SIMULADO NOIC 03 – PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA E XI OLAA DE 2019

Nome: Nota:

PROVA TEÓRICA

Instruções

- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis, mas as respostas devem estar a caneta;
- A prova tem duração total de **4 horas e 30 minutos;**
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões.

Distribuição de pontos para esse teste

Número da Questão	Pontuação
1	10
2	10
3	15
4	15
5	20
6	20
7	20
8	25
9	25
10	25
11	30
12	30
13	35
14	35
15	35
16	45
17	50
18	55
Total	500

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6,96 \times 10^{8}\ m$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26}\ W$
Magnitude absoluta visual	$M_{V_{\odot}} = 4,82$
Magnitude aparente visual	$m_{\odot} = -26,72$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778\ K$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220\ km\ s^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8,5\ kpc$
A Terra	
Massa	$M_{\oplus} = 5,97 \times 10^{24}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6,37 \times 10^{6}\ m$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_{\oplus} = 9,81\ m/s^2$
Albedo	$\alpha_{\oplus} = 0,39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23°27'$
Duração do Ano Tropical	365,2422 *dias solares médios*
Duração do Ano Sideral	365,2564 *dias solares médios*
A Lua	
Massa	$M_L = 7,44 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$R_L = 1,74 \times 10^{6}\ m$
Distância Terra-Lua	$d_L = 3,78 \times 10^{8}\ m$
Período sinódico	$P_{S_L} = 29,5306\ dias$
Albedo	$\alpha_L = 0,14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_L = 5,14°$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1,496 \times 10^{11}\ m$
1 Parsec (pc)	$3,0856 \times 10^{16}\ m$
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34}\ J\ s$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Constante de Hubble	$H_o = 67,8\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2,998 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26}\ W\ m^{-2}\ Hz^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2,898 \times 10^{-3}\ m\ K$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do próton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27}\ kg$

Questões Curtas

1) Hipergigante amarela (10 pontos)

Uma hipergigante amarela localizada a $1{,}04\,kpc$ do Sol tem magnitude aparente visual de 1,49 e excesso de cor em $B - V$ igual a 0,29. A partir dessas informações, calcule a magnitude absoluta visual dessa estrela.

2) Método de deriva (10 pontos)

Através da medição do tempo de passagem de uma estrela pelo campo de visão da ocular é possível calcular o ângulo de visão de qualquer combinação de ocular e telescópio. Este método é conhecido como o método de deriva (*drift method*).

Suponha que você queira utilizar este método para saber qual é o campo de visão (FOV) da ocular do seu telescópio. Você apontou seu telescópio para Vega (α Lyr., AR: 18,5h, Dec: + 39°), desligou o motor de acompanhamento e mediu o tempo de deriva, t = 5,3 minutos, que Vega demorou para cruzar o diâmetro total do FOV.

(a) A partir das informações acima, **calcule o campo de visão deste telescópio em minutos de arco.**

(b) Caso seja usado uma Lente Barlow de $\mathbf{2,5X}$, **qual será o novo campo de visão?**

3) Mais um planeta de nome estranho (15 pontos)

Suponha a existência do planeta $TFSNS2019$, que está orbitando a estrela HD 225150. Essa estrela possui temperatura de $T_* = 10^4\ K$ e densidade média de $\bar{\rho} = 520\frac{kg}{m^3}$. Assuma que o planeta seja de rápida rotação, que não possua atmosfera e que seu albedo, A seja igual ao da Lua. **Qual é o período orbital do planeta se sua temperatura superficial é igual à temperatura lunar?** Dado: a temperatura média da Lua é de 245 K.

4) Apex e anti-apex (15 pontos)

O movimento da Terra é responsável pela chamada anisotropia de dipolo como relação à Radiação Cósmica de Fundo (RFC). Devido ao efeito Doppler, a radiação dessa temperatura é ligeiramente mais quente na direção do movimento da Terra (chamado apex). Medidas do satélite COBE, e posteriormente do satélite Planck, mostraram que a diferença de temperaturas na direção do apex e anti-apex é de $\Delta T = 1{,}08 \times 10^{-2}\ K$. Dessas informações, **Calcule a velocidade que a Terra está se movendo com relação à RCF.** Nota: $T_{RCF} = 2{,}73\ K$.

5) A Grande Nuvem de Magalhães em Phuket (20 pontos)

As coordenadas da Grande Nuvem de Magalhães (LMC) são $\alpha = 5h\,24min$ e $\delta = -70°\,00'$. A latitude e longitude de Phuket são $7°53'\,N$ e $98°24'\,E$, respectivamente. **Em que data a LMC culmina às 21h em um determinado ano em Phuket?** O Tempo Sideral em Greenwich (GST) às 00h de 1º de Janeiro é cerca de 6h 43min. Phuket está na zona horária UT+7.

6) Transferência de Hohmann (20 pontos)

Suponha que uma nave espacial está em órbita terrestre de baixa altitude, de $h = 400\ km$. A nave faz uma manobra orbital de transferência de Marte com a intenção de estudar o padrão de paralaxes estelares visto do planeta.

(a) Qual incremento de velocidade (Δv_1) é necessário para que essa manobra seja possível?

(b) O segundo estágio desse procedimento é garantir que a nave permaneça em órbita circular ao redor do Sol. **Qual é o incremento Δv_2 necessário para que isso aconteça?**

(c) Ao entrar na órbita de Marte, a nave espacial observa que a posição de uma estrela A varia de 613,7 mas devido ao seu movimento ao redor do Sol, em um período marciano. **Determine a distância dessa estrela.**

7) Onde está a massa do Universo? (20 pontos)

A densidade crítica do Universo é a densidade na qual a atração gravitacional de matéria é equilibrada com sua expansão de modo que seja impossível que alguma delas consiga prevalecer. Se a densidade do Universo é menor do que essa densidade crítica, a expansão irá continuar indefinidamente. Por outro lado, se a densidade fosse maior, o Universo iria colapsar em torno de si.

(a) A densidade crítica do Universo é dada por:

$$\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G}$$

É possível chegar nessa relação através da mecânica clássica, assumindo que ele tem tamanho infinito e densidade uniforme, expandindo com velocidade constante. Dessas informações, **mostre a equação acima.**

(b) A densidade de Matéria bariônica no Universo é determinada para ser da ordem de $3{,}80 \times 10^{-28}\ kg\ m^{-3}$. Com isso, **dê uma justificativa para a existência de matéria escura.**

8) Densidade de fluxo de Vênus (25 pontos)

Considere que o Sol e Vênus se comportam como corpos negros perfeitos. Vênus, que está a uma distância orbital de 0,72 UA, possui temperatura T_V, e está em equilíbrio térmico (isto é, irradia a mesma quantidade de energia que recebe do Sol). Suponha que, na sua maior aproximação da Terra, o diâmetro angular de Vênus é de 66 segundos de arco. **Qual a densidade de fluxo de Vênus, no momento de sua maior aproximação da Terra**, quando observado com um rádio telescópio na frequência de 3 GHz?

9) Causalidade no Universo primitivo (25 pontos)

Dois objetos separados por uma distância maior do que a que a luz consegue percorrer em um tempo igual a idade do Universo não podem afetar, ou causar eventos um no outro. Isso é chamado de o *problema da causalidade*.

Sabe-se que a idade do Universo na época da Recombinação era de 10^5 $anos$, e a idade atual é $1{,}5 \times 10^{10}$ $anos$. Além disso, a temperatura atual é de 3 K e na época da recombinação era de 3000 K. **Encontre a máxima separação angular atual entre dois pontos para que eles estejam conectados pela causalidade.**

Dica: o fator de escala $a(t)$ é proporcional ao inverso da temperatura $T(t)$.

10) Supernova 1987A (25 pontos)

A Supernova SN 1987A atingiu seu maior brilho com magnitude aparente de +3 em 15 de maio de 1987, e em seguida foi ficando mais fraca até ficar invisível a olho nu em 4 de fevereiro de 1988. Considere que seu brilho B variou com o tempo t como em um decaimento exponencial da forma $B = B_o e^{-\frac{t}{\tau}}$, onde B_o e τ são constantes. A magnitude aparente limite do olho humano nu é +6.

(a) Determine o valor de τ, em dias.

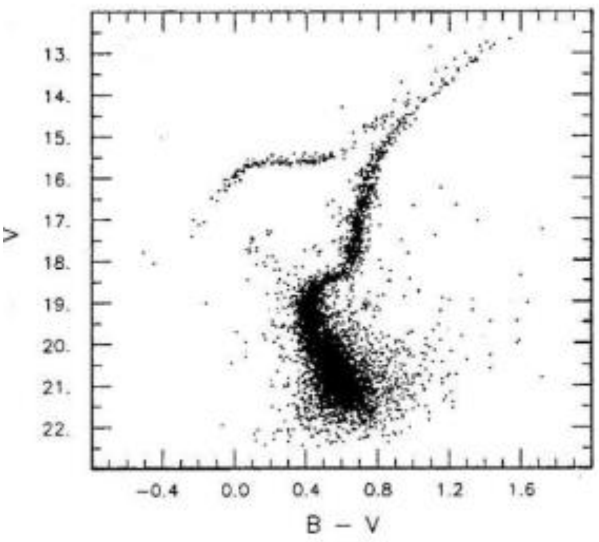
(b) Encontre o último dia em que um observador ainda poderia ver a supernova, caso estivesse utilizando um telescópio de $6''$ $(15{,}24\ cm)$ com eficiência de transmissão $T = 70\%$. Considere que o diâmetro médio da pupila humana é de 0,6 cm.

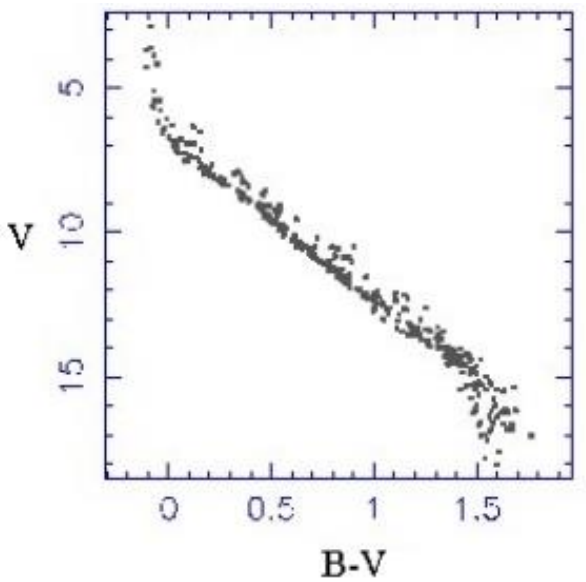
Questões Médias

11) Distâncias estelares de aglomerados (30 pontos)

A seguir, temos dois diagramas HR, um para o aglomerado aberto M44, mais conhecido como Plêiades, e outro para o aglomerado globular M3.

______________________________ ______________________





(a) Infelizmente o Astrônomo árabe Al-saidis derrubou café na identificação das duas figuras e, portanto, ele não sabe mais qual gráfico pertence aos aglomerados citados anteriormente. Você, auxiliar de Al-saidis, ao estudar novamente os dois gráficos, consegue reverter essa situação. **Escreva nos espaços acima dos gráficos qual aglomerado corresponde à figura abaixo da linha.**

(b) Explique o motivo de os dois diagramas HR serem tão diferentes.

(c) Use as duas figuras acima para determinar a razão entre as distâncias dos aglomerados ao Sol.

(d) Se tomarmos a magnitude absoluta de uma estrela de cor $B - V = 0$ sendo $M_V = 0$, **determine a distância das Plêiades até nós.**

(e) Determine por qual fator as estrelas do topo do diagrama HR de M3 são mais intrinsecamente luminosas dos que as de baixo.

12) Equação do tempo (30 pontos)

A famosa equação do tempo $\eta = \eta(t)$ é a diferença entre o tempo solar médio, $\boldsymbol{t}$, e o tempo solar verdadeiro, $\boldsymbol{t}_{\odot}$. Matematicamente falando:

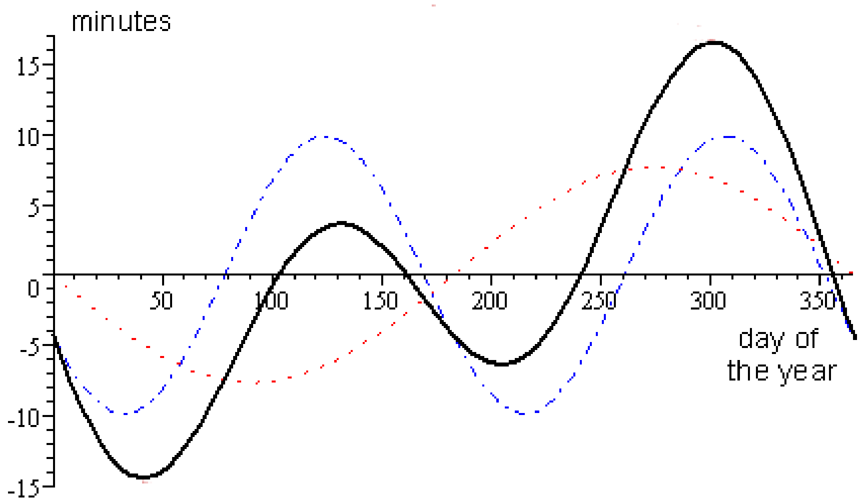
$$\eta = t - t_{\odot}$$

Em função da longitude média solar, a função η, em minutos, pode ser escrita como:

$$\eta(\bar{\lambda}) = 9{,}87 sen(2\bar{\lambda}°) - 7{,}67 sen(\bar{\lambda}° + 78{,}7°)$$

Essa equação consegue mesclar os dois efeitos que causam essa diferença durante o ano. Observe que o fator de $9{,}87 sen(2\bar{\lambda}°)$ deve-se à órbita da Terra enquanto que o fator de $7{,}67 sen(\bar{\lambda}° + 78{,}7°)$ é causado pelo seu eixo de rotação.

Além disso, segue abaixo um gráfico da equação do tempo em função do dia do ano. Assuma que o dia 1 é o dia 1 de Janeiro.



(a) Correlacione as curvas do gráfico com os efeitos citados no texto e a equação do tempo.

(b) Derive uma expressão $\boldsymbol{\eta(D)}$, como função do número de dias ao longo do ano.

(c) Quando será o dia de maior duração do ano? E o de menor?

(d) Quais são os valores de máximo e mínimo de $\boldsymbol{\eta(D)}$?

(e) Por qual valor o dia mais longo é maior que o dia mais curto do ano?

(f) Para essas situações, **calcule quando será a passagem meridiana do Sol em Melbourne ($\lambda_M = 145°$) no AEDT (*Australian Eastern Daylight Time*).**

13) Movimento próprio (35 pontos)

As imagens abaixo representam o mesmo campo estelar observado em duas épocas diferentes.

(a) Indique nas imagens acima a estrela com o maior movimento próprio.

(b) Sabendo que a estrela tem um movimento próprio na estrela celeste de 585 mas/ano em ascensão reta e de -752 mas/ano em declinação, **indique qual das imagens foi tirada mais recentemente.** Justifique sua resposta.

(c) Sabendo que a paralaxe desta estrela tem um valor de 77,2 mas, **determine sua distância.**

(d) Estime o valor da componente tangencial da estrela, em km/s.

14) Estrela explodiu, a humanidade sumiu? (35 pontos)

Uma estrela, a uma distância de 3 pc da Terra, vira uma supernova e alcança uma luminosidade máxima de $10^{12} L_{\odot}$.

(a) Qual será o fluxo de energia, F_{sup}, dessa supernova na Terra?

(b) Por qual fator, R, que o fluxo de energia incidente na Terra irá aumentar após a explosão da supernova?

(c) Qual será a temperatura de equilíbrio térmico que a Terra atingirá após a supernova? Assuma que a Terra é um corpo negro perfeito e que ela chega ao equilíbrio em alguns dias. Além disso, observações mostram que a temperatura média da Terra durante o último século foi de $287\,K$.

(d) A espécie humana só pode sobreviver se a temperatura de equilíbrio permanecer abaixo de $333\,K$. **Encontre a distância mínima, d_{sup}, em parsecs, que essa supernova deve estar para que a espécie humana sobreviva.**

(e) Assuma que a densidade de estrelas da Via Láctea é de $0{,}14\,pc^{-3}$. Existem 10^{11} estrelas distribuídas uniformemente pela galáxia. Suponha também, que uma supernova como essa ocorre a cada $30\,anos$ e que todas têm a mesma luminosidade. **Determine a probabilidade, P, de uma supernova causar a extinção na terra durante a idade do Sol.** Dado: Tempo de vida do Sol = $10^{10}\,anos$.

15) Emissão no infravermelho (35 pontos)

Suponha que você está observando uma fonte de infravermelho que está a $500\,pc$ de distância. Essa fonte irradia como um corpo negro a temperatura de $50\,K$, e possui diâmetro de $1\,pc$.

(a) Calcule a energia total por segundo por metro quadrado que chega até a Terra. Com base no resultado encontrado, **como este resultado se compara com a radiação solar total por segundo por metro quadrado recebida pela Terra?**

Considere que estejamos observando essa fonte utilizando um satélite com espelho de $1\,m$ de diâmetro. Além disso, este telescópio está trabalhando em um comprimento de onda de $100\,\mu m$.

(b) Qual a $energia/s/Hz$ chegando ao telescópio?

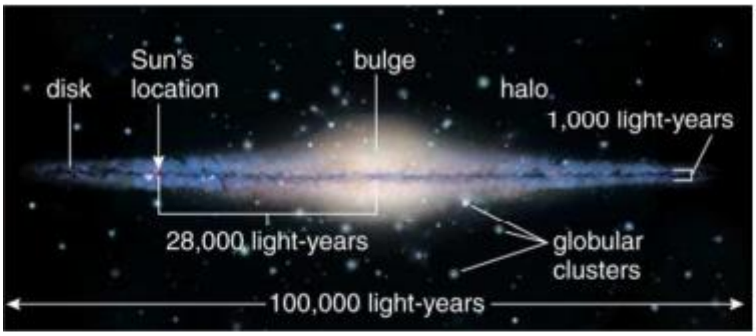
Quando em funcionamento, pode-se dizer que este telescópio irradia como um corpo negro a temperatura de $300\,K$, porém, com eficiência de apenas 1%.

(c) Qual é a $energia/s/Hz$ que o telescópio emite nesse comprimento de onda? Em outras palavras, qual seria a densidade de fluxo intrínseca do telescópio? **Além disso, como essa resposta se compara com o resultado do item (b)?**

(d) Refaça o item (c), porém assumindo que o telescópio foi resfriado até uma temperatura de $30\,K$. (Assuma que a eficiência do telescópio seja constante durante o processo de resfriamento).

16) Curva de velocidade em galáxias (45 pontos)

Galáxias são grandes coleções de estrelas e gás que se mantém juntas devido sua própria gravidade. Nesse problema, iremos analisar uma classe específica desses objetos: as galáxias espirais. Elas são caracterizadas pelo seu bojo esférico e um disco plano na qual as estrelas formam um padrão espiral. As estrelas e o gás em uma galáxia espiral traçam órbitas circulares ao redor do centro da galáxia. Na figura abaixo, temos uma esquematização da Via Láctea.



(a) Utilizando a força gravitacional agindo em uma estrela se movendo em órbita circular e assumindo simetria esférica, **determine a velocidade rotacional (v_{rot}) de uma estrela como função da massa dentro de um raio r.** Apenas a massa do material dentro do raio orbital contribui com a força gravitacional de atração.

(b) Assumindo que a maior parte da massa da galáxia esteja contida dentro do bojo esférico de raio r_o, de densidade uniforme ρ_o, **determine o formato da curva de rotação dentro e fora de r_o.** Para auxiliar em suas análises, **faça um esboço do gráfico v_{rot} em função de r.**

(c) Astrônomos observaram curvas de rotação de galáxias e encontraram uma discrepância entre o que foi medido e as predições teóricas feitas. Eles encontraram que a curva de rotação, na realidade, era plana para distâncias $r > r_o$, o que não pode ser explicado por uma massa central dominante no sistema. Para concertar esse problema, o conceito de matéria escura foi introduzido. Assumindo um perfil mais realístico de densidade para matéria escura esfericamente distribuída:

$$\rho(r) = \rho_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$$

Determine o expoente α necessário para que a curva de rotação seja plana para $r > r_o$, assim como observado nos experimentos.

(d) Em $r = 2{,}8 \times 10^5\ AL$ de distância do centro da via láctea, o Sol tem uma velocidade de rotação medida de $v_{rot} = 220\ km\ s^{-1}$ e uma velocidade esperada de $v_{esp} = 70\ km\ s^{-1}$. **Calcule a massa visível e a massa verdadeira da nossa galáxia. Qual a porcentagem de matéria escura na nossa galáxia?** Expresse sua resposta em unidades de massas solares, $M_{\odot}$.

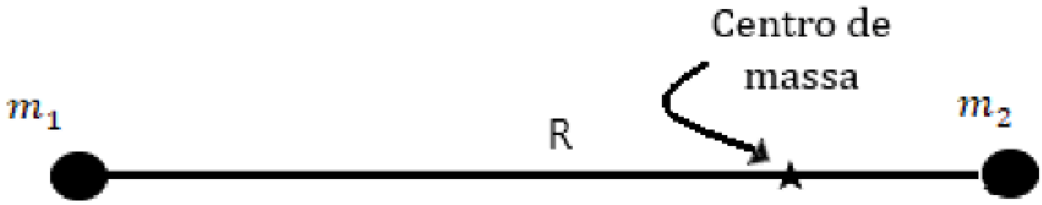
(e) Embora matéria escura seja um conceito amplamente aceito para explicar o problema com a curva de rotação, uma outra alternativa foi sugerida: modificar as leis da gravidade. A Dinâmica Newtoniana Modificada ($MOND$, em inglês) postula que a terceira lei de Newton pode ser reescrita como $F = ma\mu(\frac{a}{a_o})$, em que μ é uma função com a propriedade que $\mu(x) = 1$ para $x \gg 1$ e $\mu(x) = x$, para $x \ll 1$; a é a aceleração e a_o é uma constante que marca a transição entre a gravidade Newtoniana e a MOND. Nos limites de pequenas de pequenas acelerações ($a \ll a_o$), **mostre que essa fórmula também leva a uma curva de rotação plana para raios muito longos.**

Questões Longas

17) Energia em órbitas elípticas (50 pontos)

Nesse exercício, iremos determinar a energia total de um sistema binário. Como bem sabemos, sistemas binários que funcionam sob a atuação da atração gravitacional percorrem, em geral, uma elipse ao longo de um período.

Considere duas estrelas, de massas m_1 e m_2 orbitando um centro de massa, a uma distância R arbitrária entre si, como mostra a figura.



Além disso, tome como dados que a distância da massa m_1 até o centro de massa é r_1 e que a distância de m_2 até o centro de massa é r_2.

(a) Considere um momento em que a velocidade de m_1 é v_1 e a de m_2 é v_2. **Em termos de $m_1, m_2, r_1, r_2, v_1, v_2$ e da constante gravitacional G, escreva a energia mecânica total do sistema.**

(b) Definindo como v a velocidade relativa entre as estrelas e que $R = r_1 + r_2$, **reescreva a equação do item (a) em termos de v, R e as constantes fornecidas anteriormente.**

Nesse momento, como a energia se conserva, queremos particularizar dois pontos específicos, encontrar suas propriedades orbitais e obter dessa forma uma equação geral. Para isso, considere que a elipse que as estrelas percorrem possui excentricidade e e semi-eixo maior a.

(c) Por simplicidade, leve em consideração o periastro e o apoastro. Sendo v_a e v_p as velocidades no apoastro e no periastro, respectivamente, **encontre a razão $\left(\frac{v_a}{v_p}\right)^2$ em termos de e.**

(d) A partir das equações encontradas nos itens anteriores, **calcule v_a^2 e v_p^2 separadamente.**

(e) Utilize as relações encontradas para determinar a energia total do sistema em termos de a, m_1, m_2 e da constante gravitacional.

(f) A partir da equação encontrada no item (e), **encontre uma expressão para a velocidade relativa entre as estrelas, para uma posição r da elipse.**

18) Expansão superluminal (55 pontos)

Um interessante problema com algumas fontes de rádio é que elas aparentam ter pequenos componentes que se movem com velocidade maior que a da luz! Isso é o conhecido como o problema da *expansão superluminal.* Foi em 1966 que Martin Rees discutiu a possibilidade de movimentos superluminais serem observados de jatos de partículas velozes provenientes dessas fontes.

É claro que nós não observamos as velocidades desses componentes. Na realidade, nós medimos a variação da separação angular até o centro da fonte, $\frac{d\theta}{dt}$, como mostrado na figura 1.

Por simplicidade, use a figura 2 para determinar seus eixos de coordenadas.

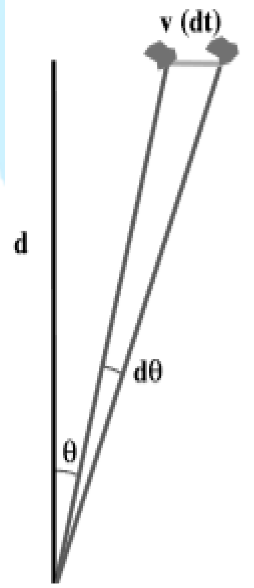


Figura 1: variação da separação angular

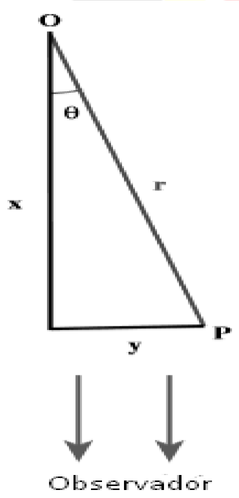


Figura 2: Eixos de coordenadas recomendados

Da figura 2, considere um objeto partindo de um ponto O, viajando até o ponto P, a uma distância r de O. Esse objeto viaja com velocidade v, fazendo um ângulo θ com a linha de visada.

(a) Qual o tempo necessário para esse objeto ir de O até P?

(b) Visto por um observador bem distante, **qual é o tempo aparente desse movimento, em termos de r, v, c e θ?**

(c) Definindo um coeficiente β, tal que $\beta = \frac{v}{c}$, **mostre que a velocidade aparente do objeto no céu é dada por:**

$$v_{ap} = \frac{vsen\theta}{(1 - \beta cos\theta)}$$

Neste momento, tome a função $\left(\frac{v_{ap}}{v}\right)(\theta)$. Dizemos que o máximo de uma função é obtido quando a derivada dela em relação à variável é zero. Observe que, dá equação encontrada no item (c), existem duas funções que definem a razão das velocidades, sendo elas $sen\theta$ (g(x)) e $(1 - \beta cos\theta)$ (h(x)). Para derivar a função da razão das velocidades, basta fazer o seguinte procedimento:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x)}{h(x)^2} h'(x)$$

Com $g'(x)$ e $h'(x)$ as derivadas das funções em relação a x.

Nota: Derivadas de funções trigonométricas –

$$\frac{sen\theta}{d\theta} = cos\theta \text{ e } \frac{cos\theta}{d\theta} = -sen\theta$$

(d) Encontre o ângulo θ para qual $\left(\frac{v_{ap}}{v}\right)$ é máximo.

(e) Encontre $\frac{v_{ap}}{v}$ máximo em função de β.

(f) Para um objeto se movendo para longe do núcleo de uma galáxia, com $v = 0{,}95c$, **encontre o máximo valor de v_{ap} e o ângulo que ele deve estar se movendo para alcançar este valor.**

(g) De um observador terrestre**, qual é o tempo para este objeto viajar uma distância de 1 pc no céu?**