



SIMULADO 01 - PROVA TEÓRICA
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA
XIII IOAA E XI OLAA DE 2019

Nome: _____

Nota: _____

PROVA TEÓRICA

Instruções

- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis;
- A prova tem duração total de **4 horas**;
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões;
- Boa sorte!

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raio	$R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26} \text{ W}$
Magnitude absoluta visual	$M_{V_{\odot}} = 4,82$
Magnitude aparente visual	$m_{\odot} = -26,72$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778 \text{ K}$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220 \text{ km s}^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8,5 \text{ kpc}$
A Terra	
Massa	$M_{\oplus} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Raio	$R_{\oplus} = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_{\oplus} = 9,81 \text{ m/s}^2$
Albedo	$\alpha_{\oplus} = 0,39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23^{\circ}27'$
Duração do Ano Tropical	365,2422 <i>dias solares médios</i>
Duração do Ano Sideral	365,2564 <i>dias solares médios</i>
A Lua	
Massa	$M_L = 7,44 \times 10^{22} \text{ kg}$
Raio	$R_L = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$
Distância Terra-Lua	$d_L = 3,78 \times 10^8 \text{ m}$
Período sinódico	$P_{SL} = 29,5306 \text{ dias}$
Albedo	$\alpha_L = 0,14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_L = 5,14^{\circ}$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1,496 \times 10^{11} \text{ m}$
1 Parsec (pc)	$3,0856 \times 10^{16} \text{ m}$
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante de Hubble	$H_0 = 67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do próton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Questões curtas

1) O limite de Eddington é a máxima luminosidade que um corpo pode alcançar quando existe um balanço entre a força de radiação e a gravitacional. **Qual é o limite de Eddington para uma estrela que nem o Sol, com $\kappa = 0,02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$?**

2) Um certo telescópio, que trabalha entre $0,35 \text{ GHz}$ e $0,70 \text{ GHz}$, só consegue observar objetos com densidade de fluxo menor do que $S_\nu = 2,5 \text{ mJy}$. Um grupo de astrônomos, com o objetivo de estudar galáxias distantes, precisa saber até qual redshift eles poderiam fazer suas observações. **Qual é o redshift máximo para a qual é possível realizar observações com este telescópio?**

Nota: $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$

Frequência de repouso dos átomos estudados = $0,55 \text{ GHz}$

3) Um satélite possui uma órbita inclinada em relação ao equador de $8,80^\circ$, e órbita a terra com uma distância de $2,35 \cdot 10^5 \text{ km}$. **Qual vai ser a maior distância zenital que um observador em Toronto ($\varphi = 43^\circ 42' \text{ N}$) vai ver o satélite?**

4) Considere o sistema binário HD169414, onde há transferência de massa da estrela com massa m_1 para a estrela de massa m_2 , orbitando com velocidade angular ω . Após um período Δt , a estrela 1 perde Δm , causando uma variação na velocidade angular do sistema. **Encontre a quantidade $\frac{\Delta \omega}{\Delta D}$** , sabendo que a distância inicial era D .

Caso necessário, use que $(1 + x)^n = 1 + nx$, para $x \ll 1$.

5) Um próton com energia cinética de 1 GeV esta se propagando da superfície do Sol em direção a Terra. Desprezando o campo magnético do Sol, **calcule o tempo de viagem deste próton como visto da Terra.**

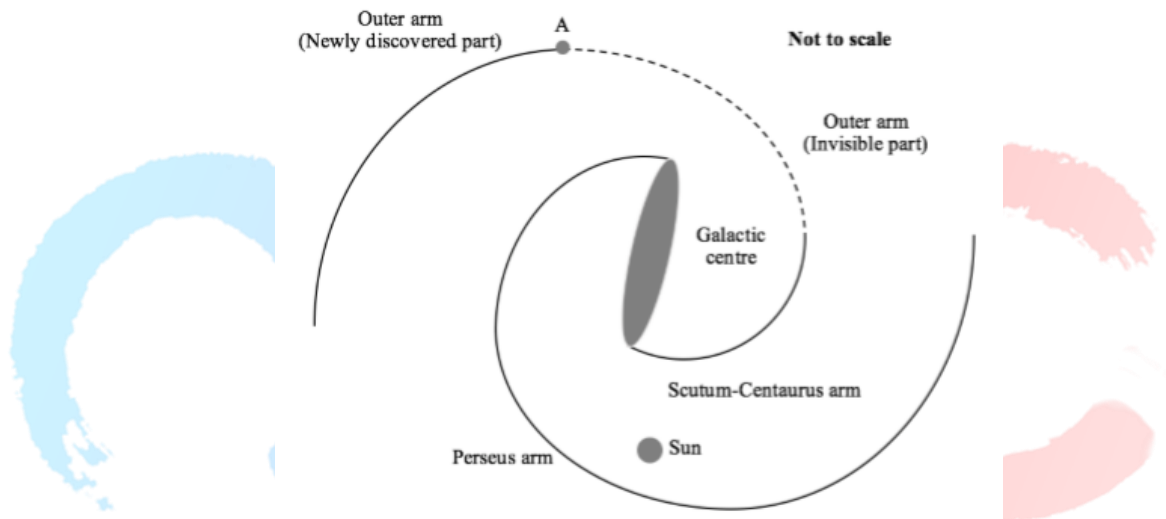
6) Assuma que o universo pode ser descrito por um parâmetro de densidade $\Omega_0 = 1$, que não exista energia escura e que a temperatura atual é $2,73 \text{ K}$. Sabendo que a temperatura é inversamente proporcional ao fator de escala, **calcule em quanto tempo o universo irá resfriar em $0,1 \text{ K}$.**

7) Dois amigos queriam medir a altura de uma montanha próximo à vila deles ($\varphi = 40^\circ \text{ N}$). Um dos amigos subiu até o topo da montanha e combinou com seu colega de enviar um sinal de luz para a vila assim que visse o nascer do Sol. Em 21 de Março, quando eles fizeram esse experimento, o colega da montanha enviou o sinal 3,62 minutos antes do colega do vilarejo conseguir ver o Sol. **Estime a altura da montanha e a distância do horizonte para a pessoa do monte.** Para isto, ignore a refração atmosférica.

8) Em 2011, Dame e Thaddeus descobriram uma nova parte do braço exterior da Via Láctea, estudando a linha de emissão de CO com o telescópio de 1,2 m do CfA. Eles observaram que a distribuição de CO se inicia longitude galáctica $\ell=13,25^\circ$, onde sua velocidade radial é de $20,9 \text{ km.s}^{-1}$ se afastando do Sol. Considere que a curva de rotação galáctica é plana após 5 kpc do Centro Galáctico. A distância entre o Sol e o Centro Galáctico é de 8,5 kpc. A velocidade do Sol ao redor do Centro Galáctico é de 220 km.s^{-1} .

a) Encontre a distância do início do braço (ponto A) ao Centro Galáctico.

b) Encontre a distância do início do braço (ponto A) ao Sol.



Questões médias

1) O objetivo do Observador de Transientes Ópticos de Ondas Gravitacionais (GOTO, em inglês) é executar buscas por contrapartidas ópticas de fontes de Ondas Gravitacionais (GW) em até uma hora após a detecção pelos experimentos LIGO e VIRGO. A busca precisa cobrir uma grande área do céu em um tempo curto para vasculhar todas as possíveis regiões cobertas pelos experimentos de GW, antes que o sinal óptico da fonte desapareça. A rede de telescópios GOTO é composta por 4 telescópios refletores idênticos, cada um com 40 cm de abertura e razão focal $f/2,5$, que trabalham em conjunto para imagear regiões amplas do céu. Para simplificar, considere que os campos de visão (FoV) dos telescópios não se sobrepõem.

a) Calcule o tamanho angular projetado por mm no plano focal de cada telescópio, i.e. a escala de placa.

b) Se a magnitude de ponto zero, (i.e. a magnitude para qual a taxa de contagens do detector é de 1 contagem por segundo) do sistema de telescópios é de 18,5 mag, calcule o tempo mínimo para que se atinja magnitude 21 mag para uma fonte pontual com Razão Sinal-Ruído (SNR) = 5. Considere que o ruído é dominado pelo Ruído de Leitura (RON) em 10 contagens/pixel, e pelo ruído térmico do CCD (DN) a uma taxa de 1 contagem/pixel/minuto. Os CCDs utilizados no GOTO possuem pixels de 6 microns de lado e ganho (fator de conversão entre os fotoelétrons e as contagens) de 1. O seeing típico no observatório é 1,0 segundo de arco.

A razão sinal-ruído é definida por:

$$SNR \equiv \frac{\text{Total de contagens da fonte}}{\sqrt{\sum_i \text{Ruído}^2}} = \frac{\text{Total de contagens da fonte}}{\sqrt{\sigma_{RON}^2 + \sigma_{DN}^2 + \dots}}$$

$$\sigma_{RON} = \sqrt{N_{pix} RON^2}, \quad \sigma_{DN} = \sqrt{N_{pix} \cdot DN \cdot t}$$

c) Normalmente, quando o tempo de exposição é longo e as contagens da fonte são altas, o Ruído de Poisson da fonte também é significativo. **Determine a relação entre SNR e tempo de exposição no caso em que o ruído é dominado pelo Ruído de Poisson da fonte. Calcule novamente o tempo de exposição mínimo para atingir magnitude 21 mag com SNR=5**, como foi feito no item anterior, se também considerarmos o Ruído de Poisson. O Ruído de Poisson da fonte é dado por $\sigma_{fonte} = \sqrt{\text{Contagens da fonte}}$

Obs: na prática, o fundo do céu também pode ser uma fonte importante de Ruído de Poisson, mas neste exercício pode ser desprezado.

d) A incerteza de localização típica de um detector de GW é de cerca de 100 graus quadrados. Gostaríamos de cobrir toda essa área em no máximo 1 hora após a detecção da GW. Estime o menor comprimento possível (em pixels) do lado de um CCD quadrado, a ser instalado em cada um dos telescópios, para que isso aconteça. Considere que os tempos de leitura dos CCDs e de apontamento dos telescópios entre um campo e outro são desprezíveis

2) Um observador tenta determinar o valor aproximado da excentricidade orbital de um satélite artificial. No momento do apogeu, verificou-se que o satélite move-se de um ângulo $\Delta\theta_1 = 2'44''$ em um curto intervalo de tempo. Foi verificado também que, quando o raio vetor que liga a Terra ao satélite é perpendicular ao eixo maior da órbita (isto é, a anomalia verdadeira é 90°), o satélite move-se de um ângulo $\Delta\theta_2 = 21'17''$ no mesmo intervalo de tempo. **Encontre o valor aproximado da excentricidade da órbita do satélite (considere que o observador está localizado no centro da Terra).**

3) Um astronauta está fazendo estudos da fotosfera solar em um satélite em órbita heliocêntrica muito próxima da superfície do Sol. Ao terminar suas análises, ele decide estudar o Asteroide BMVF2001, que passará muito próximo de seu periélio em algum tempo. Sabe-se que a diferença de magnitude aparente do Sol visto do asteroide entre o periélio e o afélio é de $\Delta m = -2,52 \text{ mag}$.

a) Com base nas informações acima, **Qual será a diferença de magnitude visual do Asteroide, visto pelo astronauta?**

b) Para estudar o modo como se comportava a radiação proveniente do asteroide, o astronauta decidiu observá-lo na frequência da luz visível ($\lambda_v = 550 \text{ nm}$), enquanto ele estava no afélio. Porém, uma turbulência na estação espacial fez com que o filtro caísse no chão e quebrasse. Por sorte, ele já tinha anotado quanto valia a densidade de fluxo para aquela posição. Agora, com o asteroide no periélio, ele deseja medir esse mesmo valor de densidade de fluxo. **Em qual frequência ele deveria fazer a observação para obter esse resultado?** Assuma que o corpo se comporte como um corpo negro.

Dados: Temperatura do cometa no afélio = 200 K

Temperatura do cometa no periélio = 357 K

4) Campos magnéticos são muito importantes para a física de estrelas e manchas solares. Como uma aproximação, iremos usar como modelo, que a fotosfera do Sol é constituída basicamente por plasma, que pode ser tratado como um gás ideal de somente um componente, e possui campo magnético \mathbf{B} , que é

associado a uma pressão magnética $p_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Esta se comporta como qualquer outra pressão física, exceto que ela é baseada no campo magnético ao invés da energia cinética das partículas. Assuma que a densidade de partículas da fotosfera é constante em todos os lugares da fotosfera, porém o campo magnético dentro da mancha ($B_{in} = 0.1 T$) é bem mais forte do que o de fora ($B_{out} = 5 * 10^{-3} T$). Do espectro de corpo negro, a temperatura da mancha é de 4000K, enquanto que a de fora é 6000K (que é a razão da mancha parecer escura). Para que a mancha seja estável, é necessário que haja um equilíbrio entre as pressões internas e externas.

a) Estime a densidade de partículas de plasma na fotosfera solar.

b) Compare sua resposta com uma estimativa da densidade de partículas da atmosfera terrestre, na superfície.



Questões longas

1) Pulsações em CW Virginis

Na teoria de pulsação de estrelas, os processos de expansão e compressão da estrela são considerados adiabáticos, permitindo que seja feita uma relação entre a temperatura e a pressão, como segue a equação abaixo.

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte.$$

Além disso, é possível estabelecer uma dependência entre o período radial das oscilações, denominado na questão por P, e a densidade média da estrela, seguindo:

$$P\sqrt{\bar{\rho}} = \frac{1,19 \cdot 10^4}{\Omega} \left(s * g^{\frac{1}{2}} * cm^{\frac{3}{2}} \right)$$

Na qual o parâmetro $\Omega = 1$ para estrelas homogêneas e $\Omega > 1$ para outros modelos para estruturas de estrelas. Nessa questão iremos assumir que a massa da estrela se encontra igualmente distribuída ao longo de seu corpo, aproximadamente esférico e que ela seja composta basicamente por gás hidrogênio não degenerado.

a) Um grupo de astrônomos do Pulkovo Observatory, ao observar a estrela CW Virginis, na direção da constelação da Virgem, percebeu que havia uma variação no seu brilho com período de 3,710 dias. Outro grupo, no Jodrell Bank Observatory, disse que na verdade o período era de 3,722 dias. No entanto, o valor da densidade média utilizado pelos dois observatórios era o mesmo, com $\bar{\rho} = 1,369 \text{ kg/m}^3$. Com base nessas informações, **defina os modelos estelares utilizados pelos dois observatórios e diga qual mais se aproxima da realidade.**

b) Ao analisar os espectros de emissão, constatou-se que a temperatura da estrela varia de 9290K até 8910K, desde o momento de maior contração até o momento de maior expansão. Sendo R_1 o raio da estrela comprimida e R_2 o raio da estrela expandida, **determine a razão (R_1/R_2).**

e) A fim de estudar a variação de brilho da estrela, é necessário analisar sua magnitude aparente. **Calcule a variação de magnitude aparente da estrela, visto da Terra.**

d) No momento de menor brilho, a estrela emite 25 vezes mais energia por segundo do que o Sol. **Determine os valores de R_1 e R_2 .**

e) Em primeira aproximação, é possível dizer que a velocidade radial é constante ao longo do processo. **Qual a velocidade de compressão da estrela?**

f) A partir de análises da velocidade de rotação de CW Virginis, concluiu-se que sua idade era de 435 milhões de anos e que maior parte da sua energia vinha da reação abaixo.



Assuma que 20% da massa da estrela contribuam para essa reação. **Calcule a massa total da estrela.**

g) Com isso, **determine a razão $\rho_2/\bar{\rho}$. Qual deve ser o valor de Ω_1 para o caso que ρ_2 seja a densidade média da estrela e o período de pulsação se mantenha constante.**

2) Quem consegue escapar de um buraco negro?

Nessa questão iremos estudar a física de um buraco negro e entender seus limites (ao menos alguns deles). Tome um fóton viajando para longe de um buraco negro, de uma posição r_1 até outra r_2 . Em primeira aproximação, entende-se que o momento linear do fóton pode ser escrito da forma $p = E/c$ e que a energia mecânica possa ser conservada.

a) Para o percurso descrito acima, com pequenos deslocamentos de comprimento de onda, **mostre a relação abaixo:**

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\left[1 - \frac{GM}{r_2 c^2}\right]}{\left[1 - \frac{GM}{r_1 c^2}\right]}$$

b) Considere que um fóton, produzido por uma estrela de raio R , seja expelido de sua fotosfera, chegando a uma posição infinitamente distante dela. **Determine uma equação para a razão $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$, o conhecido Redshift Gravitacional.** O comprimento de onda inicial é λ_0 .

c) **Determine o Redshift Gravitacional para uma estrela que nem o Sol. Compare com o Redshift causado por Sirius ($R = 1,71R_\odot$ e $M = 2,06M_\odot$).**

Na realidade, as fórmulas descritas acima são válidas apenas para pequenas massas e deslocamentos de onda. A fórmula geral é escrita como:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_2 c^2}}{1 - \frac{2GM}{r_1 c^2}}}$$

Com as devidas aproximações, voltamos à equação do item (a)!

d) Baseando-se nas informações acima, um astronauta muito aventureiro decidiu fazer um experimento ousado para verificar a veracidade das equações acima, utilizando-se de apenas um relógio. Ao fazer uma órbita de transferência de Hohmann entre a Terra e Mercúrio, ele anotou que a uma distância $d = 0,900000 U.A.$ esse relógio fazia uma oscilação a cada 3,000000 segundos. **Qual seria a diferença de período do relógio, em segundos, para quando ele estiver a $d' = 0,307000 U.A.$?**

e) Algum tempo depois de Einstein publicar seu trabalho da teoria geral da relatividade, Karl Schwarzschild conseguiu uma solução para a curvatura do espaço tempo ao redor de uma massa pontual. Ele encontrou um raio para a qual uma singularidade ocorre que é, basicamente, o ponto em que uma quantidade se torna infinita. Ou seja, existe um ponto de partida que faz impossível ser detectado λ_2 , que é conhecido como o raio de Schwarzschild. **Encontre, a partir das equações fornecidas, uma expressão para este raio. O que ele significa fisicamente?**

f) A partir da equação encontrada, **mostre que o Raio de Schwarzschild pode ser escrito como uma função linear, na forma**

$$r_S = a\mu, \text{ onde } \mu \text{ vale } \frac{M}{M_\odot}$$

Qual o valor de a ?

Para efeitos de informação, na astronomia, chama-se toda variação de força gravitacional como efeito de maré. Perto de um buraco negro, é de se esperar que essa variação seja muito grande, mesmo com pequenas variações de distância. Nos próximos itens, iremos estudar essa variação, lembrando que é possível escrever a gravidade como função da distância.

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

Diferenciando a equação acima, encontra-se:

$$\frac{dg(r)}{dr} = -\frac{2GM}{r^3}$$

Que representa a taxa de variação da gravidade para uma dada variação em distância, se relacionando com o efeito de maré.

g) Com as informações acima, um astronauta ousado, porém não muito inteligente, quis descobrir na pele esse efeito e pulou para perto de um buraco negro de massa M_{\odot} . **Encontre a variação Δg da aceleração gravitacional entre a cabeça e o pé do astronauta ousado.** Note que a altura do astronauta era de 2 metros (sim, ele era bem alto 😊).

h) Encontre o valor $\frac{\Delta g}{g_{\oplus}}$, na qual g_{\oplus} é aceleração gravitacional na superfície terrestre. **Disserte sobre o resultado encontrado.**

