Simulado – IPhO 2015

Preparação – Última Fase

- O simulado possui duração de 5 horas. Consiste de 3 problemas teóricos valendo um total de 30 pontos.

- Note que a pontuação dos três problemas não é igual.

- Apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta será considerado na solução. O verso poderá ser usado como rascunho.

- Iniciar cada questão numa folha de resposta correspondente. Pode escrever de lápis.

- Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado. Não se esqueça de indicar as unidades.

- Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo, com equações, números, figuras e gráficos.

- Desenhe um grande X nas folhas que você não quiser que sejam corrigidas.

Prof. Fernando Frota

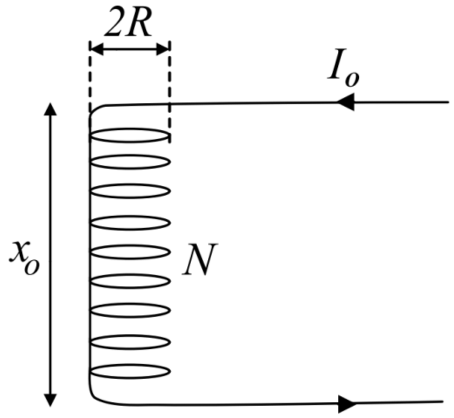
Problema 1 (9 Pontos)

Este problema consiste em três partes independentes.

Parte A – Lançamento de um Satélite

Um satélite é lançado de um planeta esférico de raio R. A velocidade inicial do satélite não é suficiente para retirá-lo da influência do planeta, de modo que este retorna à superfície do planeta com vetor velocidade paralelo ao vetor velocidade inicial. A separação angular entre o ponto de lançamento e o ponto de retorno vale θ. Quanto tempo o voo do satélite dura, sabendo que o período de rotação de um corpo em torno do planeta imediatamente acima da superfície vale T_o **(2 Pontos)**? Calcule também a máxima distância do satélite acima da superfície do planeta **(1 Ponto)**.

Parte B – Mola Supercondutora



Considere uma mola feita de material supercondutor (resistência elétrica muito próxima de zero) contendo N voltas, raio R, comprimento natural x_o e constante elástica k, como mostra a figura ao lado. De alguma maneira, faz-se passar pela mola uma corrente elétrica I_o. Calcule a variação de comprimento da mola no novo estado de equilíbrio. *Dica: o fluxo magnético sobre a mola deve ser constante em todos os momentos.* **(3 Pontos)**

Parte C – Lago Congelado

Num país frio, a temperatura sobre a superfície de um lago caiu a uma temperatura $T_1 = -10\ ^\circ C$ e começa a formar-se uma camada de gelo sobre o lago. A água sob o gelo permanece a uma temperatura $T_2 = 0\ ^\circ C$. O gelo flutua sobre ela e a camada de espessura crescente em formação serve como isolante térmico, levando ao crescimento gradual de novas camadas de cima para baixo. A densidade do gelo vale $\rho = 0{,}92\ g/cm^3$, sua condutividade térmica vale $k = 4 \times 10^{-3}\ cal/s.cm.^\circ C$ e seu calor latente de fusão vale $L = 80\ cal/g$. Calcule a espessura da camada de gelo 1 hora depois do início do processo de congelamento. **(3 Pontos)**

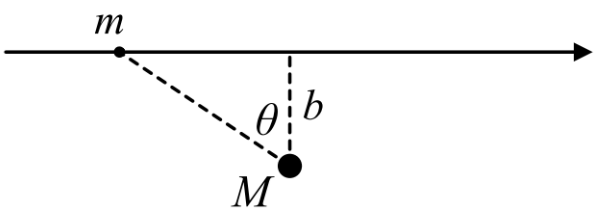
Problema 2 (11 Pontos)

O logo da IPhO 2015 mostra uma representação da bandeira da Índia misturada com um conceito muito conhecido na física: o desvio da luz por meio de um corpo massivo. Esse desvio permite que uma estrela logo atrás do sol seja vista durante um eclipse solar, como mostrado no logo. A trajetória de um raio de luz desviado por um campo gravitacional é um efeito previsto pela Relatividade Geral de Einstein, e a confirmação desse fenômeno durante um eclipse solar total em 1919 foi um dos eventos mais celebrados na história da ciência. Embora este seja um fenômeno relativístico, é possível também analisar esse fenômeno e obter uma resposta aproximada utilizando mecânica newtoniana assumindo que um raio de luz é feito de fótons viajando a uma velocidade c, cuja massa efetiva de cada fóton é igual a $m = E/c^2$, onde E é a energia de cada fóton. Uma análise deste fenômeno será feita nos itens a seguir.

Parte A – Tratamento clássico

Considere inicialmente o caso de uma partícula clássica passando por uma massa pontual fixa M a uma alta velocidade inicial v. A trajetória da partícula será dobrada por conta da gravidade da massa pontual. Por conta da alta velocidade da partícula, o ângulo de desvio será muito pequeno e pode ser calculado aproximadamente da seguinte maneira:

a) Assuma que a trajetória da partícula permanece reta, como se a massa M não estivesse lá. A distância da trajetória à massa fixa vale b, como mostra a figura abaixo. Calcule o impulso total que a partícula recebe da massa pontual quando ela viaja de um ponto muito à esquerda para um ponto muito à direita em termos de M, b, G (constante gravitacional) e a massa m da partícula. Você pode achar mais fácil utilizar o ângulo θ mostrado na figura. **(3,5 Pontos)**

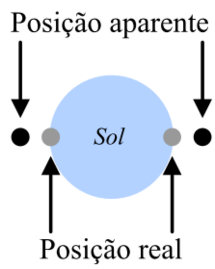


b) Calcule o ângulo de desvio da partícula. **(1 Ponto)**

Parte B – Efeitos astronômicos

Considere duas estrelas cuja distância angular entre elas no céu é exatamente igual ao diâmetro angular do nosso Sol. A distância do Sol à Terra vale $1{,}5 \times 10^{11}\ m$ e o diâmetro do sol vale $1{,}4 \times 10^{9}\ m$.

c) Calcule o diâmetro angular do Sol no céu. **(0,5 Ponto)**



d) Quando o Sol se encontra exatamente entre as estrelas no céu, as estrelas parecem ser "empurradas" pelo Sol, como mostra a figura ao lado. Faça um diagrama que explique brevemente este fenômeno. **(0,5 Pontos)**

Adote a constante gravitacional $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$ e a velocidade da luz no vácuo como $c = 3{,}0 \times 10^{8}\ m/s$.

e) Utilizando as informações fornecidas ao longo do problema, calcule a massa do Sol. **(2 Pontos)**

f) Calcule a distância angular aparente entre as duas estrelas mostradas na figura. **(2,5 Pontos)**

g) Qual é o menor diâmetro D possível da lente de um telescópio utilizado para observar as duas estrelas no céu? A luz proveniente das estrelas possui um comprimento de onda médio de $560\ nm$. **(1 Ponto)**

Problema 3 (10 Pontos)

Uma bolha de sabão esférica está preenchida com ar interno de densidade ρ_i, temperatura T_i e raio R_o é cercada por ar externo de densidade ρ_a, pressão atmosférica P_a e a uma temperatura T_a. A fina camada de sabão possui tensão superficial γ, densidade ρ_s e espessura t. A massa e a tensão superficial do sabão não variam com a temperatura. Assuma que $R_o \gg t$.

Parte A – Equilíbrio da Bolha

O acréscimo de energia, dE, que é necessário para aumentar a área superficial da interface sabão-ar de uma quantidade dA é dada por $dE = \gamma dA$, onde γ é a tensão superficial.

a) Encontre a razão ${}^{\rho_i T_i}\!/_{\rho_a T_a}$ em termos de γ, P_a e R_o. Lembre-se de que a camada de sabão possui uma superfície interna e uma superfície externa. **(1,7 Pontos)**

b) Encontre o valor numérico de ${}^{\rho_i T_i}\!/_{\rho_a T_a} - 1$ utilizando como dados $\gamma = 0{,}0250\ N.m^{-1}$, $R_o = 1{,}00\ cm$ e $P_a = 1{,}013\ Nm^{-2}$. **(0,4 Pontos)**

c) A bolha é inicialmente formada com ar quente dentro. Encontre o mínimo valor numérico da temperatura interna T_i para que a bolha possa flutuar na atmosfera parada. Utilize $T_a = 300\ K$, $\rho_s = 1000\ kg.m^{-3}$, $t = 100\ nm$ e $g = 9{,}80\ m.s^{-2}$. **(2,0 Pontos)**

Parte B – Caindo na Atmosfera

Depois de um tempo após a formação da bolha, ela entrará em equilíbrio térmico com a vizinhança. Essa bolha, inicialmente parada, tende a cair pela atmosfera. Quando o ar está fluindo para cima com velocidade u, a *Lei de Stokes* afirma que a bolha sofrerá uma força de viscosidade com a atmosfera dada por $F = 6\pi\eta R_o u$, onde η é o coeficiente de viscosidade do ar.

d) Calcule a mínima velocidade u do fluxo de ar que precisa ser aplicado para impedir que a bolha caia quando atingir o equilíbrio térmico com a vizinhança. Assuma que a velocidade é pequena de modo que a Lei de Stokes possa ser aplicada e ignore a mudança de raio quando a temperatura diminui até o equilíbrio. Dê sua resposta em termos de ρ_s, R_o, g, t e η. **(1,6 Pontos)**

e) Calcule o valor numérico de u utilizando $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$. **(0,4 Pontos)**

Parte C – Bolha Eletrizada

Os cálculos feitos acima mostram que os termos envolvendo a tensão superficial γ acrescentam muito pouco na precisão dos resultados. Nos itens a seguir, você pode desprezar a tensão superficial. A bolha esférica é então eletrizada com uma carga total q.

f) Encontre uma equação descrevendo o novo raio em termos de R_o, P_a, q e da permissividade elétrica do vácuo ε_0. **(2,0 Pontos)**

P3

g) Assuma que a carga total não é tão grande (i.e. $\frac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) e que a bolha sofreu apenas um pequeno incremento no seu raio depois de ser eletrizada. Encontre a variação de raio $\Delta R = R_1 - R_0$. Você pode querer utilizar a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, onde $|x| \ll 1$. **(0,7 Pontos)**

h) Calcule a magnitude da carga q, em função de $t, \rho_a, \rho_s, \varepsilon_0, R_0$ e P_a para que a bolha fique em repouso na atmosfera parada. Calcule também o valor numérico de q. A permissividade elétrica do vácuo vale $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ farad/m$. **(1,2 Pontos)**

Respostas

Problema 1

Parte A

Tempo de vôo: $t = T_o\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

Máxima distância com relação ao solo: $d = R\cos\frac{\theta}{2}$

Parte B

Variação de comprimento da mola $\Delta x = \frac{\mu_0 \pi I_0^2 N^2 R^2}{2kx_0^2}$

Parte C

Espessura do gelo $l = \sqrt{\frac{2k(\Delta T)t}{\rho L}}$, onde $\Delta T = T_2 - T_1$.

Valor numérico = $1{,}98\ cm$

Problema 2

a) $I_y = \frac{2GMm}{bv}$

b) $\theta \approx \frac{2GM}{bv^2}$

c) Diâmetro angular $\approx {1{,}4 \times 10^6 m}\big/{1{,}5 \times 10^8 m} = 9{,}3 \times 10^{-3}\ rad = 0{,}53°$

d) Desenhar legivelmente ganha tudo.

e) Pelas Leis de Kepler: $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\times(3{,}14)^2.(1{,}5\times10^{11})^3}{\left(6{,}67\times10^{-11}\right).(365.24.60.60)^2} = 2{,}00 \times 10^{30}\ kg$

f) Para a luz, o desvio vale $\theta \approx \frac{2GM}{Rc^2} = 2{,}1 \times 10^{-3}\ rad = 0{,}12°$

A distância angular entre as duas estrelas será = $di\hat{a}metro\ angular\ do\ sol + 2\theta = 0{,}77°$

g) Pelo Critério de Resolução de Rayleigh, o diâmetro angular máximo vale $\theta max = \frac{1{,}22\lambda}{D} = 0{,}77°$

$D = \frac{1{,}22\times560\times10^{-9}m}{0{,}013\ rad} = 5{,}25 \times 10^{-5} m$

Problema 3

a) $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}$

b) $\frac{4\gamma}{R_0 P_a} \approx 0{,}0001$

c) $T_i = \frac{R_0 \rho_a T_a}{R_0\rho_a - 3\rho_s t}\left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right] = 307{,}1\ K$ (o interior deve estar a mais de 7,1 graus acima do exterior)

d) $u \geq \frac{4R_0\rho_s t g}{6\eta} + \frac{8R_0\rho_a g\gamma}{9\eta P_a}$

e) Valor numérico: 0,36 m/s

f) $\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right) - \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_0^4 P_a} = 0$

g) $\Delta R \approx \frac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 R_0^3 P_a}$

h) $q^2 \geq \frac{96\pi^2 R_0^3 \rho_s t \varepsilon_0 P_a}{\rho_a} = 256\ nC$