma vez que já sabemos que $y_{\max} \approx 0,5R$ sabemos que $\theta \approx \frac{\pi}{6}$. Fazemos $\theta = \frac{\pi}{6} + \epsilon$ com $\epsilon \ll \frac{\pi}{6}$ e vamos expandir a equação acima em primeira ordem para ϵ .

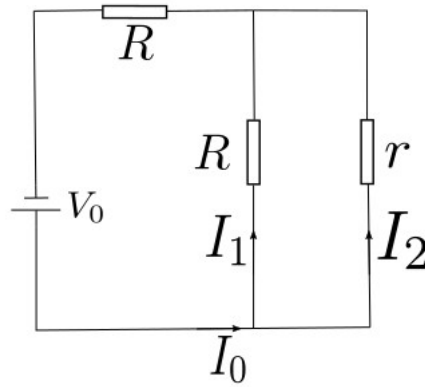
Seja $f(\theta) = \frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta}$. Por Taylor, sabemos que $f\left(\frac{\pi}{6} + \epsilon\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \epsilon$. Note que

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{1 - \sin \theta - \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \\ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \approx -20,4 \\ \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6} + \epsilon\right) &\approx 3,7 - 20,4 \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, se definirmos $g(\theta) = \tan 2\theta \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{6} + \epsilon\right) \approx \tan \frac{\pi}{3} + (\tan 2\theta)'$.

ϵ . Como $(\tan 2\theta)' = \frac{2}{\cos^2 \theta} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{6} + \epsilon\right) \approx 1,7 + 8 \cdot \epsilon$.

A solução de $f(\theta) = g(\theta)$ ocorre quando $\epsilon \approx 0,07 \Rightarrow y_{\max} = R \sin\left(\frac{\pi}{6} + \epsilon\right) \approx R \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \epsilon \right] \approx R(0,5 + 0,85 \cdot 0,07) \Rightarrow y_{\max} \approx 0,56R$.

Problema 4

- (a) Note que $I_0 = \frac{V_0}{R_{eq}}$ onde $R_{eq} = R + \frac{Rr}{R+r}$. Além disso, $I_1 + I_2 = I_0$ e $RI_1 = rI_2$, de onde tiramos $I_2 = \frac{V_0}{R+2r}$.
Assim, $P(R, r) = r \cdot (I_2)^2 = \frac{(V_0)^2 r}{(R+2r)^2}$.

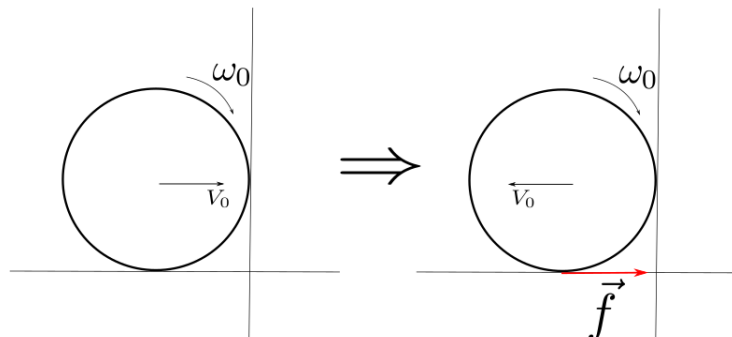
- (b) O máximo de $P(R, r)$ ocorre quando $\frac{\partial P(R, r)}{\partial r} = 0$, ou seja,

$$\frac{(R+2r)^2 - 2 \cdot (R+2r) \cdot 2r}{(R+2r)^2} = 0 \Rightarrow r = R/2.$$

- (c) Quando $r = R/2 \Rightarrow P(R, r) = \frac{V_0^2}{8R} = P_0 \Rightarrow R = \frac{V_0^2}{8P_0} \approx 0,22\Omega$.

$$\Rightarrow r \approx 0,11\Omega.$$

Problema 5



(a) Note que após a colisão, a velocidade translacional se inverte. Porém, uma vez que a parede é lisa não há inversão na velocidade angular.

Por conta disso, podemos escrever as equações de movimento para o corpo, notando a orientação do atrito conforme a figura.

A 2ª lei de Newton fornece $m \frac{dv}{dt} = -f = -\mu mg \Rightarrow v = v_0 - \mu gt$. Além disso, $\tau = I\alpha \rightarrow -fr = (mr^2) \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{\mu gt}{r}$

As condições de não deslizamento iniciais permitem escrever $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$. Assim, temos que $v = v_0 - \mu gt$ e $\omega = \frac{v_0}{r} - \frac{\mu gt}{r}$. Analisando essas equações chegamos que em $t = \frac{v_0}{\mu g}$ o corpo para de translacionar e girar, permanecendo em repouso.

(b) Conforme apontado no item anterior, a velocidade é zero.

(c) Note que quando o anel é substituído por um disco homogêneo, alguns aspectos da situação física mudarão.

Em um primeiro estágio, o corpo desacelera em termos translacionais e angulares, sendo as equações da forma:

$$v = v_0 - \mu gt \quad \text{e} \quad \tau = I\alpha \Rightarrow -fr = \frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{2\mu gt}{r}$$

Em $t_1 = \frac{v_0}{2\mu g}$ o corpo para de girar. Agora, no segundo estágio o corpo desacelera translacionalmente e acelera em termos angulares. Dadas as "condições iniciais" em $t = t_1 \rightarrow v = \frac{v_0}{2}$ e $\omega = 0$ então as novas equações ficam $v = \frac{v_0}{2} - \mu g(t - t_1)$ e $\omega = \frac{2\mu g(t - t_1)}{r}$, o instante em que o corpo começa a andar com velocidade constante é quando ele gira sem deslizar, i.e. quando $v = \omega r$ ou seja, em $(t - t_1) = \frac{\frac{v_0}{2}}{3\mu g} \rightarrow t = \frac{2v_0}{3\mu g}$. A partir desse instante, $v = \frac{v_0}{3}$.

Problema 6

(a) Por Faraday, podemos notar que o campo magnético variável dará origem a um campo elétrico tangencial na espira tal que $E_t \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2 \Rightarrow E_t = -\frac{R \cdot (dB/dt)}{2}$.

O elétron ficará submetido a uma força tangencial $F_t = -e \cdot E_t = \frac{e \cdot R \cdot (dB/dt)}{2}$. Podemos calcular o impulso tangencial ao qual o elétron estará submetido: $I_t = \Delta P_t = \int_0^{t'} F dt = \int_0^B \frac{eR}{2} dB = \frac{eBR}{2}$.

Agora, supondo uma análise relativística, $P_{final} - P_{inicial} = \frac{eBR}{2}$, como $P = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ficamos com

$$\Delta v = v_{final} - v_{inicial} = \frac{c \cdot \left[\frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{eBR}{2m} \right]}{\sqrt{c^2 + \left[\frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{eBR}{2m} \right]^2}} - v_0.$$

No caso não relativístico, temos simplifcadamente $\Delta v = \frac{eBR}{2m}$.

(b) Note que a variação de momento angular pode ser escrita como $\Delta L = R \cdot \Delta P = \frac{eBR^2}{2}$. Pelo fato do momento angular ser quantizado, a menor variação possível é $\Delta L = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow B_{min} = \frac{h}{e\pi R^2}$.

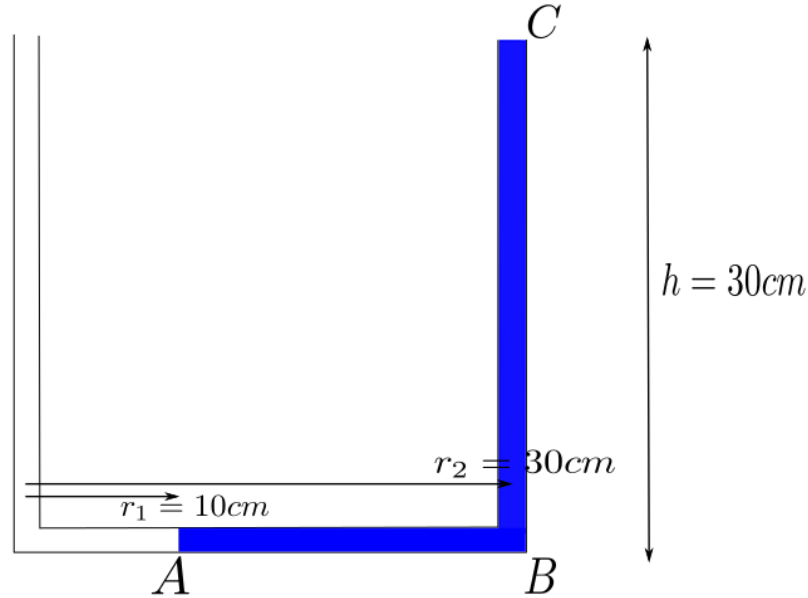
Problema 7

Pela equação dos gases ideais, $pV = NkT \Rightarrow p = nkT \Rightarrow n = \frac{p}{kT}$, onde n é a concentração de partículas. Por outro lado, a velocidade média das moléculas é da ordem da velocidade quadrática média, que pode ser obtida pelo Teorema da Equipartição: $\frac{mv_{rms}^2}{2} = \frac{kT}{2} \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. A fim de analisarmos as dependências, $v_{med} \sim v_{rms} \sim \sqrt{\frac{kT}{m}}$.

Uma vez que as taxas de efusão são iguais no equilíbrio, escrevemos $n_1 \cdot v_{med1} = n_2 \cdot v_{med2}$, de onde conseguimos $\frac{p_1}{\sqrt{kT_1m}} = \frac{p_2}{\sqrt{kT_2m}}$, seguindo que $p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$.

Observação: Resultados de Mecânica Estatística permitem obter um valor exato para a velocidade média: $v_{med} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, algo que não é estritamente necessário para a resolução do problema, visto que estimativas já permitem obter a dependência correta

Problema 8



Vamos calcular a pressão no ponto B da figura de dois diferentes modos. Pela equação da pressão em termos da coordenada radial dada no enunciado

$$p = p_c + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2},$$

podemos escrever

$$p_B - p_A = \frac{\rho\omega^2 \cdot ((r_2)^2 - (r_1)^2)}{2}.$$

$$\text{Como } p_A = p_{atm} \Rightarrow p_B = p_{atm} + \frac{\rho\omega^2 \cdot [(r_2)^2 - (r_1)^2]}{2}.$$

Por outro lado, pelo fato do tubo ser fino, $p_B = p_C + \rho gh = p_{atm} + \rho gh$.

Comparando as duas expressões para p_B , chegamos em

$$\omega = \sqrt{\frac{2gh}{(r_2^2 - r_1^2)}} = \sqrt{75} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 8,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$