SIMULADO NOIC 09 – PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA E XI OLAA DE 2019

Nome: Nota:

PROVA TEÓRICA

Instruções

- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis;
- A prova tem duração total de **4 horas e 30 minutos;**
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões;
- Essa prova é composta por 12 questões, divididas em 3 categorias:
  - Questões curtas **– 5 Questões**
  - Questões médias – **5 Questões**
  - Questões longas – **2 Questão**
- Segue abaixo uma tabela da pontuação máxima para cada questão.

Questão	Pontuação
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10
6	20
7	20
8	20
9	20
10	20
11	50
12	100
Total	300

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_{\odot} = 1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}96 \times 10^{8}\ m$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3{,}83 \times 10^{26}\ W$
Magnitude absoluta visual	$M_{V_{\odot}} = 4{,}82$
Magnitude aparente visual	$m_{\odot} = -26{,}72$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778\ K$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220\ km\ s^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8{,}5\ kpc$
A Terra	
Massa	$M_{\oplus} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_{\oplus} = 9{,}81\ m/s^2$
Albedo	$\alpha_{\oplus} = 0{,}39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23°27'$
Duração do Ano Tropical	$365{,}2422$ *dias solares médios*
Duração do Ano Sideral	$365{,}2564$ *dias solares médios*
A Lua	
Massa	$M_L = 7{,}44 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$R_L = 1{,}74 \times 10^{6}\ m$
Distância Terra-Lua	$d_L = 3{,}78 \times 10^{8}\ m$
Período sinódico	$P_{S_L} = 29{,}5306\ dias$
Albedo	$\alpha_L = 0{,}14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_L = 5{,}14°$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1{,}496 \times 10^{11}\ m$
1 Parsec (pc)	$3{,}0856 \times 10^{16}\ m$
Constante gravitacional	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ J\ s$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Constante de Hubble	$H_o = 67{,}8\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$
Constante de permissividade do vácuo	$\epsilon_o = 8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2{,}998 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26}\ W\ m^{-2}\ Hz^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m\ K$
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do próton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$

Temperatura Hawking para um Buraco Negro, $T_H = \dfrac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$

Questões Curtas

1) Ângulo Horário Solar (10 pontos)

Em certo dia, em mais uma de suas caminhadas filosóficas, o grande (literalmente) engenheiro Cortezes percebe que nesse momento o tempo sideral na Universidade de Columbia é $22^h32^m47^s$. Sabe-se que a longitude da universidade é $4^h55^m50^s$ e que o tempo sideral em Greenwich à meia-noite é $18^h21^m16^s$.

Qual o ângulo horário do Sol para este momento?

2) Época da Recombinação (10 pontos)

A Época da Recombinação (era em que a temperatura era suficiente para que elétrons e prótons carregados pudessem formar átomos de Hidrogênio) findou-se quando o Universo tinha temperatura $T = 3000\ K$ e idade t_{fim}. Da radiação cósmica de fundo, é constatado que a energia de ionização do Hidrogênio é igual a $E_{ion} = 13{,}6\ eV$.

Com base nisso, **calcule quanto tempo durou a Época da Recombinação, em função de t_{fim}.**

Dados: Temperatura atual do Universo, $T_o = 2{,}725\ K$;

No período que o Universo é dominado por matéria, o fator de escala é determinado no presente por $a_o = a(z = 0) = 1$ e segue a proporcionalidade $a \propto t^{2/3}$.

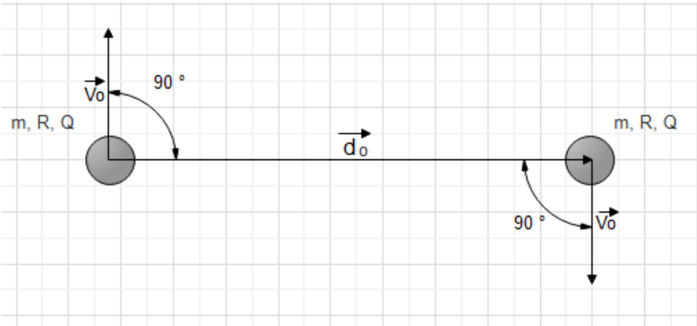
3) Pôr do Sol (10 pontos)

Suponha que Bruninha esteja em um elevador com vista para a praia, no final de uma tarde de férias. Nessa hora, o oceano está tranquilo, ou seja, não há nenhuma onda e a jovem ainda se encontra no térreo. No momento que a parte superior do Sol desaparece, Bruninha ativa o cronômetro do seu relógio. Nesse exato instante, o elevador começa seu movimento ascendente e para quando o topo do Sol desaparece novamente.

Se o tempo percorrido no relógio entre esses dois momentos foi de 30 segundos, **qual é a altura que Bruna estava, em relação ao solo, no momento que o elevador parou?** Considere que a distância entre os olhos e os pés de Bruninha é desprezível.

4) Estrelas Compactas Carregadas (10 pontos)

Em um lugar distante de nós, duas estrelas, de carga $+Q$ e $-Q$, estão inicialmente em repouso a uma distância d_o entre si. De repente, um impulso é gerado em ambas as estrelas, fazendo com que elas adquiram velocidade v_o em direções opostas, conforme a figura abaixo. Durante o movimento orbital subsequente desses astros, verifica-se que sua velocidade mínima é v. As duas estrelas possuem a mesma massa, m, e raio, R, tal que $R \ll d_o$.

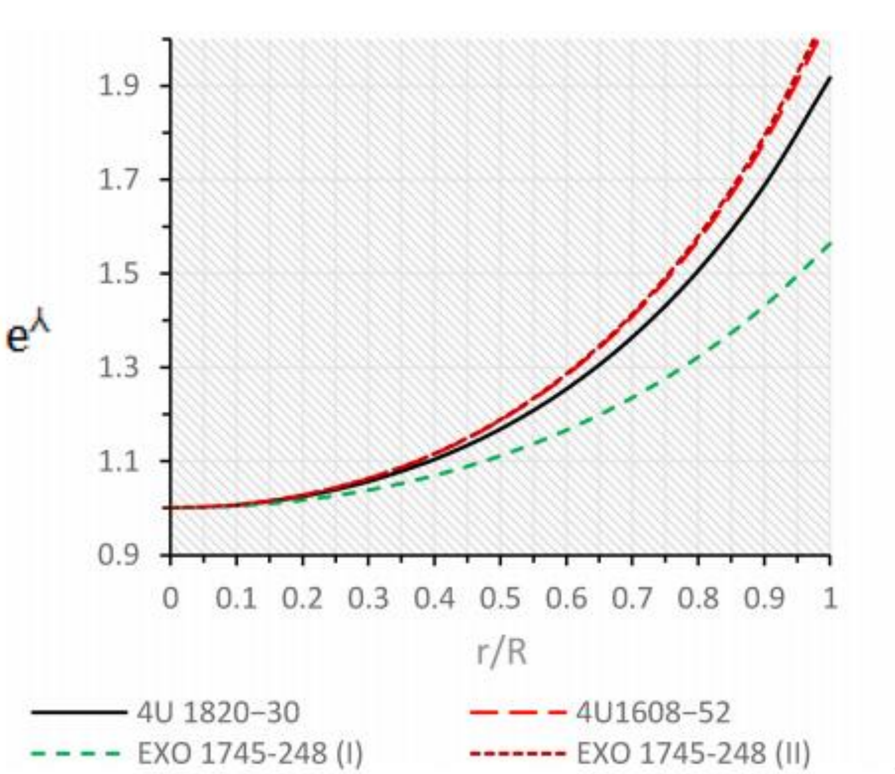


(a) Determine a massa, m, de cada estrela.

Fazendo-se uso das equações de Einstein e de Maxwell, é possível demonstrar que Estrelas Compactas Carregadas respeitam a seguinte equação:

$$e^{-\lambda} = \frac{2G}{cr^2}M(r) + 1$$

Em que $e^{-\lambda}$ é uma função dependente da Massa compreendida em certo raio da estrela. No gráfico abaixo, está como varia essa quantidade, em função de $\frac{r}{R}$.



(b) Determine o raio, R, de cada estrela, sabendo que as duas estrelas são semelhantes à estrela 4U 1820-30.

Dados:

- $|Q| = 1{,}949 \times 10^{20} C$
- $v_o = 4{,}373 \times 10^4\ m/s$
- $v = 3{,}229 \times 10^4\ m/s$
- $d_o = 18{,}27\ U.A.$

5) Fotometria na Banda U (10 pontos)

Uma estrela tem magnitude aparente $m_U = 15{,}0$ na banda U. O filtro da banda U é ideal, ou seja, tem transmissão perfeita dentro da banda, e é completamente opaco fora dela. O filtro está centrado em 320 nm, e tem largura de banda de 60 nm. Considere que a estrela possui espectro de energia achatado com relação à frequência. A conversão entre a magnitude m em qualquer banda e a densidade de fluxo f de uma estrela em Jansky é dada pela seguinte equação:

$$f = 3631 \times 10^{-0{,}4m}\, Jy$$

(a) Aproximadamente quantos fótons, N_o, na banda U provenientes dessa estrela irão incidir normalmente numa área de 1 m^2 no alto da atmosfera da Terra por segundo?

Essa estrela está sendo observada na banda U utilizando um telescópio em solo, cujo espelho primário tem $2{,}0\, m$ de diâmetro. A extinção atmosférica na banda U durante a observação é de 50%. Considere que o seeing é limitado pela difração. O brilho médio do céu noturno na banda medido foi de 22 mag/arcsec^2.

(b) Qual a razão, R, do número de fótons recebidos por segundo da estrela com relação aos fótons provenientes do céu, quando medidos sobre uma abertura de diâmetro $2''$.

(c) Na prática, apenas 20% dos fótons que incidem nos espelho primário são detectados. **Quantos fótons, N_t, provenientes da estrela são efetivamente detectados por segundo?**

Questões Médias

6) Rotação de Órbita (20 pontos)

Certo planeta, de massa M, orbita o Sol no plano $x - y$ e segue a equação dada abaixo. Note que os valores de x e y são dados em Unidades Astronômicas.

$$9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$$

Ao mesmo passo que o planeta vaga pacificamente pelo sistema solar, um Asteroide, de massa m, está em rota de colisão com ele. Sabe-se que os dois astros colidem em um ponto P, de coordenadas $\left(6; \frac{3\sqrt{15}+20}{4}\right)$, e que esse evento ocorre de modo que o argumento do periastro do planeta varia em 90° (no sentido horário), mantendo quaisquer outras propriedades orbitais originais.

Determine o ângulo, Ψ, que o vetor velocidade do asteroide faz com o vetor posição dele, a partir do Sol.

Considere que o asteroide seja acoplado ao planeta após a colisão e que $m, M \ll M_{\odot}$.

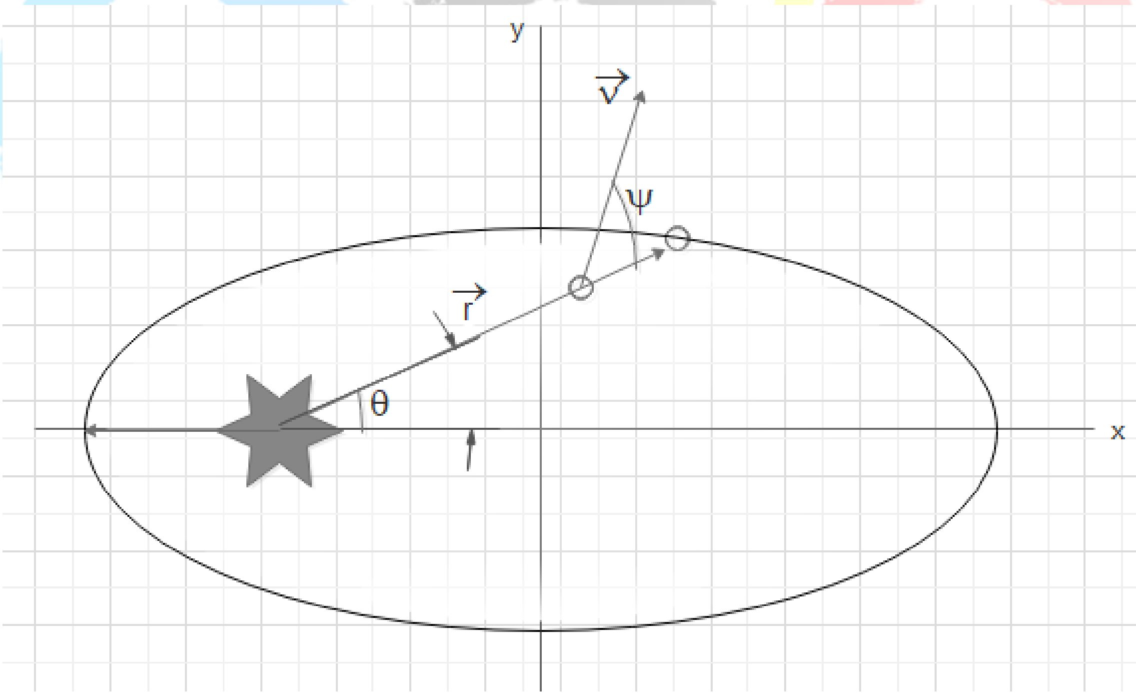


Figura 6.1 – Diagrama do vetor posição do Asteroide e seu vetor velocidade

Dados: $M = 6{,}23 \times 10^{24}\ kg$ e $m = 2{,}52 \times 10^{20}\ kg$. Considere que nos momentos que antecedem a colisão, somente a interação entre os dois astros será relevante.

7) Calibrando um Telescópio (20 pontos)

No dia de seu aniversário, o astrônomo Gelecaio ganhou um belo telescópio equatorial de presente. Como todos sabem, telescópios com esse tipo de montagem foram feitos para observadores em latitudes altas. Porém, nosso amigo mora no Ceará, em Fortaleza ($\varphi_F = 3°43'06''S$), portanto ele terá de usar a criatividade para se localizar no céu.

(a) Antes de tudo, é justo procurar saber como converter as coordenadas equatoriais reais de uma estrela (α, δ), para as coordenadas do telescópio (α_t, δ_t). Imagine que o telescópio está apontado para o Sul e que a menor latitude que é possível trabalhar sem que o contrapeso encoste o tripé seja conhecido e igual a φ_t. **Forneça equações para o cálculo de α_t e δ_t em função dos parâmetros mencionados anteriormente.**

Hora de observar o céu!

Gelecaio primeiramente nota que a latitude mínima em que o telescópio consegue ficar configurado é $\varphi_t = 23°30'$ e que o tempo sideral local nesse momento é $T.S.L._O = 19h30min56sec$. Ele deseja observar a estrela $\alpha\, Pav$ ($\alpha_p = 20h25min39seg$, $\delta_p = -56°44'06''$) por duas horas – tempo suficiente para saciar suas curiosidades astronômicas.

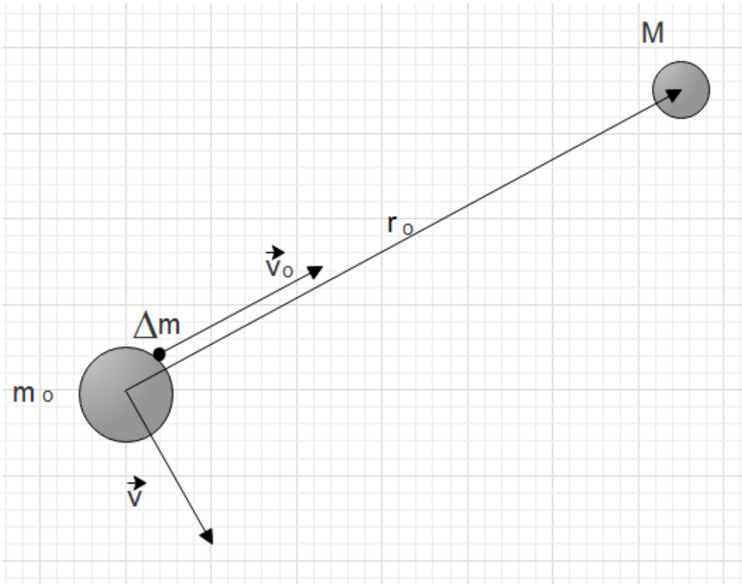
(b) Sabe-se que o motor do telescópio possui engrenagens que fazem com que todo o sistema se movimente com velocidade angular constante ω. **Qual o valor de ω necessário para que Gelecaio consiga acompanhar a estrela durante toda a observação?** Note que o ângulo horário medido a partir do Polo do telescópio varia, porém as coordenadas equatoriais continuam constantes.

(c) O motor trabalha de modo que ele exerça um torque de $\tau = 75\ N \cdot m$ para que o sistema funcione com essa velocidade ω. **Determine a potência média fornecida pelo motor durante seu funcionamento.**

8) Transferência de Gás em Sistema Binário (20 pontos)

Muitas das estrelas em nosso Universo estão em sistemas binários. Um tipo particular de estrela binária consiste de uma estrela regular de massa m_o e raio R, e a outra é uma estrela de nêutrons com uma massa muito maior, M, porém bem mais compacta. Como é de se esperar, essas componentes irão se mover ao redor do centro de massa do sistema.

Assuma que a estrela de nêutrons é bem mais massiva que a regular ($M \gg m_o$), de modo que a menos massiva orbite em torno da segunda em uma órbita de raio r_o e velocidade orbital v. Em um determinado momento, a estrela regular passa a perder gás para a de nêutrons, com uma velocidade relativa v_o, no referencial dela (veja a figura abaixo).



(a) Assumindo que a estrela de nêutrons domine o potencial gravitacional desse sistema, e negligenciando qualquer mudança de órbita da estrela regular, **determine a distância, $r_{mín}$, que o gás irá chegar em relação a estrela de nêutrons.**

(b) Encontre também a máxima distância, $r_{máx}$, que o gás pode chegar em relação a estrela de nêutrons.

9) Espelhos de Telescópios Modernos (20 pontos)

Nesse problema, iremos investigar a construção dos grandes espelhos de telescópios modernos.

(a) Em geral, os grandes telescópios modernos não possuem um único espelho. Ao invés disso, o espelho é dividido em vários segmentos hexagonais côncavos. Suponha que um desses telescópios possua todos esses segmentos iguais, com distância focal $f_h = 30\ m$ e de lado $l = 87{,}5\ cm$. **Determine a distância entre duas arestas paralelas de um segmento do espelho.**

(b) Para evitar a distorção da imagem (devido à aberração esférica), os espelhos do telescópio são feitos em forma de paraboloide de revolução (uma parábola girada em torno de seu eixo). Vamos analisar um espelho como esse, observando uma estrela de distância zenital $z_s = 0°$. É dado que uma parábola como essa segue a equação $x^2 = 4ay$, em que a é a distância do foco dessa cônica até o vértice. Também é um fato conhecido que o coeficiente angular de uma reta tangente a uma parábola, em qualquer ponto $(x_o; y_o)$, é dado por $\frac{x_o}{2a}$.

Mostre que todos os raios da estrela irão convergir para o foco da parábola.

(c) Qual a diferença de fase entre os raios que chegam ao foco da parábola? Dica: A distância entre o ponto de tangência e a diretriz é igual à distância entre esse ponto e o foco.

10) Paralaxe Lunar e Solar (20 pontos)

Mr. Seeds quer estudar a variação na distância zenital da Lua e do Sol, e para isso, ele está em um terreno completamente plano, em que não há nenhum objeto bloqueando sua visão do horizonte. Ele sabe que o ângulo de paralaxe no horizonte da Lua é de $57'$, e o do Sol é de $8''$. O ângulo de refração da atmosfera terrestre próximo ao horizonte é conhecido, e igual a $34'$.

Por praticidade, ele irá tomar duas posições da Terra para estudar, o afélio e o periélio. Além disso, ele analisará os casos em que a Lua estará no apogeu e no perigeu.

Com base nas informações dos parágrafos anteriores, determine a variação da distância zenital quando o Sol, a Lua e as estrelas estiverem se pondo, para todos os casos possíveis.

Dados: Distância Terra-Sol no afélio - $152{,}1 \times 10^{11}\ m$;

Distância Terra-Sol no periélio - $147{,}1 \times 10^{11}\ m$;

Distância Terra-Lua no apogeu - $406{,}7 \times 10^{6}\ m$;

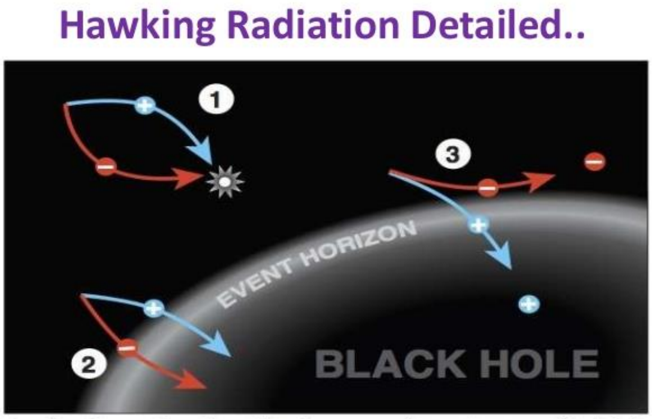
Distância Terra-Lua no perigeu - $356{,}5 \times 10^{6}\ m$.

$\boldsymbol{Obs_1}$: Você também poderá fazer uso da tabela de dados no que se refere aos raios dos astros envolvidos na questão.

$\boldsymbol{Obs_2}$: Assuma que o ângulo de paralaxe seja o mesmo para todos os casos, pois sua variação com a distância é desprezível.

Questões Longas

11) Magnitude Absoluta de Buracos Negros (50 pontos)



Cosmic refugees. Virtual particles that escape destruction near a black hole (case 3) create detectable radiation but can't carry information.

Buracos negros são objetos no espaço com campo gravitacional tão largo que nem mesmo a luz consegue escapar de seu alcance. Até 1974, a sociedade científica acreditava que buracos negros não emitiam radiação. Porém, o físico Stephen Hawking demonstrou provas teóricas de que eles poderiam emitir radiação como um corpo negro, seguindo a lei de Stefan-Boltzmann, devido a efeitos quânticos nas proximidades do horizonte de eventos. Esse efeito foi chamado de Radiação Hawking.

Buracos negros tem uma temperatura equivalente que pode ser derivada da lei de Stefan-Boltzmann; sendo esta chamada de a Temperatura Hawking. Nessa questão, iremos trabalhar com termodinâmica básica de buracos negros e considerar um comportamento anormal destes.

(a) Partindo do raio de Schwarzschild, **encontre uma relação entre a área superficial, A, de um buraco negro, e sua massa, M.**

(b) Dado um buraco negro de massa M, **calcule sua luminosidade**. Considere que a emissividade é 1.

(c) Considere uma estrela de magnitude absoluta m_o. Por alguma razão, ela foi dividida em N estrelas de mesma massa. Sabendo que a temperatura das novas estrelas é igual à da estrela de origem**, qual é a magnitude absoluta, m_e, combinada desse novo sistema?**

(d) Considere agora que um buraco negro de magnitude m_o também decide se dividir em N buracos negros idênticos, da mesma forma que a estrela do item (c). **Qual é a magnitude absoluta final, m_b, desse novo sistema?**

(e) Agora iremos definir uma quantia $\Delta m = m_e - m_b$. **Baseando-se nos itens anteriores, qual o valor de Δm? O que esse resultado é capaz de expressar sobre o brilho dos dois sistemas?**

(f) Imagine que os dois aglomerados formados no item (c) e (d) formem um sistema duplo a 10 pc de distância da Terra. **Faça um esboço do gráfico de magnitude aparente em função do tempo.**

12) Ondas Gravitacionais (100 pontos)

(Parte A) Radiação de dipolo – 24 pontos

O campo eletrostático e o gravitacional são descritos por um conjunto idêntico de equações – contanto que estejamos longe de buracos negros. No entanto, se adicionarmos termos descrevendo variações no tempo desses campos, essas equações se tornam diferentes. Portanto, expressões para ondas eletromagnéticas não podem ser diretamente correlacionadas com as de ondas gravitacionais. Ainda assim, para as equações dadas abaixo, a diferença será apenas em pré-fatores numéricos.

Cargas de movendo com aceleração perdem energia cinética pela radiação de ondas eletromagnéticas; esse efeito é conhecido como a *Radiação de Dipolo*. A potência dessa radiação é expressa por:

$$P_{ed} = \frac{\left(\ddot{\vec{d}}\right)^2}{6\pi\epsilon_o c^3} \tag{1}$$

Na qual $\ddot{\vec{d}}$ é a derivada segunda no tempo do momento dipolar. Por definição, o momento dipolar de um sistema com partículas de carga q_i é dado pela expressão $\vec{d} = \sum_i \vec{r_i} q_i$, em que $\vec{r_i}$ é o vetor apontada desde a origem até a posição da i-ésima carga. Para dipolos harmônicos oscilantes, a frequência da onda irradiada é igual à frequência das oscilações.

(A.a) Considere um elétron de carga $-e$ e massa m, orbitando um núcleo atómico de carga $+Ze$ a uma distância r; despreze efeitos da mecânica quântica. **Expresse a Potência total irradiada, $\boldsymbol{P_{ed}}$, e o comprimento de onda, $\boldsymbol{\lambda}$, das ondas irradiadas em função de $\boldsymbol{e, Z, m, r}$ e de constantes físicas.**

Agora iremos trazer a equação (1) para o campo das ondas gravitacionais; então, a potência total irradiada P_{gd} seria proporcional a $\left(\ddot{\vec{d_g}}\right)^2$, em que $\overrightarrow{d_g}$ é o momento dipolar gravitacional, e os dois pontos denotam a sua derivada segunda no tempo. Analogamente ao dipolo elétrico, o momento dipolar gravitacional para um sistema de partículas de massa m_i é definido por $\overrightarrow{d_g} = \sum_i \vec{r_i} m_i$.

(A.b) Mostre que é sempre válido dizer que $\boldsymbol{P_{gd} = 0}$.

(Parte B) Radiação de quadrupolo – 36 pontos

Vamos considerar agora um sistema binário de estrelas, em que as duas companheiras possuem a mesma massa, M. Elas estão em uma órbita circular de raio R, com velocidade angular ω.

(B.a) Expresse ω em termos de M, R e constantes físicas.

Quando não há uma radiação de dipolo gravitacional, irá existir um quadrupolo. Em analogia com a radiação dipolar, esse novo parâmetro deve ser proporcional ao quadrado da segunda derivada no tempo do momento quadrupolo. Para esse problema, é o bastante saber que, para o nosso sistema binário, o momento quadrupolo gravitacional das componentes é da ordem de MR^2. Então, nós esperamos que a radiação total radiada seja da forma $P_{qg} = AM^2R^4$, em que o fator A depende de ω e de outras constantes físicas (aqui ω será um parâmetro independente, embora ele dependa de M e R).

(B.b) A partir da análise dimensional, **encontre uma expressão para P_{qg}, em função de M, R, ω, G e c.**

O efeito das ondas gravitacionais é medido pela tensão $h = \frac{\Delta l}{l}$; aqui, l é a distância entre dois pontos do espaço e Δl é a variação nesse parâmetro. Como é de se esperar para ondas, a densidade de fluxo de energia S (energia radiada por unidade de tempo e unidade de área) é proporcional ao quadrado da amplitude, ou seja, $S = Kh_o^2$ (h_o denota a amplitude da onda).

(B.c) Baseado em argumentos dimensionais, **determine o fator K em termos das constantes físicas citadas anteriormente e a frequência da onda ω.**

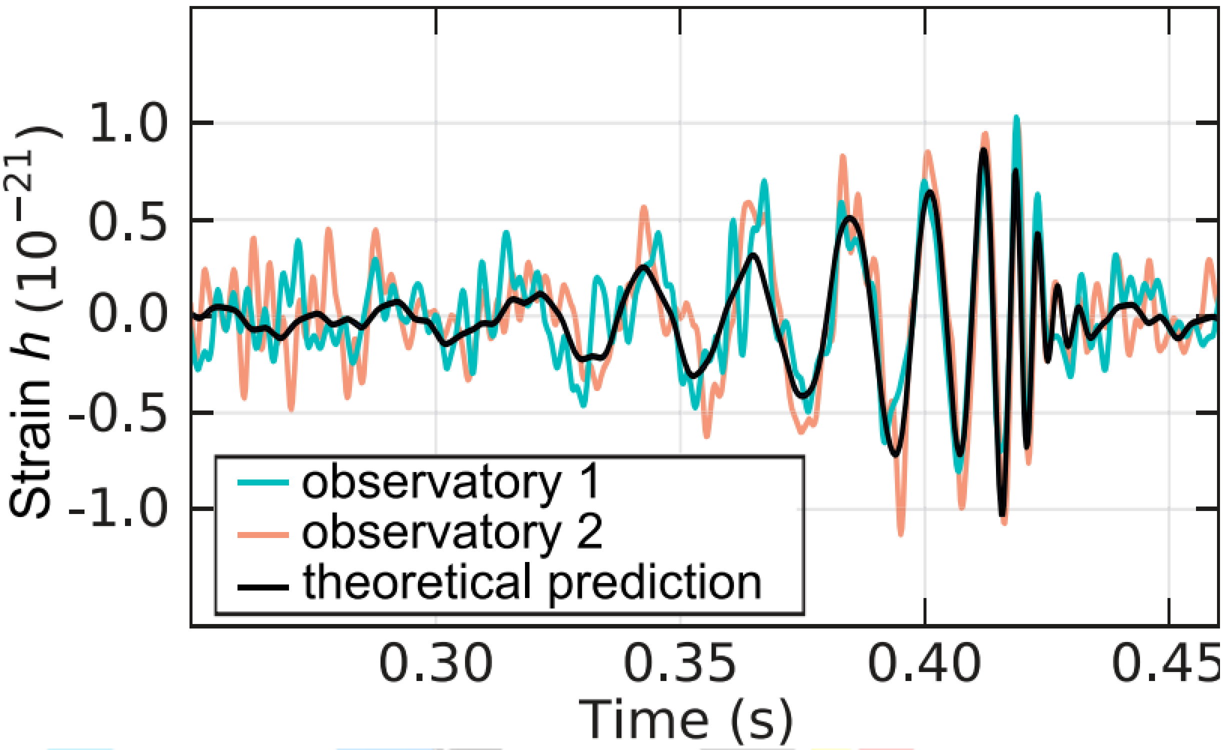
(B.d) A radiação dipolar é distribuída na forma de uma propagação anisotrópica, mas vamos ignorar isso. Por uma questão de simplicidade, considere uma radiação isotrópica. **Determine a amplitude h_o para ondas gravitacionais a uma distância L em função de M, R e outras constantes.**

(Parte C) Experimento do LIGO – 40 pontos

A energia de sistemas binários diminui com o passar do tempo devido à emissão de ondas gravitacionais. Então, a distância R entre duas estrelas também irá diminuir. Esse processo irá continuar até que as estrelas colidam e se mesclem (R se torna da ordem do raio da estrela). No experimento do LIGO (que aconteceu em 11 de Fevereiro de 2016), ondas gravitacionais emitidas logo antes da fusão de dois buracos negros foram observadas. Para o raio de um buraco negro, usaremos o raio de Schwarzchild, R_s. Para apropriadamente encontrar uma expressão de R_s, é necessário o uso de relatividade geral.

(C.a) Expresse R_s em função de M, G e c. Use o seguinte fato: se negligenciarmos a relatividade geral e utilizar a relatividade especial e a lei gravitacional de Newton, nós iremos encontrar um resultado que é a metade da expressão correta.

No LIGO, utilizando-se de um laser de 4 km de comprimento, a tensão h foi medida como uma função do tempo; o resultado está dado no gráfico abaixo.



(C.b) Com o uso desse gráfico, e assumindo que as massas dos buracos negros eram iguais, **estime a massa de cada uma das componentes, numericamente.**

(C.c) Finalmente, **estime a distância até esse sistema.**