Grade de correção

Simulado Noic 03

* Escrito por Bismarck Moreira.
* Dúvidas? Mande um email para:
bismarckvasconcelos0703@gmail.com

20/04/2019

Fortaleza - Brazil

1) • $\frac{A_V}{E_{B-V}} = R$ (1) $\Rightarrow$ $A_V = R \cdot E_{B-V} = 3{,}0 \cdot 0{,}29 \Rightarrow \boxed{A_V = 0{,}87}$ (i) (4)

• Equação de magnitudes: $V - M_V = 5\log d - 5 + A_V$ (3)

$\overset{(i)}{\Rightarrow} M_V = 1{,}49 + 5 - 0{,}87 - 5\log(1{,}04 \cdot 10^3) \Rightarrow \boxed{M_V = -9{,}47}$ (2)

2)(a) Tempo de trânsito em função da declinação:

$23{,}9344h - 360°$
$\Delta t \cdot \cos\delta - \theta$ (3) $\Rightarrow \theta = \frac{\Delta t \cdot \cos\delta}{23{,}9344h} \cdot 360°$ (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 1{,}03° \therefore \boxed{\theta = 62'}$ (2) (Unidade errada: -1 ponto)

(b) • O campo de visão irá diminuir por um fator de 2,5: (1)

$\theta' = \frac{\theta}{2{,}5} \Rightarrow \boxed{\theta' = 24{,}8'}$ (1) (Unidade errada: -1 ponto)

3) • Cálculo da temperatura do planeta:

▷ Intensidade absorvida: $A_b = (1-A)F \cdot \pi R_p^2 = (1-A) \cdot \frac{L_*}{4\pi d^2} \cdot \pi R_p^2$ (2)

▷ Luminosidade do planeta: $L = A_b$

$\Rightarrow L = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 = (1-A) \cdot \frac{4\pi R_*^2 \sigma T_*^4}{4\pi d^2} \cdot \pi R_p^2 \Rightarrow T_p^4 = T_*^4 \cdot \left(\frac{R_*}{2d}\right)^2 \cdot (1-A)$

$\Rightarrow d^2 = \left(\frac{T_*}{T_p}\right)^4 \cdot \left(\frac{R_*}{2}\right)^2 \cdot (1-A) \Rightarrow d = \left(\frac{T_*}{T_p}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_*}{2}\right) \cdot \sqrt{1-A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d = \left(\frac{T_*}{T_p}\right)^6 \cdot \left(\frac{R_*}{2}\right)^3 \cdot (1-A)^{3/2}}$ (i) (6)

Questão 3 ... (continuação)

$$\frac{d^3}{P^2} = \frac{GM_*}{4\pi^2} \Rightarrow P^2 = \frac{d^3 \cdot 4\pi^2}{GM_*} \text{ (ii)} \left(\text{3ª lei de Kepler} \right) \quad (2)$$

- Densidade da estrela: $\rho_* = \dfrac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3} \Rightarrow \boxed{M_* = \frac{4}{3}\pi \rho \cdot R_*^3 \text{ (iii)}}$ (1)

- (iii) e (i) em (ii):

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \left(\frac{T_*}{T_P}\right)^6 \cdot \left(\frac{R_*}{2}\right)^3 \cdot (1-A)^{3/2} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \rho R_*^3} \Rightarrow \quad (2)$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \left(\frac{T_*}{T_{WA}}\right)^6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3 \cdot (1-A)^{3/2}}{4\pi\rho} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \left(\frac{10^4}{373}\right)^6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3 \cdot (1-0{,}14)^{3/2}}{4\pi \cdot 520} \quad (1)$$

$$\Rightarrow P \cong 1{,}0 \cdot 10^8 \text{ s} \Rightarrow \boxed{P = 3{,}18 \text{ anos}} \quad (1)$$

4) $\lambda_{apex} = \dfrac{k}{T - \frac{\Delta T}{2}}$; $\lambda_{anti\text{-}ap} = \dfrac{k}{T + \frac{\Delta T}{2}}$ (4)

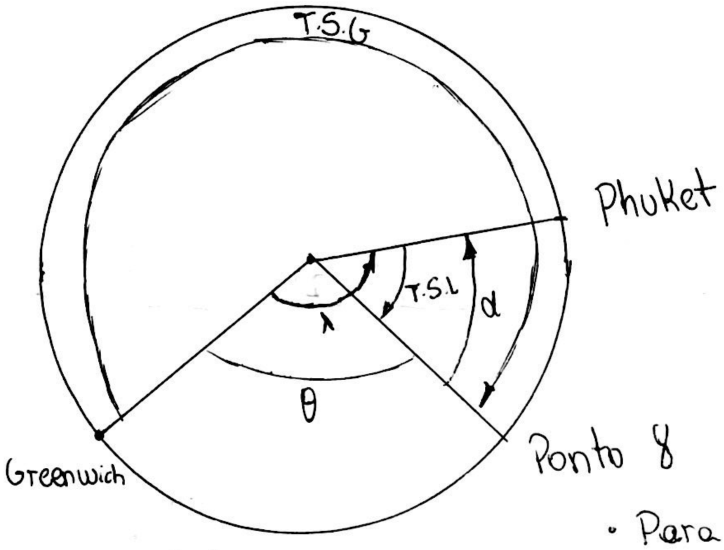
- Como $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda_{ap} - \lambda_{anti\text{-}a}}{2}$, vem que: (1)

$$\Delta\lambda = \frac{k}{2} \cdot \left[\frac{T + \frac{\Delta T}{2} + \frac{\Delta T}{2} - T}{\left(T - \frac{\Delta T}{2}\right) \cdot \left(T + \frac{\Delta T}{2}\right)} \right] = \frac{k \quad \Delta T}{2 \cdot \left(\frac{4T^2 - \Delta T^2}{4}\right)} = \frac{2k\Delta T}{4T^2 - \Delta T^2} \quad (3)$$

- Efeito doppler: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{v}{c} \Rightarrow \dfrac{v}{c} = \dfrac{\frac{2k\Delta T}{4T^2 - \Delta T^2}}{\frac{k}{T}} \Rightarrow$ (2)

$$\Rightarrow v = \frac{2cT\Delta T}{4T^2 - \Delta T^2} \Rightarrow \boxed{v \cong 591 \text{ km/s}} \quad (5)$$

5) • Esquematização da situação:



• Do desenho:

▷ $|T.S.L| = |\alpha|$ (i) (2)

▷ $\theta = 24h - T.S.G = \lambda - T.S.L$ (2)

$\overset{(i)}{\Rightarrow} 24 - T.S.G = \lambda - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow T.S.G = (24 \times 15) - 98,4 + 81$

$\Rightarrow \boxed{T.S.G = 342,6°}$ (2)

• Para o horário de questão:

$UT + 7 = 21 \Rightarrow UT = 14h$ (1)

• Variação de T.S.G: 365,2422 dias — 360°

1 dia — $\Delta\alpha$ $\Rightarrow \Delta\alpha = 0,9856°/dia$ (1)

• Daí, $\Delta T = \left[T.S.G - T.SG_0 - UT \cdot \left(\frac{24}{23,9344} \right) \right] \cdot \frac{1}{\Delta\alpha} \Rightarrow$ (4)

$\Rightarrow \Delta T = \left[342,6 - 100,75 - \left(210 \cdot \frac{24}{23,9344} \right) \right] \cdot \frac{1}{0,9856} \Rightarrow \Delta T = 31,7$ dias (2) em Greenwich.

• Como Phuket está em UT+7, serão "exatos" 32 dias para a cidade, ou seja, no dia 02 de Fevereiro. (2)

6) (a) • Essa órbita de transferência terá semi-eixo maior de:

$$\Rightarrow a = \frac{a_{\oplus} + a_M}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1,888 \cdot 10^{11} m} \quad (1)$$

• Em $r = a_{\oplus}$, a nave espacial terá a seguinte velocidade:

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{2GM_{\odot}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{10^{11}} \cdot \left(\frac{2}{1,496} - \frac{1}{1,888}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = 32,722 \ Km/s} \quad (2)$$

• Velocidade da Terra ao redor do Sol: $V_{\oplus} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{\oplus} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{1,496 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow \boxed{V_{\oplus} = 29,779 \ Km/s} \quad (2)$$

• excesso de velocidade hiperbólico: $\boxed{V_{\infty} = V_1 - V_{\oplus} = 2,943 \ Km/s}$ (1)

• Porém a espaçonave precisa escapar da atração gravitacional da Terra

$$V_{esc} = \sqrt{2} \ V_{orb} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)}} = \sqrt{2} \cdot 7,670 \ Km/s = 10,847 \ Km/s \quad (1)$$

• Sendo assim: $V_p^2 = V_{esc}^2 + V_{\infty}^2 \Rightarrow \boxed{V_p = 11,239 \ Km/s}$ (4)

• Finalmente: $\Delta V_1 = V_p - V_{orb} \Rightarrow \Delta V_1 = 11,239 - 7,670$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V_1 = 3,569 \ Km/s} \quad (1)$$

(b) • Em $r = a_M$: $V_2 = V_1 \frac{a_1}{a_2} = V_1 \frac{a_{\oplus}}{a_M} \Rightarrow V_2 = 2,15 \cdot 10^4 m/s$ (3)

• Em órbita circular com $a = a_M$: $V_{f,2} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_M}} = 2,42 \cdot 10^4 m/s$ (2)

• Com isso: $\boxed{\Delta V_2 = 2,64 \cdot 10^3 m/s}$ (1)

Questão 6... (continuação)

(c) • Paralaxe da estrela: $p = \dfrac{613,7 \cdot 10^{-3}}{2}$ '' (1)

• Em Marte: $d(pc) = \dfrac{1,52\ (U.A.)}{p('')} \Rightarrow \boxed{d = 4,95\ pc}$ (1)

7)(a) • No modelo clássico, a energia total do universo é zero. (1)

$$E_{MEC} = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{d} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{d} \quad (*) \qquad (3)$$

• Lei de Hubble: $v = H_0 . d \Rightarrow v^2 = H_0^2 \cdot d^2$ (i) (3)

• Densidade de massa: $\rho_c = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi d^3} \Rightarrow M = d^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \rho_c$ (ii) (3)

• De (ii) e (i) em (*), obtemos:

$$\frac{H_0^2 d^2}{2} = \frac{4\pi \rho_c d^3 G}{3d} \Rightarrow \boxed{\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}} \quad (+) \qquad (5)$$

(b) • Valor de H_0 em unidades do S.I.:

$$H_0 = 67,80 \ \frac{Km/s}{Mpc} \cdot \frac{1\ Mpc}{3,0856 \cdot 10^{22} m} \cdot \frac{10^3 m}{1 Km} \Rightarrow H_0 = 2,20 \cdot 10^{-18} s^{-1} \quad (2)$$

• Em (+): $\rho_c = \dfrac{3 \cdot (2,20 \cdot 10^{-18})^2}{8\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow \rho_c = 8,64 \cdot 10^{-27}\ Kg/m^3$ (2)

• Como $\rho_c > \rho_{BARIÔNICA}$, deve existir um adicional de massa não visível no universo (matéria escura). (1)

8) • Temperatura superficial de Vênus.

$$4\pi R_V^2 \sigma T_V^4 = \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi d^2} \cdot \pi R_V^2 (1-\alpha) \overset{\alpha=0}{\Longrightarrow} T_V = T_\odot \sqrt{\frac{R_\odot}{2d}} \Rightarrow \quad (10)$$

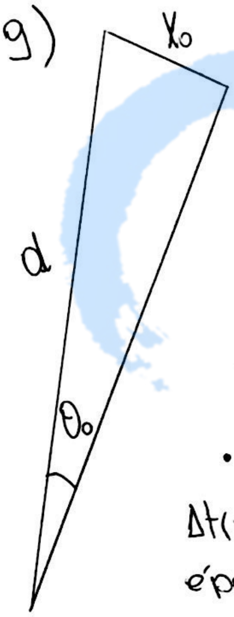
$$\Rightarrow T_V = \left(\frac{6{,}96 \cdot 10^8}{2 \cdot 0{,}72 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}\right)^{1/2} \cdot 5778 \quad \therefore \quad \boxed{T_V = 328\ K}$$

• Ângulo sólido: $\Omega = \pi \frac{R^2}{d^2} = \frac{\pi \cdot (d^2 \cdot \theta^2)}{d^2} = \pi \left(\frac{66}{206265}\right)^2 \quad (5)$

• Densidade de fluxo: $S_\nu = \Omega B_\nu = \pi \left(\frac{66}{206265}\right)^2 \cdot \frac{2 k_B T}{c^2} \nu^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_\nu = 2\pi \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 328 \cdot \left(\frac{66 \cdot 3 \cdot 10^9}{206265 \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^2 \Rightarrow \boxed{S_\nu = 2{,}92 \cdot 10^{-25}\ W/m^2 \cdot Hz} \quad (10)$$

9)



• Arco x_0: $\theta_0 \cdot d = x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = c \cdot t_0 \, \theta_0}$ (2)

• Época de referência é a atual $\therefore a(t_0) = 1$. (2)

• Então, na época da recombinação, temos: (2)

$x = \theta_0 \, c \, t_0 \cdot a(t)$

• Tempo para percorrer x: $\Delta t_{(x)} = \frac{\theta_0 \, c \, t_0 \, a(t)}{c} = \theta_0 t_0 \, a(t)$. (4)

• Para que os dois pontos possam se comunicar, $\Delta t(x)$ tem que ser a idade do universo na época da recombinação: $t = \theta_0 \, t_0 \, a(t) \Rightarrow$ (10)

$$\Rightarrow \theta_0 = t/t_0 a(t) = \frac{t \cdot a(t_0)}{t_0 \cdot a(t)} = \frac{t \cdot T}{t_0 \cdot T_0} = \frac{10^5 \cdot 3000}{1{,}5 \cdot 10^{15} \cdot 3} \cdot \left(\frac{180°}{\pi}\right) \Rightarrow (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 = 0{,}38°} \quad (1)$$

10) (a) • Mudança de brilho (B) com a magnitude:

$$+3 - (+6) = -2{,}5 \log\left(\frac{B_0}{B}\right) = 2{,}5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right) = 2{,}5 \log\left(e^{-t/\tau}\right) = -\frac{t}{\tau} \cdot 2{,}5 \log e \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2{,}5}{3} \cdot t \log e = \frac{2{,}5}{3} \cdot 265 \cdot \log e \Rightarrow \boxed{\tau = 95{,}9 \text{ dias}} \quad (6)$$

Questão 10... (continuação)

(b) • magnitude limite do telescópio:

$$m_L = -2{,}5\log\left(\frac{D_T^2}{D_{olho}^2}\cdot e_{ff}\right) + 6{,}0 = -2{,}5\log\left(\frac{15{,}24^2}{0{,}6^2}\cdot 0{,}7\right) + 6{,}0 \Rightarrow \quad (5)$$

$$\Rightarrow \boxed{m_L = 12{,}64 \text{ mag}} \quad (1)$$

• Analogamente ao item (a):

$$12{,}64 - 3 = -2{,}5\log\frac{B}{B_0} = -2{,}5\log e^{-t/\tau} = 2{,}5\,\frac{t}{\tau}\log e \Rightarrow \quad (7)$$

$$\Rightarrow t = \frac{9{,}64\cdot 95{,}9}{2{,}5\log e} \Rightarrow \boxed{t = 851{,}5 \text{ dias}} \quad (1)$$

• O último dia será 12 de setembro de 1989 (2)

[também são válidos os dias 11 e 13].

11) (a) M3 M45 (1 ponto cada)

(b) • M45 é um aglomerado aberto, e, portanto, a maior parte de suas estrelas são jovens (estão nos primeiros estágios de seu ciclo de vida). Com isso, é notável a curva da sequência principal em seu diagrama. (2)

• M3 é um aglomerado globular, e uma grande porção de suas estrelas já estão em fases mais avançadas de suas vidas. (2)

(c) • Para fazer tão razão, podemos escolher estrelas da sequência principal com mesmo B-V dos dois gráficos.

Para M3: $B-V = 0{,}5 \Rightarrow V_3 = 20$ ($V = 20 \sim 21$ e $B-V = 0{,}5 \sim 0{,}6$ são valores aceitáveis). (3)

Para M45: $B-V = 0{,}5 \Rightarrow V_{45} = 9{,}5$ (3)

• Com isso: $20 - 9{,}5 = -2{,}5\log\left(\frac{d_{45}}{d_3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d_3}{d_{45}} \simeq 125}$ (2)

Questão 11 ... (continuação)

(d) • Para $B-V=0 \Rightarrow V_{45} = 6,5$ (4)

Daí, $V - M_V = 5\log d - 5 \Rightarrow 6,5 - 0 = 5\log d - 5 \Rightarrow$ (3)

$\Rightarrow \boxed{d = 200pc}$ (1)

(e) • Equação de magnitudes:

$22 - 13 = -2,5\log\left[\left(\frac{L_{22}}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_{13}}\right)\right] \Rightarrow \frac{-(22-13)}{2,5} = \log\left(\frac{L_{22}}{L_{13}}\right) \Rightarrow$ (7)

$\Rightarrow \boxed{\frac{L_{13}}{L_{22}} = 3981}$ (1)

12) (a) Curva cheia: Equação do tempo (0,4)

Curva —·—: Eixo de rotação (0,3)

Curva -----: órbita da Terra (0,3)

(b) • Para $\lambda = 0$, devemos ter $D \cong 81$ dias (21/03). (1)

Com isso, $\bar{\lambda} = 360\left(\frac{D-81}{365}\right)$; com $0 \leq D \leq 365$. (2)

• Então: $\boxed{\eta(D) = 9,87\,\text{sen}\left[720\left(\frac{D-81}{365}\right)\right] - 7,67\,\text{sen}\left[360\left(\frac{D-81}{365}\right) + 78,7\right]}$ (2)

(c) • Pelo gráfico dado, esses dias serão no máximo e no mínimo

• Com auxílio da régua: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Maior dia: dia } 43,33 \\ \text{menor dia: dia } 303,33\end{array}}$ (1) (1)

(d) • Substituindo em $\eta(D)$:

$\eta(D) = 9,87\,\text{sen}\left[720\left(\frac{43,33-81}{365}\right)\right] - 7,67\,\text{sen}\left[360\left(\frac{43,33-81}{365}\right) + 78,7\right] \Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow \boxed{\eta(D) = -14,59 \text{ minutos}}$ (4)

Questão 12... (continuação)

- Para $D = 303,33$, obtemos: (1)

$$\boxed{\eta'(D) = 16,45 \text{ minutos}}$$ (4)

(e) • Esse valor será dado por $\Delta\eta(D)$: (3)

$$\Rightarrow \Delta\eta(D) = 16,45 - (-14,59) \Rightarrow \boxed{\Delta\eta(D) \approx 31,04 \text{ minutos}}$$ (2)

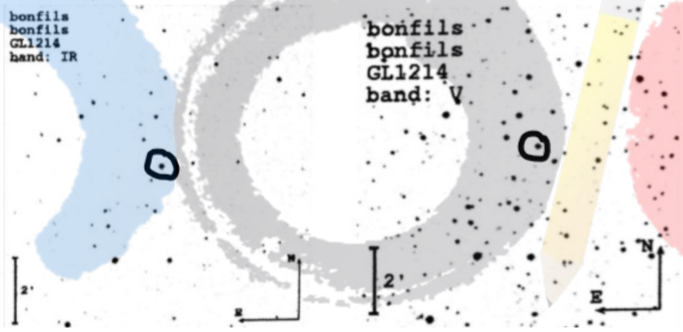
(f) • Melbourn está no fuso +10: (2)

Com isso, $T = 12 - \left(\frac{150-145}{15}\right) + \eta(D) \Rightarrow T = 11h\,40min + \eta(D)$ (4)

- Para $\eta(D = 43,33) \Rightarrow T_{mín} = 11h\,40min - 14,59m \Rightarrow \boxed{T_{mín} \cong 11h\,25min}$ (1)

- Para $\eta(D = 303,33) \Rightarrow T_{máx} = 11h\,40min + 16,45m \Rightarrow \boxed{T_{máx} \cong 11h\,56min}$ (1)

(3) (a)



(1)

(b) A primeira foto foi tirada mais recentemente, pois o objeto se move em direção ao Sul. (5)

(c) $d = \dfrac{1}{77,2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{d = 12,95 \text{ pc}}$ (10)

(d) • Dos dados do item (b), temos:

$$\mu = \sqrt{585^2 + (-752)^2} \Rightarrow \boxed{\mu \approx 953 \text{ mas/anos}}$$ (8)

- Pelo fator de conversão:

$$v_T = 4,74\,\mu d = 4,74 \cdot 953 \cdot 10^{-3} \cdot 12,95 \Rightarrow \boxed{v_T = 58,5 \text{ Km/s}}$$ (7)

14)

(a) $F_{sup} = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{10^{12} L_\odot}{4\pi(3 \cdot 3{,}0856 \cdot 10^{16})^2} \Rightarrow \boxed{F_{sup} \cong 3553\ W/m^2}$ (5)

(b) $R = \frac{F_{sup} + F_\odot}{F_\odot} = \frac{3553 + 1366}{1366} \Rightarrow \boxed{R = 3{,}60}$ (5)

(c) · A temperatura possui dependência de $F^{1/4}$. Daí,

$\frac{T}{T_\odot} = \left(\frac{F_{sup} + F_\odot}{F_\odot}\right)^{1/4} \Rightarrow T = 287 \cdot (3{,}60)^{1/4} \Rightarrow \boxed{T = 395\ K}$ (5)

(d) · Analogamente à fórmula usada no item (c),

$\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 = \left(\frac{F_{sup} + F_\odot}{F_\odot}\right) \Rightarrow F_{sup} = F_\odot\left[\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 - 1\right] \Rightarrow$ (4)

$\Rightarrow F_{sup} = 1366 \cdot \left[\left(\frac{333}{287}\right)^4 - 1\right] \Rightarrow \boxed{F_{sup} = 1110\ W/m^2}$ (1)

· Daí, $F_{sup} = \frac{10^{12} L_\odot}{4\pi d_{sup}^2} \Rightarrow \boxed{d_{sup} = 5{,}37\ pc}$ (5)

(e) $p = \left(0{,}14 \frac{estrelas}{pc^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}73^3 pc^3\right) \cdot \frac{1}{10^{11} estrelas} \cdot \frac{10^{10}}{30} \Rightarrow p = 0{,}303$

$\Rightarrow \boxed{p = 30{,}3\%}$

15) (a) · Fluxo de energia da fonte:

$F = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} = \sigma T^4 \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^2 = \sigma T^4 \left(\frac{0{,}5}{500}\right)^2 \Rightarrow$ (4)

$\Rightarrow \boxed{F = 3{,}54 \cdot 10^{-7}\ W/m^2}$ (1)

(b) · Densidade de fluxo da fonte:

$S_\nu = B_\nu \cdot \Omega = \frac{2 k_B T}{c^2} \cdot \nu^2 \cdot \pi \left(\frac{R}{d}\right)^2 = \frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 50}{(100 \cdot 10^{-6})^2} \cdot \pi \left(\frac{0{,}5}{500}\right)^2 \Rightarrow$ (8)

$\Rightarrow \boxed{S_\nu = 4{,}34 \cdot 10^{-19}\ W/m^2 \cdot Hz}$ (2)

Questão 15... (continuação)

• Energia total por segundo por unidade de frequência chegando no prato do telescópio:

$$I_\nu = S_\nu \cdot A = 4{,}34 \cdot 10^{-19} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{4}\right) \Rightarrow \boxed{I_\nu = 3{,}41 \cdot 10^{-19}\ J/_{s \cdot Hz}} \quad (10)$$

(c) • Para o telescópio:

$$L_\nu = \mathrm{eff} \cdot B_\nu \cdot A_T = \frac{0{,}01 \cdot 2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(100 \cdot 10^{-6})^2} \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad (6)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_\nu = 6{,}50 \cdot 10^{-15}\ J/_{s \cdot Hz}} \quad (2)$$

(1)

$$* \; B_\nu = \frac{2K_BT}{c^2} \cdot \nu^2 = \frac{2K_BT}{(c/\nu)^2} = \frac{2K_BT}{(\lambda)^2}$$

• Daí, $\boxed{\frac{L_\nu}{I_\nu} = 1{,}91 \cdot 10^4}$ (1)

(d) Nesse processo, L_ν irá diminuir por um fator de 10 vezes, já que $B_\nu \propto T$:

$$\boxed{L_\nu' = 6{,}50 \cdot 10^{-16}\ J/_{s \cdot Hz}} \quad (2)$$

• Além disso:

$$\boxed{\frac{L_\nu'}{I_\nu} = 1{,}91 \cdot 10^3} \quad (2)$$

16) (a) • Escrevendo a resultante centrípeta da estrela:

$$\frac{mV^2(r)}{r^2} = \frac{GM(r).m}{r} \Rightarrow V^2(r) = \frac{GM(r)}{r} \Rightarrow \quad (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}} \quad (i) \qquad (1)$$

(b) • Internamente à r_0:

$$\rho_0 = \frac{M(r_0)}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \boxed{M(r) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 \pi r^3} \quad (2)$$

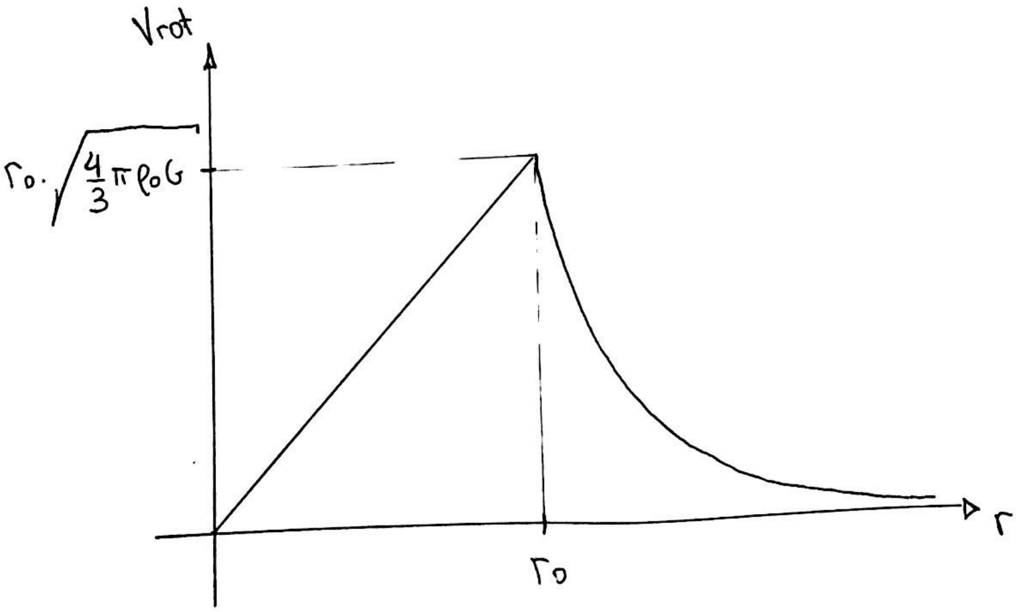
• Daí, $V(r) = \sqrt{\frac{G.\frac{4}{3}\pi\rho_0.r^3}{r}} \Rightarrow \boxed{V(r) = r.\sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho_0 G}} \quad (3)$

• Para $r > r_0$, a massa será praticamente constante:

(1)

$$\boxed{M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3}$$

▷ Daí, $V(r>r_0) = \sqrt{\frac{G.\frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3}{r}} \Rightarrow \boxed{V(r>r_0) = \sqrt{\frac{4}{3}.\frac{\pi G.\rho_0.r_0^3}{r}}}$ (4) (1)



(8)

Questão 16... (continuação)

(c) • Substituindo ρ em (*):

$$V(r) = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} \cdot \frac{r_0^3}{r}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 \cdot \frac{r_0^{3+\alpha}}{r^{1+\alpha}}} \quad (8)$$

para que $v(r)$ seja constante: $\boxed{\alpha = -1.}$ (2)

(d) • Substituindo os valores dados em (i):

▹ $V_{esp}^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = \frac{(70 \cdot 10^3)^2 \cdot (9{,}46 \cdot 10^{15} \cdot 2{,}8 \cdot 10^5)}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow \boxed{M = 1{,}95 \cdot 10^{41}\ kg}$ → que é a quantidade de massa bariônica (1)

▹ $V_{exp}^2 = \frac{GM'}{r} \Rightarrow M' = \frac{(220 \cdot 10^3)^2 \cdot (9{,}46 \cdot 10^{15} \cdot 2{,}8 \cdot 10^5)}{} \Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow \boxed{M' = 1{,}92 \cdot 10^{42}\ kg}$ → que é a massa total (1)

• Daí, $p = \frac{M' - M}{M} \Rightarrow \boxed{p = 89{,}9\%}$ (1)

(e) • $F = \frac{G M(r) \cdot m}{r^2} = m \cdot a \cdot \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = m \cdot a \cdot \frac{a}{a_0}$ (4)

$\Rightarrow \frac{a^2}{a_0} = \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{a_0} = \frac{GM(r)}{r^2} \Rightarrow v^4 = GM(r) \cdot a_0$ (4)

$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt[4]{G M(r) \cdot a_0}}$ (2)

↳ constante para $r > r_0$.

* $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a}{a_0}$ para $\frac{a}{a_0} \ll 1$.

* $a = a_{cp} = \frac{v^2}{r}$

17)

(a) • $E_M = \sum E_c + \sum E_p \Rightarrow$ (1)

$$\Rightarrow E_M = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r} \therefore \boxed{E_M = \frac{1}{2}\cdot\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) - \frac{G m_1 m_2}{r}} \quad (4)$$

(b) • Em relação ao centro de massa

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, v$$

; em que $v = v_1 + v_2$ (2)

↳ velocidade relativa

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, v$$

• Daí, $E_M = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 \cdot m_2^2}{(m_1+m_2)^2} v^2 + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2} v^2\right] - \frac{G m_1 m_2}{r} \Rightarrow$ (2)

$$\Rightarrow E_M = \frac{m_1 m_2}{2}\cdot\left(\frac{m_1+m_2}{(m_1+m_2)^2} v^2\right) - \frac{G m_1 m_2}{r_1+r_2} \Rightarrow \boxed{E_M = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r_1+r_2}} \quad (6)$$

(c) • Conservação do momento angular:

$$v_a r_a = v_p \cdot r_p \Rightarrow v_a \cdot a \cdot (1+e) = v_p \cdot a \cdot (1-e) \Rightarrow \frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{v_a}{v_p}\right)^2 = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2} \quad (*) \qquad (2)$$

(d) • Conservação da energia mecânica, entre apoastro e periastro:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{v_a^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_a} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{v_p^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_p} \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{v_a^2}{2} - \frac{G(m_1+m_2)}{r_a} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{G(m_1+m_2)}{r_p} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{v_p^2}{2}\cdot\left[1 - \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2\right] = G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{v_p^2}{2}\cdot\left[\frac{1+2e+e^2-1+2e-e^2}{(1+e)^2}\right] = \frac{G(m_1+m_2)}{a}\cdot\frac{2e}{1-e^2} \Rightarrow \boxed{v_p^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a}\cdot\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \quad (9)$$

Questão 17... (continuação)

- Substituindo V_p em (*):

$$V_a^2 = V_p^2 \cdot \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \Rightarrow \boxed{V_a^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a} \cdot \left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \qquad (5)$$

(e) • Energia no periélio:

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{G(m_1+m_2)}{2a} \left(\frac{1+e}{1-e}\right) - \frac{G m_1 m_2}{a(1-e)} \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\Rightarrow E = \frac{G m_1 m_2}{2a} \left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - \frac{2}{1-e}\right] = \frac{G m_1 m_2}{2a}\left[\frac{1+e-2}{1-e}\right] \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{G m_1 m_2}{2a}} \quad (+) \qquad (3)$$

(f) • De (+), podemos escrever:

$$-\frac{G m_1 m_2}{2a} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) \cdot \frac{V^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r} \Rightarrow \frac{V^2}{2} = G(m_1+m_2) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt{G(m_1+m_2) \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}} \qquad (4)$$

18) (a) • Pela cinemática: $t = \frac{r}{V}$ (5)

(b) • A luz que percorre do ponto P até nós leva um tempo menor do que de um ponto O. (2)

Com isso, iremos medir um tempo aparente para esse movimento, dado por

$$t_{ap} = t - \frac{x}{c} = \frac{r}{V} - \frac{r\cos\theta}{c} \Rightarrow \boxed{t_{AP} = \frac{r}{V}\left(1 - \frac{V\cos\theta}{c}\right)} \qquad (8)$$

Questão 18... (continuação)

(c) No céu ele irá percorrer y em um tempo t_{ap}:

$$y = t_{ap} \cdot V_{ap}(+) \Rightarrow V_{ap} \cdot \frac{r}{v} \cdot \left(1 - \frac{v\cos\theta}{c}\right) = r\,\text{sen}\theta \Rightarrow \qquad (8)$$

$$\Rightarrow V_{ap} = \frac{v\,\text{sen}\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \Rightarrow \boxed{V_{ap} = \frac{v \cdot \text{sen}\theta}{1 - \beta\cos\theta}} \; (*) \qquad (2)$$

(d) • De (*): $\left(\frac{V_{ap}}{v}\right)(\theta) = \frac{\text{sen}\theta}{1-\beta\cos\theta} \Rightarrow \qquad (1)$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{V_{ap}}{v}\right) = 0 = \frac{\cos\theta}{1-\beta\cos\theta} - \frac{\text{sen}\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} \cdot \beta\,\text{sen}\theta \Rightarrow \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta\,\text{sen}^2\theta}{1-\beta\cos\theta} = \cos\theta \Rightarrow \beta - \beta\cos^2\theta = \cos\theta - \beta\cos^2\theta \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \beta} \text{ ou } \boxed{\theta = \arccos(\beta)} \qquad (5)$$

(e) • Se $\cos\theta = \beta$; então $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \beta^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta = \sqrt{1-\beta^2} \qquad (2)$$

• Daí, $\left(\frac{V_{ap}}{v}\right) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cdot\beta} = \frac{1}{\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{V_{ap}}{v}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (8)$

(f) • $V_{ap} = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0{,}95c}{\sqrt{1-0{,}95^2}} \Rightarrow \boxed{V_{ap} \hat{=} 3{,}0c} \qquad (1)$

$\cos\theta = \beta = 0{,}95 \Rightarrow \boxed{\theta = 18{,}2°}$

(g) Da equação (+).

$$y = V_{ap} \cdot t_{ap} \Rightarrow t_{ap} = \frac{3{,}0856 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 3 \cdot 10^8} \Rightarrow \boxed{t_{ap} = 1{,}09 \text{ anos}}$$

Fim! ^-^