SIMULADO NOIC 04 – PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA E XI OLAA DE 2019

Nome: Nota:

PROVA TEÓRICA

Instruções

- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis;
- A prova tem duração total de **4 horas;**
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões;
- Essa prova é composta por 13 questões, divididas em 3 categorias:
  - Questões curtas **– 10 Questões**
  - Questões médias – **2 Questões**
  - Questões longas – **1 Questão**
- Segue abaixo uma tabela da pontuação máxima para cada questão.

Questão	Pontuação
1	10
2	10
3	10
4	15
5	15
6	15
7	15
8	15
9	20
10	20
11	25
12	35
13	100

Boa sorte!

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_{\odot} = 1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}96 \times 10^{8}\ m$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3{,}83 \times 10^{26}\ W$
Magnitude absoluta visual	$M_{V_{\odot}} = 4{,}82$
Magnitude aparente visual	$m_{\odot} = -26{,}72$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778\ K$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220\ km\ s^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8{,}5\ kpc$
A Terra	
Massa	$M_{\oplus} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_{\oplus} = 9{,}81\ m/s^2$
Albedo	$\alpha_{\oplus} = 0{,}39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23°27'$
Duração do Ano Tropical	365,2422 *dias solares médios*
Duração do Ano Sideral	365,2564 *dias solares médios*
A Lua	
Massa	$M_L = 7{,}44 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$R_L = 1{,}74 \times 10^{6}\ m$
Distância Terra-Lua	$d_L = 3{,}78 \times 10^{8}\ m$
Período sinódico	$P_{S_L} = 29{,}5306\ dias$
Albedo	$\alpha_L = 0{,}14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_L = 5{,}14°$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1{,}496 \times 10^{11}\ m$
1 Parsec (pc)	$3{,}0856 \times 10^{16}\ m$
Constante gravitacional	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ J\ s$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Constante de Hubble	$H_o = 67{,}8\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2{,}998 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26}\ W\ m^{-2}\ Hz^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m\ K$
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do próton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$

Questões Curtas

1) A altura do céu! (10 pontos)

Os gregos antigos sabiam que o diâmetro da Terra era pequeno em comparação com a distância de estrelas. Por exemplo, existia a lenda de que o deus Hefesto acidentalmente deixou cair sua bigorna sobre a Terra. Durou exatamente 9 dias para que a bigorna eventualmente caísse no chão.

Estime a "altura do céu", de acordo com as crenças da Grécia Antiga. Sabe-se que o período da Lua ao redor da Terra é $T_L = 27{,}3\ dias$ e que o raio de órbita é $a_L = 384400\ km$.

2) Estrelas no Universo (10 pontos)

Assuma que todas as estrelas do Universo têm a mesma magnitude absoluta e que elas estejam distribuídas de forma homogênea pelo espaço. Tomando como $N(m)$ o número de estrelas mais brilhantes que m magnitudes, determine a razão dada por $\frac{N(m+1)}{N(m)}$.

3) Escapando de um aglomerado (10 pontos)

Uma galáxia, localizada na borda de um aglomerado de galáxias de raio $10\ Mpc$, conseguirá escapar dele se tiver velocidade inicial de pelo menos $700\ km/s$ relativa ao centro. **Calcule a densidade do aglomerado.**

4) Redshift de Galáxias (15 pontos)

Em uma busca por galáxias, um grupo de astrônomos percebeu que a luminosidade na linha HI de uma típica galáxia escolhida é $10^{30}\ W$ para uma largura de banda de $1\ MHz$. Além disso, para certo tempo de integração, a densidade de fluxo medida foi em média de $2{,}5\ mJy$. Utilizando as informações dadas, **determine qual é o redshift máximo que uma galáxia dessa pesquisa pode atingir.**

5) Estrelas circumpolares (15 pontos)

Qual é a fração do número total de estrelas que nunca irão se por para uma dada latitude φ? Considere que as estrelas estão uniformemente distribuídas pelo céu.

6) Temperatura estelar (15 pontos)

Imagine que estejamos em outro sistema solar bem curioso. A nossa estrela hospedeira tem mesmo raio que o Sol, e o planeta onde habitamos, o planeta ACOP, está a $1\ U.A.$ dela. Ao medirmos a densidade de fluxo dessa estrela em um comprimento de onda de 0,1 $metros$, obtemos 0,1 MJy. **Qual a temperatura da estrela nesse comprimento de onda?**

7) No topo do monte (15 pontos)

Mr. Seeds, em mais uma de suas aventuras, vai até Puebla no México ($\varphi = 19°03'98''N$), para estudar a passagem do tempo e o movimento das estrelas. Em um determinado dia, ele observa αPsA, também conhecida como Formalhaut ($\delta = -29°37'20{,}1''$ e $\alpha = 22h57m39{,}0s$). Então, após um dia de observação ele anota os valores de Tempo Sideral para o nascer e o ocaso da estrela. **Quais foram os valores que Mr. Seeds calculou?** Nota: a altitude em Puebla é de 2175 metros.

8) Oláá buraco negro (15 pontos)

Uma estrela gira ao redor de um buraco negro com o plano orbital paralelo à ao plano de visada do observador. Observa-se que a linha de repouso de 5985 Å (Angstrom) varia de 5975 Å a 6000 Å, onde o deslocamento máximo para o vermelho ocorre em 3 dias e o deslocamento máximo para o azul ocorre em 4 dias, repetindo-se ciclicamente. Calcule:

(a) Seu período de translação ao redor do buraco negro.

(b) As velocidades máximas e mínimas da estrela.

(c) A excentricidade de sua órbita.

9) Lançamento ao equador (20 pontos)

A velocidade de escape da superfície de um planeta esférico é v_{esc}. **Qual é a velocidade inicial mínima de um projétil lançado do polo que o permite pousar no equador?**

Dicas: Para órbitas keplerianas podemos escrever as seguintes relações –

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\varphi - \varphi_o);\ p = \frac{L^2}{m\mu};\ e = \left(1 + \frac{2EL^2}{m\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Em que L é o momento angular, $\mu = GMm$, M a massa do planeta e m a massa do projétil.

Pode ser útil utilizar que $\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p^2}$ e $\frac{d}{dp}(p) = 1$.

10) Hora de viajar (20 pontos)

Após seus passeios pelo México, Mr. Seeds vai fazer uma viagem até a sede da IOAA 2019, Keszthely, na Hungria, ($\varphi_K = 46°46'11''N$ e $\lambda_K = 17°14'53''$E). Sabendo que ele partiu de Puebla ($\varphi_P = 19°03'12''N$ e $\lambda_P = 98°11'00''W$), **qual a latitude do ponto mais ao Norte desse trajeto?**

Questões médias

11) Sistema 40 Eridani (25 pontos)

A anã branca mais facilmente observável está no sistema triplo 40 Eridani: 40 Eri A é uma estrela de tipo solar de 4a magnitude, 40 Eri B é uma anã branca de 10a magnitude, e 40 Eri C é uma anã vermelha tipo M5 de 11a magnitude. 40 Eri B e C estão a cerca de 400 UA da componente mais brilhante.

(a) O período orbital do sistema BC é 247,9 anos. A paralaxe medida é de 0,201″ e o semieixo maior de 6,89″. A razão das distâncias entre B e C para o centro de massa do sistema é $\frac{a_B}{a_C} = 0{,}37$. **Encontre as massas de B e C.**

(b) A magnitude bolométrica absoluta de 40 Eri B é 9,6. **Encontre sua luminosidade.**

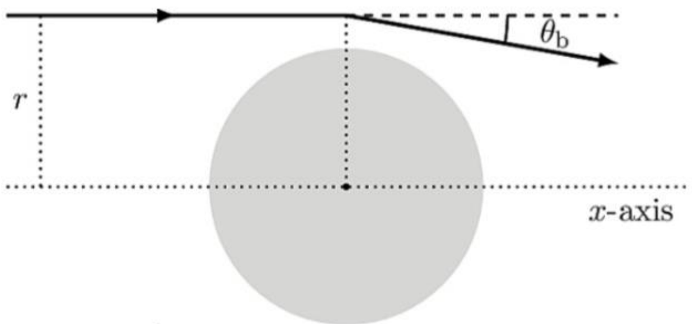
(c) A temperatura efetiva de 40 Eri B é 16.900K. **Calcule seu raio e densidade e compare-os com o da Terra e Sol.**

12) Telescópio de lentes gravitacionais (35 pontos)

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein prevê o desvio da luz ao redor de corpos massivos. Para simplificar, consideremos o caso em que o desvio da luz ocorre apenas em um único ponto para cada raio luminoso, como mostrado na figura abaixo. O ângulo de desvio θ_Bé dado por:

$$\theta_B = \frac{2R_{sch}}{r}$$

Na qual R_{sch} é o raio de Schwarzchild associado ao corpo. Chamamos de "parâmetro de impacto" a distância r que separa o raio de luz incidente e o eixo x (paralelo ao raio) que passa pelo centro do corpo.



Dessa maneira, um corpo massivo se comporta como uma lente convergente. Os raios de luz, vindos do infinito, que têm mesmo parâmetro de impacto r convergem num ponto, ao longo do eixo x, a uma distância f_r do centro do corpo. Um observador neste ponto se beneficiará de uma imensa amplificação graças a esta focalização gravitacional. Neste caso, o corpo massivo é usado como um Telescópio de Lente Gravitacional para amplificação de sinais distantes.

(a) Considere a possibilidade do nosso Sol ser um telescópio de lente gravitacional. **Calcule a menor distância ao centro do Sol (em U.A.) f_{min} na qual os raios de luz podem ser focalizados.**

(b) Considere um pequeno detector circular de raio a, colocado a uma distância f_{min} sobre o eixo x e perpendicular a ele. Note que apenas os raios de luz que passam por um determinado anel de largura h ($h \ll R_{\odot}$) ao redor do Sol irão chegar ao detector. O fator de amplificação no detector é definido como a razão da intensidade da luz incidente no detector na presença do Sol e a intensidade na ausência do Sol. **Com base nisso, expresse o fator de amplificação A_m no detector em termos de $R_{\odot}$ e a.**

(c) Considere uma distribuição esférica de massa, tal como a de um aglomerado de matéria escura em um aglomerado de galáxias, através da qual os raios de luz podem passar enquanto sofrem desvio gravitacional. Considere, para simplificar, que para o parâmetro de impacto r, apenas a massa $M(r)$ dentro do raio r é relevante. **Qual deve ser a distribuição de massa $M(r)$ para que a lente gravitacional se comporte como uma lente óptica convexa ideal?**

Questão longa

13) Anãs brancas (100 pontos)

(Parte A) Pressão de degeneração – 50 pontos

O material deixado para trás quando a fotosfera de uma estrela é ejetada é o remanescente do núcleo dela. A título de curiosidade, esse fenômeno no curso de vida de uma estrela é conhecido como nebulosa planetária; após a expansão da fotosfera, é possível traçar eixos de simetria na nebulosa, na qual a anã branca estará contida.

Em sua maioria, os compostos remanescentes são oxigênio e carbono, e sua temperatura não é alta o bastante para que fusões nucleares ocorram. Com isso, a pressão exercida pelo gás não é o bastante para suportar a estrela contra seu colapso gravitacional. Esse colapso ia acontecer indefinidamente se não fosse pela fonte adicional de pressão que surge quando uma densidade alta o bastante é atingida. A essa pressão adicional, damos o nome de *Pressão de Degeneração*.

A degenerescência de elétrons vem do princípio de exclusão de Pauli, que diz que dois elétrons não podem estar ocupar o mesmo estado. Para que isso fosse possível, os dois elétrons deveriam ter todos os seus números quânticos que descrevem esses estados iguais. Em um gás degenerado, a maioria dos elétrons irão ter energias muito maiores do que eles teriam em um gás normal. Com altas energias, os elétrons possuem alto momento, com isso eles podem exercer uma pressão consideravelmente maior que um gás ordinário na mesma temperatura. Esse excesso de pressão é a descrição da pressão de degeneração.

Com essas informações em mente, nós podemos descrever essa pressão em termos do princípio da incerteza. Se pudermos determinar um momento de incerteza Δp, e uma posição de incerteza Δx, o princípio da incerteza nos diz que:

$$\Delta p \, \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

Para facilitar suas análises, imagine que você esteja trabalhando com um pequeno contêiner dentro da estrela. Organize-o em eixos x, y e z e siga os comandos das questões.

(a) Assuma que esse contêiner tenha densidade η de partículas, e que elas se movem no espaço com velocidade v_x, com momento linear p_x. **Encontre uma relação para o momento transferido por segundo por unidade de área na parede do contêiner.**

(b) Para essa situação, é possível considerar que o momento linear médio das partículas é da ordem da incerteza do momento. Além disso, nesse contêiner, podemos dizer que o número de elétrons por unidade de volume é n_e. **Determine o valor de p_x em termos de h e n_e.**

(c) A partir dos resultados encontrados, **encontre uma expressão para a pressão total exercida na parede, como função de h, n_e, m_e,** na qual m_e é a massa do elétron**.**

A expressão do item (c) dá a pressão em função da densidade de elétrons. Porém, nós só conhecemos a densidade total de massa, ρ.

Na continuação desse problema, suponha que a densidade de íons positivos com carga Z_e seja n_z. Além disso, assuma que as massas do próton e do nêutron sejam de mesmo valor, igual a m_p.

(d) Calcule n_e em função dos termos citados nos dois parágrafos acima e de A. Perceba que A é o número atômico.

Os cálculos feitos nos itens anteriores são bem precisos em relação à dimensionalidade da pressão. Porém, em uma análise detalhada da situação, o fator de proporcionalidade é diferente. Para simplificar, apenas considere que a pressão de degeneração é o dobro da pressão encontrada no item c.

(e) Nesse momento, você já tem informação o bastante sobre a pressão total em função de quantidades conhecidas. **Com base nos itens anteriores, calcule a pressão de degeneração em função de h, Z, A, ρ, m_p e m_e.**

(Parte B) Propriedades de anãs brancas – 50 pontos

Para que uma estrela se mantenha pelo efeito da pressão de degeneração, ela deverá ser bem pequena (lembre que essa pressão ocorre para altas densidades). Quando a estrela, após expandir sua fotosfera, se contrai até certo ponto, ela irá ficar com alta temperatura. Objetos com essas características são chamados de anãs brancas.

Nessa parte do problema, iremos trabalhar com uma anã branca recém-formada, de uma massa solar e raio de 10^{-2} raios solares (aproximadamente um raio terrestre).

(f) Calcule a densidade de massa dessa estrela.

(g) Para a estrela citada, temos que $\frac{Z}{A} = 0{,}5$. **Estime a pressão de degeneração dela.**

(h) Faça uma estimativa da pressão térmica do gás a uma temperatura de $10^7 K$.

(i) Compare os resultados dos itens (g) e (h). Por qual fator a pressão calculada em (g) é maior ou menor do que em (h)?

Assuma agora que a estrela esteja em equilíbrio hidrostático, o que significa que a seguinte relação é válida:

$$\frac{dP}{dr} = g\rho$$

(j) Sabendo disso, **encontre uma expressão para $M^{1/3}R$ em função de G e dos termos apresentados na parte A.**

(k) Imagine que um aumento de temperatura súbito ocorreu por toda a estrela ocorreu e o raio dela diminuiu ΔR por consequência. Para equilibrar esse efeito, a anã branca expeliu uma quantidade de massa ΔM. A situação descrita é de certa forma impossível, mas considere que ela de fato ocorra. **Finalmente, encontre o valor de $\frac{\Delta M}{\Delta R}$.**

Dica: Para $x, y \ll 1$, é possível dizer que $(1 + x)(1 + y) \approx 1 + x + y$.