SIMULADO NOIC 06 – PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA E XI OLAA DE 2019

Nome: Nota:

PROVA TEÓRICA

Instruções

- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis;
- A prova tem duração total de **4 horas;**
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões;
- Essa prova é composta por 14 questões, divididas em 3 categorias:
  - Questões curtas **– 8 Questões**
  - Questões médias – **4 Questões**
  - Questões longas – **2 Questão**
- Segue abaixo uma tabela da pontuação máxima para cada questão.

Questão	Pontuação
1	10
2	10
3	10
4	10
5	15
6	15
7	15
8	15
9	25
10	25
11	25
12	25
13	60
14	40
Total	300

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$R_\odot = 6{,}96 \times 10^{8}\ m$
Luminosidade	$L_\odot = 3{,}83 \times 10^{26}\ W$
Magnitude absoluta visual	$M_{V_\odot} = 4{,}82$
Magnitude aparente visual	$m_\odot = -26{,}72$
Temperatura Superficial	$T_\odot = 5778\ K$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_\odot = 220\ km\ s^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8{,}5\ kpc$
A Terra	
Massa	$M_\oplus = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
Raio	$R_\odot = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_\oplus = 9{,}81\ m/s^2$
Albedo	$\alpha_\oplus = 0{,}39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23°27'$
Duração do Ano Tropical	$365{,}2422$ *dias solares médios*
Duração do Ano Sideral	$365{,}2564$ *dias solares médios*
A Lua	
Massa	$M_L = 7{,}44 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$R_L = 1{,}74 \times 10^{6}\ m$
Distância Terra-Lua	$d_L = 3{,}78 \times 10^{8}\ m$
Período sinódico	$P_{S_L} = 29{,}5306\ dias$
Albedo	$\alpha_L = 0{,}14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_L = 5{,}14°$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1{,}496 \times 10^{11}\ m$
1 Parsec (pc)	$3{,}0856 \times 10^{16}\ m$
Constante gravitacional	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ J\ s$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Constante de Hubble	$H_o = 67{,}8\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2{,}998 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26}\ W\ m^{-2}\ Hz^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m\ K$
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do próton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$

Questões Curtas

1) Verdadeiro ou Falso

Analise os itens a seguir e marque Verdadeiro (V) ou Falso (F). Dê uma justificativa para que os itens marcados com (F) sejam falsos.

(i) Já que algumas galáxias possuem velocidade aparente de recessão maior que a da luz, a Lei de Hubble-Lemaitre viola a relatividade geral.

(ii) É possível que partículas no céu sejam observadas com a velocidade maior que a da luz, independente de sua classificação.

(iii) Um fóton propaga-se livremente pelo espaço vazio. À medida que o Universo se expande, o momentum do fóton diminui.

(iv) Tomando como r_c e r_b os raios de cima e de baixo do Sol sem distorção, é possível dizer que, ao nascer, teremos a impressão de observar que $r_c < r_b$.

(v) Com o passar do tempo, a separação angular necessária para que dois corpos estejam conectados por causalidade diminui.

2) Efeitos de maré

Calcule a razão entre os efeitos de maré exercidos sob a Terra pelo Sol ($\Delta a_{\odot}$) e pela Lua (Δa_L).

Dica: Pode ser útil usar a seguinte relação - $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^3}$.

3) Sombras

Mr. Seeds, enquanto viajava pelo hemisfério norte, observou que o comprimento da sombra mais curta de uma vareta de 1,000 m em um dia era de 1,732 m. Nesse mesmo dia, o comprimento da maior sombra dessa vareta era de 5,671 m. **Encontre a latitude, φ, do observador e a declinação do Sol, $\delta_{\odot}$, para este dia.**

4) Distância mínima de um cometa

Em certo momento, um cometa de massa m está muito distante do Sol, e possui velocidade v_o. Se por algum acaso, ele não sofresse da atração gravitacional do Sol, ele ficaria a uma distância mínima de d do Sol.

Calcule a menor distância, z, que o cometa fica do Sol, durante sua órbita.

5) Temperatura efetiva na superfície de uma estrela

A partir da radiação emitida por uma estrela, são estudadas duas radiações com valores de comprimento de onda em uma faixa estreita $\Delta\lambda \ll \lambda$, ou seja, o comprimento de onda tem valores entre λ e $\lambda + \Delta\lambda$. De acordo com a relação de Planck (para um corpo negro), a seguinte relação define a energia emitida pela estrela por unidade de tempo, por unidade de área da superfície, por unidade de intervalo de comprimento de onda:

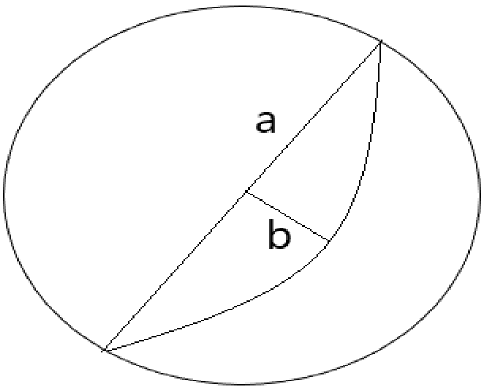
$$I = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right)}$$

As intensidades espectrais das duas radiações de comprimentos de onda λ_1 e λ_2, ambas com o mesmo $\Delta\lambda$ são $I_1(\lambda_1)$ e $I_2(\lambda_2)$, respectivamente.

Se $I_1(\lambda_1) = 2I_2(\lambda_2)$, **descubra a relação entre os comprimentos de onda $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$,** quando $hc \ll \lambda kT$. Dica: $e^x \approx 1 + x$ se $x \ll 1$.

6) Fases da Lua

Considere a seguinte imagem da Lua. Observe que a linha que separa o lado iluminado e o lado sombreado é um arco de elipse. Chamemos o comprimento do semi-eixo maior dessa elipse de a, o semi-eixo menor de b e o ângulo Sol-Lua-Terra de β.



(a) Derive uma expressão para o ângulo Sol-Lua-Terra em termos de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Considere que os raios do Sol cheguem paralelos ao sistema Terra Lua.

(b) Chamamos de fase F da Lua a fração visível de sua face iluminada. F, então, varia de 1 (Lua Cheia) a 0 (Lua Nova), passando por 0,5 (Quarto Minguante ou crescente). **Derive uma expressão que relacione $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{\beta}$.**

(c) Com o auxílio de uma régua, **determine o valor de $\boldsymbol{F}$ na imagem acima.**

7) Movimento próprio das Híades

As Híades possuem movimento próprio de $0{,}07''/ano$ e, ao serem observadas, parecem estar convergindo para um ponto a 26° de distância angular. Ao observar as estrelas na linha $H\alpha$ ($656{,}28\,nm$) anotamos um comprimento de onda de $\lambda = 656{,}36\,nm$.

(a) Qual a distância do aglomerado até nós?

(b) Qual é a velocidade do aglomerado?

(c) Há quantos anos a magnitude do aglomerado era menor por um fator de 0,5?

8) Magnitude absoluta de uma cefeída

Cefeidas são estrelas variáveis, cujas luminosidades variam devido a pulsações estelares. O período de oscilação de uma Cefeida é:

$$P = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

Na qual R é o raio médio da Cefeida; M é a massa (constante durante a oscilação). Considere que a temperatura permanece durante a pulsação.

Expresse a magnitude absoluta média da Cefeida, M_{cef}, da seguinte maneira:

$$M_{cef} = -2{,}5logk - \left(\frac{10}{3}\right)logP$$

Quanto vale k?

Questões Médias

9) Perfil de densidade de atmosferas estelares

Uma estrela de raio R e massa M possui uma atmosfera que obedece a seguinte equação politrópica de estado:

$$P = K\rho^{5/3}$$

Em que P é a pressão do gás, ρ é a densidade do gás (em unidades de massa por volume) e K é uma constante. Assuma que a atmosfera é suficientemente fina para que a aceleração da gravidade possa ser considerada constante no intervalo analisado.

Antes de fazer uma análise mais profunda do problema, **quais são as dimensões de K?**

Considerando que a estrela esteja em equilíbrio, **encontre uma expressão para $P(z)$, em que z é a altura acima da superfície da estrela.** A pressão na superfície é conhecida, e dada por P_o.

A partir da expressão encontrada, **quais são os possíveis valores admitidos para z?** O que você teve de assumir sobre $P(z)$ para chegar a essa conclusão?

Os seguintes resultados podem ser úteis: $\int_{a_o}^{a_f} a^{-3/5}da = \frac{5}{2}\left(a_f^{\frac{2}{5}} - a_o^{\frac{2}{5}}\right)$ e $\int_{x_o}^{x} dx = x - x_o$.

10) Curvas de rotação – Parte II

Uma galáxia espiral possui uma curva de rotação que pode ser representada pela seguinte função:

$$v(r) = 200\left(1 - e^{-\frac{r}{r_o}}\right)\ km/s$$

Em que r é a distância radial até o centro galáctico e $r_o = 4\ kpc$.

(a) Estime a massa contida em um raio de 16 kpc em relação ao centro. Expresse sua resposta em unidades de massas solares.

(b) Mostre que para distâncias radiais pequenas ($r \ll r_o$) a frequência angular, Ω, é aproximadamente constante.

(c) Encontre o período orbital das estrelas mais próximas ao centro, em anos.

(d) Para grandes valores de r, a curva de rotação é perto de um valor constante, ou seja, a curva de rotação é plana. Assuma que toda a matéria que produz essa curva de rotação é distribuída esfericamente e simetricamente em relação ao centro, com um perfil de densidade $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$, para $r \gg r_o$. **Encontre o valor de α que nos leva a uma curva de rotação plana. Qual seria, então, a proporcionalidade entre ρ e r?**

11) Aplicações de Densidade de Fluxo

(11.1) Na frequência de $15\,GHz$, o *Green Bank Telescope* pode detectar densidades de fluxo acima de $0{,}2\,mJy$. Abaixo disso, o telescópio entra no seu "limite de confusão," em que existem muitos objetos com a mesma densidade de fluxo, fazendo com que nenhum consiga ser identificado. **Qual é a máxima distância que poderíamos detectar a emissão térmica de uma estrela de nêutrons, de temperatura $10^5\,K$ e raio de $10\,km$, para que haja esse limite de confusão?** Sabe-se que a estrela de nêutrons mais próxima está a $85\,pc$ de distância. **Seria possível existir uma estrela de nêutrons a essa distância?**

(11.2) A maioria dos celulares manda e recebe informações a um comprimento de onda de $1900\,MHz$. A potência que um celular transmite é de $2\,W$, em uma largura de banda de $30\,kHz$. Com um rádio telescópio observando em $1900\,MHz$, **qual a densidade de fluxo que você iria observar um celular, que está na Lua?** Considere o celular como um emissor isotrópico e que o brilho Lunar não atrapalhe suas medições.

(11.3) Em um comprimento de onda de $68\,cm$, foi detectado que Júpiter tinha uma temperatura de brilho $500\,K$. **Calcule que temperatura é essa e responda: é possível que essa temperatura seja por causa somente do aquecimento solar?**

12) SOAR

Parabéns! Você obteve tempo de telescópio para observar no telescópio SOAR, nos Andes Chilenos.

As coordenadas geográficas do observatório são: Latitude: $-30°14'16''$ e Longitude: $\lambda = -70°44'01''$.

As observações serão realizadas em 22 de Setembro de 2019. Seu programa de pesquisa prevê a observação de pelo menos dois objetos, como mostra a tabela a seguir.

Objeto	$\alpha(2000.0)$	$\delta(2000.0)$	$V\ mag$	Tipo
Messier 74	$01h36min42sec$	$+15°47'01''$	$+10,0$	Galáxia espiral
δ Tucanae	$22h27min20sec$	$-64°57'59''$	$+4,48$	Estrela binária

O SOAR possui um espelho primário de $4{,}10\ m$ e razão focal $f/9{,}83$ em seu foco Cassegrain. Você utilizará o SOAR optical Imager (SOI), uma câmera CCD de 4096×4096 pixels de $15 \times 15\ \mu m$.

(a) Qual será a Hora Sideral Local em que acontecerá o pôr-do-Sol no dia da observação?

(b) Calcule o ângulo horário dos dois objetos da sua lista no instante do pôr-do-Sol. Eles já estarão sobre o horizonte nesse instante?

(c) No SOAR, as observações só devem ser realizadas após o crepúsculo astronômico, definido como o instante em que o centro do disco solar fica a 18° abaixo do horizonte. **A partir de que Hora Sideral Local as observações poderão ser realizadas?**

(d) Qual o melhor horário (na hora local) para observar cada um desses objetos?

(e) Qual o comprimento focal do telescópio no foco Cassegrain?

(f) Qual a escalda de placa (em $''/mm$) nesse foco?

(g) Qual a escala de pixel (em $''/pixel$)?

(h) A separação angular das componentes de $\delta\ Tuc$ é de $7{,}0''$. **A quantos pixels do SOI isso corresponde?**

(i) Qual o campo da câmera, em minutos de arco?

(j) O diâmetro aparente de Messier 74 é de aproximadamente $10'$. **É possível enquadrar toda a galáxia no campo do SOI?**

Questões Longas

13) Formação de Estrelas

Nesse problema iremos estudar o processo de formação de estrelas em nuvens de hidrogênio molecular. Aqui iremos assumir que a nuvem é sustentada principalmente pelo balanço de sua energia gravitacional interna e a energia térmica do gás contido nela. Dependendo do estado deste objeto, ele será capaz, ou não, de formar estrelas. Nos próximos itens, iremos descobrir como tal fenômeno depende das propriedades intrínsecas da nuvem.

Primeiramente, por simplificação, considere uma nuvem que gire em torno de seu próprio eixo. Suponha que este objeto possui temperatura T e as partículas do gás possuem massa m.

(a) Explique quais são as condições necessárias para que uma nuvem de gás molecular forme estrelas. Para isso, utilize-se somente de argumentos qualitativos.

(b) A partir do teorema virial, encontre uma relação para M/R, na qual M é a massa total da nuvem e R é o seu raio.

Dica: Energia gravitacional interna: $E_{p_i} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$.

(c) Supondo que essa nuvem possui densidade ρ, **determine qual seria o raio mínimo, R_j, para a qual essa nuvem forma estrelas.** Essa expressão é conhecida como o Comprimento de Jeans.

(d) Além disso, qual é a mínima massa da nuvem, M_j, para que ela consiga formar estrelas? Esse valor é conhecido como a Massa de Jeans.

(e) Encontre o Comprimento e a Massa de Jeans de uma nuvem de gás molecular com 10^5 átomos de Hidrogênio por centímetro cúbico e temperatura de 50 K.

Uma vez que a nuvem começa a colapsar, é interessante estimar em quanto tempo essa contração será efetivamente realizada, conhecido como tempo de queda livre. Em primeira aproximação, considere que a densidade da nuvem se mantém constante durante o processo.

(f) Encontre uma expressão para o tempo de queda livre de uma nuvem de densidade de massa ρ.

(g) Calcule o tempo de queda livre para uma nuvem que nem a do item (e).

Agora suponha que você esteja analisando uma nuvem que possui velocidade angular ω_o. Como ela é considerada uma esfera, seu momento de inércia pode ser escrito como $I = \frac{2}{5}Mr^2$. Já que ela está em rotação, o seu movimento de contração será afetado pelo momento angular, que deverá ser conservado nesse processo.

A partir daqui, todos os valores com índice "o" referem-se à situação inicial da nuvem.

(h) Encontre a razão $\boldsymbol{\omega/\omega_o}$, em função de r_o e r.

(i) Para analisar que efeito a rotação tem no colapso**, encontre a aceleração $\boldsymbol{a(r)}$,** em função de $G, M(r), \omega$ e r. Note que a aceleração $a(r)$ está associada com a mudança de raio do sistema.

(j) Perceba que existirá um momento em que $a(r) \to 0$. **Determine o raio $\boldsymbol{r}$ para que isso aconteça em função da velocidade de rotação $\boldsymbol{v_o, r_o, M(r)}$ e $\boldsymbol{G}$.**

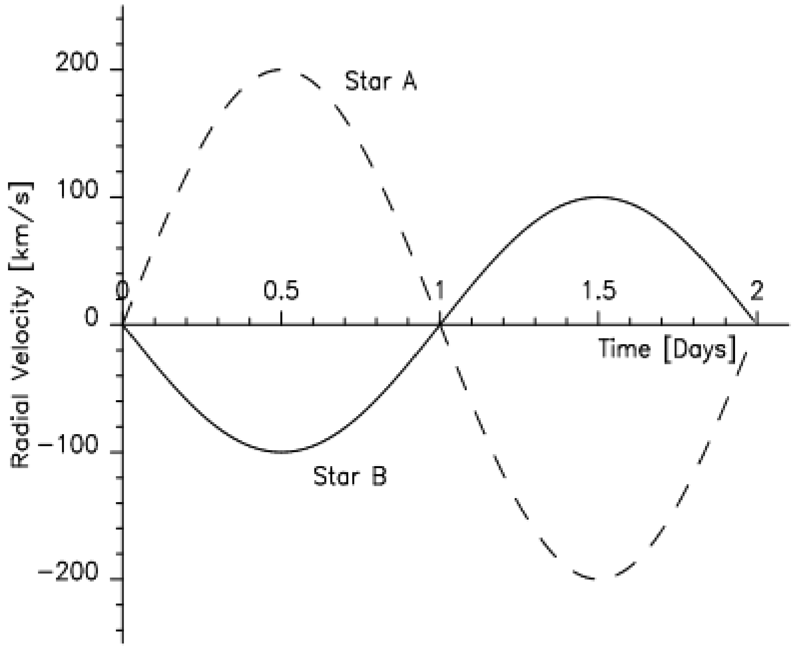
(k) Para $\frac{r}{r_o} = 0{,}6$ e $v_o = 1\ km/s$, **calcule $\boldsymbol{M(r)}$ para uma estrela que nem a do item (e).**

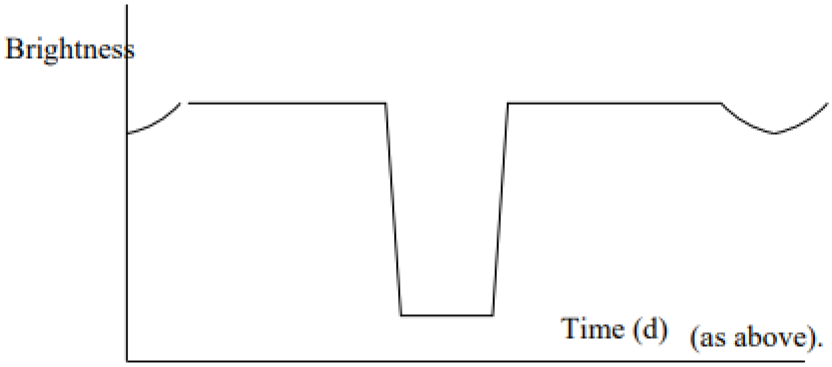
(l) Como o valor da massa encontrada no item (e) se compara com a da massa calculada em (k)?

14) Sistemas binários

Esse problema é designado para que possamos compreender como as informações que um sistema binário nos dá são interpretadas. Sistemas binários, além de ser interessantes por si, são o modo mais direto de medir massas estelares (e também uma boa forma de medir seus raios). Lembre-se: nós estamos lidando com algo que parece um ponto no céu!

(a) Observe os diagramas da página seguinte. Eles mostram a curva de luz e a velocidade radial de um sistema binário espectroscópico, na qual as duas estrelas são visíveis no espectro. **Determine, a partir da análise das curvas de velocidade, quando cada estrela está na frente ou atrás**; então responda: **Qual estrela é mais brilhante? Que estrela tem o maior raio?**





(b) Agora iremos encontrar modos de determinar a massa dessas estrelas. Suponha que você tem duas estrelas, que iremos chamar de 1 e 2, orbitando um centro de massa em comum. Por simplicidade, assuma que suas órbitas são circulares. Sabe-se que a estrela 1 orbita o centro de massa a uma distância r_1 e a estrela 2 a uma distância r_2. Além disso, elas possuem massa m_1 e m_2 e, ao ligar seus centros, elas estão a uma distância a.

(b.1) Qual é a força resultante centrípeta para que a estrela 1 fique em órbita, em termos de m_1, r_1 e sua velocidade orbital v_1?

(b.2) Qual é a força mútua de atração gravitacional entre as duas estrelas?

(b.3) Com as informações obtidas até então, prove que:

$$a^3\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = G(m_1+m_2);$$

(c) Defina K_1 e K_2 as amplitudes de velocidade radial das duas estrelas para as estrelas A e B do diagrama. Suponha que as órbitas, embora sejam circulares, estão inclinadas em relação à linha de visada por um ângulo i.

(c.1) Mostre que a seguinte relação é válida:

$$2\pi r_1 seni = K_1 P$$

(c.2) A partir da equação acima, e da análoga em relação à estrela 2, **mostre que:**

$$a = \frac{(K_1 + K_2)P}{2\pi seni}$$

(c.3) Finalmente mostre que a Terceira Lei de Kepler pode ser reescrita como:

$$\left[\frac{(K_1 + K_2)}{seni}\right]^3 P = 2\pi G(m_1 + m_2)$$

(d) Argumente que, das informações fornecidas no diagrama, a inclinação do sistema não pode ser muito menor que 90 graus. Encontre $m_1 + m_2$ em massas solares.

(e) A partir das amplitudes de velocidades dadas no diagrama, **encontre a razão $\frac{m_1}{m_2}$.**

(f) Dos resultados encontrados em (d) e (e), **encontre as massas m_1 e m_2 separadamente.**