Grade de Correção – Simulado 10

Material escrito por Bismarck Moreira

Dúvidas?
Mande um e-mail para
bismarckvasconcelos0703@gmail.com

Fortaleza – Brasil
26/07

Questão (T.1) • Como a refração atmosférica pode ser desprezada, no momento do nascer/ocaso das estrelas, a distancia zenital será $z = 90°$. Com isso, é válida a seguinte relação: $\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta$. (eq. 1).

• Observe que a declinação das duas estrelas é aproximadamente igual. Disso, iremos assumir que elas estão no mesmo paralelo de declinação.

• No momento que as estrelas estão no horizonte, a diferença de ângulo horário será $\Delta t = t_\alpha - t_\epsilon = \alpha_\epsilon - \alpha_\alpha$ (eq. 2)

▷ Isso ocorre pois elas são observadas no mesmo horário sideral, i.e. $T.S. = t_\alpha + \alpha_\alpha = t_\epsilon + \alpha_\epsilon$.

• Além disso, nessa situação, as estrelas estarão simetricamente dispostas em relação ao meridiano local. Desse fato, vem que o ângulo horário no ocaso da estrela é metade da separação angular deles (que é obtido pela equação 2!): $t = \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow t = \frac{\alpha_\epsilon - \alpha_\alpha}{2}$ (eq. 3)

• Substituindo a (eq. 3) em (eq. 2):

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\left(\frac{\alpha_\epsilon - \alpha_\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\delta} = -\frac{\cos\left(\frac{1h53m}{24h} \cdot 360°\right)}{\operatorname{tg}(-28°\,58{,}5')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \cong 1{,}59 \Rightarrow \boxed{\varphi = 57°\,51'N}$$

• Para o hemisfério Sul, o módulo do ângulo horário das estrelas será igual a $t = 12h - \frac{\Delta t}{2}$, o que resulta na segunda solução possivel,

$$\boxed{\varphi = -57°\,51' = 57°\,51'S}$$

Questão (T.2)

(a) - 20 pontos

▸ 1ª solução: Tome $c = 1$ e utilize o referencial inercial em que o próton está inicialmente em repouso. Antes da colisão, pode-se escrever que:

$$E_p = m_p \quad ; \quad E_\gamma = |p_\gamma| . \qquad (\text{eq. } 4)$$

• Para a partícula Δ, vem que $E_\Delta^2 = p_\Delta^2 + m_\Delta^2$ (eq. 5)

• Das leis de conservação,

$$E_p + E_\gamma = E_\Delta \quad ; \quad p_\gamma = p_\Delta \qquad (\text{eq. } 6)$$

• Combinando as equações acima, temos:

$$(m_p + E_\gamma)^2 = E_\gamma^2 + m_\Delta^2 \Rightarrow E_\gamma = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{2m_p} \qquad (\text{eq. } 7)$$

• Agora, iremos voltar para o referencial do laboratório, em que a energia do fóton é E_b. Lembrando que a energia de um fóton segue $E = hf$, podemos escrever o efeito doppler relativístico da seguinte maneira:

$$\frac{E_b}{E_\gamma} = \alpha = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \qquad (\text{eq. } 8)$$

• A partir daí, obtemos o fator de Lorentz,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} \qquad (\text{eq. } 9)$$

• A energia do próton, por sua vez, será:

$$E_p = \gamma m_p = \frac{m_p}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{m_p}{2}\cdot\left(\frac{2m_pE_b}{m_\Delta^2 - m_p^2} + \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{2m_pE_b}\right) \qquad (\text{eq. } 10)$$

• A eq. 10 fornece a resposta exata do problema. Aplicando as aproximações possíveis ($\alpha \ll \frac{1}{\alpha}$ ou $E_b \approx 0$), obtemos a resposta que o problema pediu:

$$\boxed{E_p = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{4E_b}}$$

▹ 2ª solução: Toda a solução será no referencial do laboratório, o que significa que os símbolos utilizados a seguir não são os mesmos da primeira solução.

Das leis de conservação, temos:

$$p_p - p_b = p_\Delta \quad ; \quad E_p + E_b = E_\Delta \qquad \text{(eq. 11)}$$

• Elevando as duas equações ao quadrado, e sabendo que $E_b^2 \approx 0$ e $p_b^2 \approx 0$, vem:

$$-2p_b p_p + p_p^2 \approx p_\Delta^2 \quad ; \quad E_p^2 + 2E_pE_b \approx E_\Delta^2 \qquad \text{(eq. 12)}$$

• Subtraindo as duas equações:

$$m_p^2 + 2E_pE_b + 2p_bp_p = m_\Delta^2 \Rightarrow 2E_b \cdot (E_p + p_p) = m_\Delta^2 - m_p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p + p_p = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{2E_b}.$$ Os prótons são ultra relativísticos, então $E_p \approx p_p \therefore$

$$2E_p = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{2E_b} \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{4E_b}}$$

(b) - 1 ponto

• Lembre que a energia do fóton é:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}06 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{E = 0{,}00117 \text{ eV}}$$

(c) - 4 pontos

• Restaurando os fatores de c na resposta do item (a), e substituindo os valores, vem $\boxed{E_p = 1{,}4 \cdot 10^{20} \text{ eV}}$

Questão (T.3)

- Iremos começar a questão admitindo que a densidade do asteroide não varia com o tempo, embora sua massa e seu raio variem:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{dM}{dt} - \frac{3M}{\frac{4}{3}\pi R^4} \cdot \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{3M}{R} \cdot \frac{dR}{dt} \qquad \text{(eq. 13)}$$

- Da continuidade e o acréscimo de massa pelo disco de poeira, vem:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \rho_{nuv} \cdot A \cdot v = \rho_{nuv} \cdot 4\pi R^2 \cdot v \qquad \text{(eq. 14)}$$

Em que ρ_{nuv} é a densidade da nuvem e v é a velocidade tangencial do asteroide.

- Igualando as duas equações obtidas, temos:

$$\rho_{nuv} \cdot 4\pi R^2 \cdot v = \frac{3 \cdot \rho \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{R} \cdot \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{\rho_{nuv}}{\rho} \cdot v \qquad \text{(eq. 15)}$$

- Também podemos determinar a densidade da nuvem a partir dos dados dos grãos:

$$\rho_{nuv} = \frac{4}{3}\pi (\phi/2)^3 \cdot \rho_p \cdot n_p, \qquad \text{(eq. 16)}$$

sendo ρ_p a densidade de massa dos grãos de poeira

- Substituindo (eq. 16) em (eq. 15),

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 \cdot \frac{\rho_p}{\rho} \cdot n_p \cdot v \xRightarrow{\rho_p = \rho} \frac{dR}{dt} = \frac{4\pi\phi^3}{24} \cdot n_p v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{R_0}^{2R_0} dR = \frac{4\pi\phi^3}{24} \cdot n_p \cdot v \cdot \int dt \Rightarrow \Delta t = \frac{6 R_0}{\pi \phi^3 \cdot n_p v} \qquad \text{(eq. 17)}$$

• Calculando a velocidade tangencial do asteroide:

$$\frac{M \cdot v^2}{a} = \frac{G M_* M}{a^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_*}{a}} = \sqrt{\frac{1{,}2\, G M_\odot}{a}} \quad \text{(eq. 18)}$$

• Com isso, obtemos o tempo com que o raio irá duplicar:

$$\Delta t = \frac{6 R_0}{\pi \phi^3 n_p} \left(\sqrt{\frac{G.(1{,}2 M_\odot)}{a}} \right)^{-1} = \frac{6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{\pi (10^{-6})^3 \cdot 10^5} \left(\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{40 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1{,}85 \cdot 10^{12}\ s = 5{,}9 \cdot 10^4 \text{ anos}}$$

Questão (T.4)

• Momento angular total do sistema:

$$L_B = L_{rotação} + L_{ORBITAL} = L_{GAS} \Rightarrow \left(L_{gas} = L_{Binária}, \text{ como dito na questão} \right)$$

$$\Rightarrow 10^3 \pi \left(\frac{8MR^2}{5T} \right) = 2 \cdot \left[\frac{2}{5} M R^2 \cdot \left[\frac{2\pi}{T} \right] \right] + 2 \cdot \left[M \cdot r_B^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_B} = \frac{2}{5} \cdot (10^3 - 1) \cdot \left(\frac{R}{r_B} \right)^2 \cdot \frac{1}{T} \approx \frac{2 \cdot 10^3}{5} \cdot \left(\frac{R}{r_B} \right)^2 \cdot \frac{1}{T} \quad \text{(eq. 19)}$$

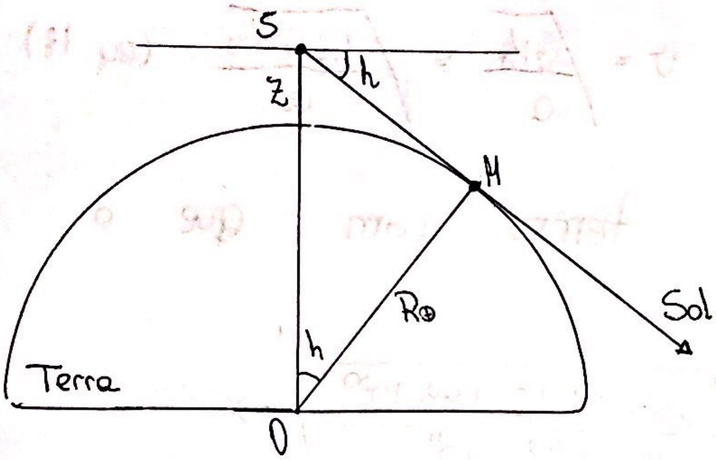
• Da 3ª lei de Kepler: $T_B^2 = \frac{(2\pi)^2}{2GM} \cdot r_B^3$ (eq. 20)

• Resolvendo o sistema formado pelas eq. 20 e 19, obtemos o seguinte resultado:

$$\boxed{r_B = 32\pi^2 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{R^4}{GM\, T^2} \right) \approx 3{,}16 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{R^4}{GM\, T^2} \right)}$$

$$\boxed{T = 2560\, \pi^4 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{R^6}{G^2 \cdot M^2 \cdot T^3} \right) = 2{,}49 \cdot 10^{10} \left(\frac{R^6}{G^2 \cdot M^2 \cdot T^3} \right)}$$

Questão (T.5)



• Da figura ao lado, assumindo $z \ll R_\oplus$ e $h \to 0$, temos:

$$\cos h = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + z} \Rightarrow z = R_\oplus \cdot \left(\frac{1}{\cos h} - 1\right) = R_\oplus \cdot (1 - \cos h)$$

$$\Rightarrow z = \frac{R_\oplus h^2}{2} \qquad (eq. 21)$$

• Para chegar a essa altitude, Mr. Seeds caminhou

$$l = \frac{z}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{R_\oplus h^2}{2 \operatorname{sen}\alpha} \qquad (eq. 22)$$

, em que α é a inclinação da montanha.

• Da cinemática, podemos escrever que $\omega = \frac{h}{(t - t_0)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \omega(t - t_0) \Rightarrow h^2 = \omega^2 (t - t_0) \qquad (eq. 23)$$

• Substituindo (eq. 23) em (eq. 22), obtemos:

$$l = \frac{R_\oplus}{2 \operatorname{sen}\alpha} \cdot \omega^2 \cdot (t - t_0)^2 \Rightarrow \frac{2l}{(t - t_0)^2} = \frac{R_\oplus \omega^2}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (eq. 24)$$

• Perceba que $\left[\frac{2l}{(t - t_0)^2}\right]$ é a aceleração que Mr. Seeds desenvolve para acompanhar o centro do disco solar.

Finalmente, $T = \frac{v}{a} = v \cdot \left[\frac{(t - t_0)^2}{2l}\right] \Rightarrow T = \frac{v \cdot \operatorname{sen}\alpha}{R_\oplus \omega^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 10^\circ}{6378 \cdot 10^3} \left(\frac{24h}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow \boxed{T = 25,75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 7,15 \cdot 10^{-3} \text{ horas}}$$

↳ resposta correta devido às unidades solicitadas pelo enunciado.

Questão (T. 6)

(a) - 10 pontos

• A componente da velocidade paralela ao campo magnético, $v\cos\phi$, permanece constante durante todo o movimento. No entanto, a componente $v\,\text{sen}\,\phi$ (ou Ωr) varia, pois o elétron é acelerado na direção perpendicular, entrando em um movimento harmônico simples. Com isso, pode-se escrever diretamente a seguinte relação:

$$F_B = \gamma \cdot m \cdot a \Rightarrow F_B = -\gamma \Omega^2 m r \qquad \text{(eq. 25)}$$

• A força exercida no elétron será, então:

$$\vec{F}_B = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = e\cdot\Omega\cdot r B\cdot \text{sen}\,\phi \Rightarrow e\Omega r B\,\text{sen}\,\phi = \gamma\Omega^2 m\cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{e\cdot B\cdot \text{sen}\,\phi}{\gamma\cdot m}} \qquad \text{(eq. 26)}$$

(b) - 30 pontos

• O observador vê a emissão sincrotron quando ele está dentro do cone de luz. No entanto, à medida que o elétron gira ao redor do campo, a direção de emissão muda. O observador, a princípio, está no cone de luz por um intervalo $\Delta t = \frac{2\theta}{\Omega} = \frac{2m}{eB}$. Porém, como o elétron se move em direção ao observador, ele observará a radiação por um tempo aparente, dado por:

$$\Delta t_a = \Delta t\cdot\left(1-\frac{v}{c}\right) = \Delta t\cdot\frac{1}{\gamma^2\cdot\left(1+\frac{v}{c}\right)} \; ; \quad v\approx c \; \therefore \; 1+\frac{v}{c}\approx 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t_a = \frac{2m}{eB}\cdot\frac{1}{2\gamma^2} \Rightarrow \boxed{\Delta t_a = \frac{m}{\gamma^2\cdot eB}} \qquad \text{(eq. 27)}$$

(c) - 5 pontos

- $v_{car} = \dfrac{1}{\Delta t_a}$, por definição. (eq. 28)

- Daí, $\boxed{v_{car} = \dfrac{\gamma^2 \cdot eB}{m}}$ (eq. 29)

(d) - 5 pontos

- Em primeira aproximação, podemos dizer que:

$$\tau = -\frac{E}{\left(\frac{dE}{dt}\right)} = \frac{-E}{-\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^4 B^2 \operatorname{sen}^2\phi}{m^4 c^5}\right)E^2} \Rightarrow \quad \text{(eq. 30)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 m^4 \cdot c^5}{e^4 \cdot B^2 \cdot \operatorname{sen}^2\phi} \cdot \frac{1}{E}}$$

Questão (T.7)

(a) - 40 pontos

- A variação de energia no tempo tem que ser igual a energia fornecida ao buraco negro:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial m \cdot c^2}{\partial t} \Rightarrow L_B = \dot{m}c^2 \Rightarrow 4\pi R_B^2 \sigma T_B^4 = \dot{m}c^2 \quad \text{(eq. 31)}$$

- A temperatura do buraco negro pode ser determida pela equoção fornecida na questão:

$$T_B = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \Rightarrow T_B^4 = \frac{\hbar^4 \cdot c^{12}}{8^4 \pi^4 G^4 M^4 k_B^4} \quad \text{(eq. 32)}$$

- Raio de Schwarzchild:

$$R_B = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow R_B^2 = \frac{4G^2M^2}{c^4} \quad \text{(eq. 33)}$$

• Substituindo (eq. 33), (eq. 32) e a expressão de σ em (eq. 31), temos:

$$4\pi \cdot \left(\frac{4G^2M^2}{c^4}\right) \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot K_B^4}{60\hbar^3 \cdot c^2}\right) \cdot \left(\frac{\hbar^4 \cdot c^{12}}{4096\pi^4 \cdot G^4 M^4 \cdot K_B^4}\right) = \dot{m} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar \cdot c^4}{15360\pi \cdot G^2 \cdot M^2} = \dot{m} \Rightarrow M^2 = \frac{\hbar \cdot c^4}{15360\pi \cdot G^2 \cdot \dot{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^2 = \frac{(6{,}62 \cdot 10^{-34}) \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^4}{15360 \cdot \pi \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11})^2} \cdot \left(\frac{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{2 \cdot 10^9 \cdot 10^3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 6{,}3 \cdot 10^5 \text{ Kg}}$$

(b) - 5 pontos

• Substituindo o valor de M em (eq. 33):

$$R_B = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}3 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} \Rightarrow \boxed{R_B = 9{,}3 \cdot 10^{-22} \text{ m}}$$

(c) - 5 pontos

• Substituindo M em (eq. 32):

$$T_B = \frac{(6{,}62 \cdot 10^{-34}) \cdot (3 \cdot 10^8)^3}{8\pi \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (6{,}3 \cdot 10^5) \cdot (1{,}38 \cdot 10^{-23})} \Rightarrow \boxed{T_B = 1{,}2 \cdot 10^{18} \text{ K}}$$

Questão (T.8)

(a) - 6 pontos

• Essa questão pode ser feita sem muita formalidade. Aqui, podemos substituir os valores fornecidos para $r \equiv R$ e fazer um tratamento dimensional sem perda de generalidade. Desenvolvendo a (eq. T8.1):

$$\frac{dT}{dr} \equiv \frac{\Delta T}{\Delta r} = -\frac{K \rho_r L_r}{acTr^2} \Rightarrow \frac{T}{R} = \frac{KM \cdot 4\pi\sigma R^2 T^4}{\frac{4\sigma}{c} \cdot c \cdot T^3 \cdot R^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \left(\frac{R^2}{M}\right) \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow [K] = \frac{[L]^2}{[M]}$$ ∴ K tem unidades de $m^2 \cdot kg^{-1}$ no SI.

(b) - 10 pontos

• Da equação fornecida no enunciado:

$$\frac{dT}{dr} \equiv \frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{0 - T_c}{R - 0} = -\frac{K \cdot 3M}{4ac\pi R^3} \cdot \frac{L}{T_c^3 R^2} \Rightarrow \left(K = 1 \text{ e } a = \frac{4\sigma}{c}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{T_c}{R} = \frac{-3ML}{16\sigma\pi R^5 T_c^3} \Rightarrow T_c^4 = \frac{1}{R^4} \cdot \left(\frac{3ML}{16\sigma\pi}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T_c = \frac{1}{R} \cdot \sqrt[4]{\frac{3LM}{16\sigma\pi}}} \qquad \text{(eq. 34)}$$

• A estrela está em equilíbrio hidrostático, então a seguinte relação deve ser válida:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho_r \cdot g \Rightarrow \frac{dP}{dr} \equiv \frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM}{R^2} \cdot \rho \Rightarrow \frac{0 - P_c}{R - 0} = -\frac{GM}{R^2} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_c = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}} \qquad \text{(eq. 35)}$$

(c) - 4 pontos

• Substituindo os valores disponíveis em (eq. 34) para encontrar a temperatura no centro.

$$T_c = \frac{1}{6{,}96 \cdot 10^8} \sqrt[4]{\frac{3{,}83 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 3}{16 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi}} \Rightarrow \boxed{T_c = 7{,}65 \cdot 10^6 \text{ K}}$$

• Analogamente, para a Pressão central, temos:

$$P_c = \frac{3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}99 \cdot 10^{30})^2}{4\pi\,(6{,}96 \cdot 10^8)^4} \Rightarrow \boxed{P_c = 2{,}69 \cdot 10^{14}\ N/m^2}$$

(d) - 6 pontos

• Basta manipular a equação (T8.2):

$$P_c = \frac{R_0 \rho_c}{\mu} \cdot T_c \Rightarrow \rho_c = \frac{P_c}{T_c} \cdot \frac{\mu}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_c = \frac{2{,}69 \cdot 10^{14}}{7{,}65 \cdot 10^6} \cdot \frac{0{,}5}{8{,}31} \Rightarrow \boxed{\rho_c = 2{,}11 \cdot 10^6\ Kg/m^3}$$

(e) - 14 pontos

• Supondo que a densidade da estrela é constante, obtemos, pela (eq. T8.2), o seguinte:

$$P_c = \frac{R_0}{\mu} \rho_c T_c \simeq \frac{R_0}{\mu} \frac{3M \cdot T_c}{4\pi R^3} \qquad \text{(eq. 36)}$$

• Igualando (eq. 36) e (eq. 35), temos:

$$\frac{R_0}{\mu} \cdot \frac{3M \cdot T_c}{4\pi R^3} = \frac{3GM^2}{4\pi R^4} \Rightarrow T_c = \frac{\mu \cdot GM}{R_0 \cdot R} \overset{\text{(eq. 34)}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{R_0} \cdot \frac{G \cdot M}{R} = \frac{1}{R} \sqrt[4]{\frac{3LM}{16\sigma\pi}} \Rightarrow \frac{\mu^4}{R_0^4} \cdot G^4 \cdot M^3 = \frac{3L}{16\sigma\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \underbrace{\left(\frac{16\sigma\pi\mu^4 G^4}{3R_0^4}\right)}_{\text{constante}} \cdot M^3,$$ em que R_0 é a constante dos gases.

$$\therefore L \propto M^3 \quad \text{e} \quad \boxed{\beta = 3}$$

■

(f) - 10 pontos

• O tempo requerido pela questão, tambem conhecido por tempo de queda livre, pode ser calculado da seguinte maneira:

$$R = \frac{1}{2} \cdot a_{sup.} t_{ql}^2 \equiv \frac{1}{2} g_0 t_{ql}^2 \Rightarrow t_{ql} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{ql} = \sqrt{\frac{2 \cdot (6,96 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}} \Rightarrow \boxed{t_{ql} = 37,6 \text{ minutos}}$$

Questão (T.9)

(a) - 5,5 pontos

• Para redshift pequeno, escrevemos $z = \frac{v}{c} \Rightarrow v = zc$.

• Com isso, da Lei de Hubble-Lemaître, $v = H_0 \cdot d \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = \frac{v}{H_0} = \frac{z \cdot c}{H_0} = \frac{0,05 \cdot 3 \cdot 10^5}{67,8} \Rightarrow \boxed{d = 221 \text{ Mpc}}$$

(b) - 13,75 pontos

• Utilizando a equação dada, iremos obter:

$$S_* = V n^2 \alpha = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \cdot \frac{M^2 \cdot \alpha}{m_H^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_* = \frac{6\alpha}{\pi D^3}\left(\frac{10^{11} M_\odot}{m_H}\right)^2 \Rightarrow S_* = \frac{6 \cdot 2,6 \cdot 10^{-19}}{\pi \cdot (10 \cdot 10^3 \cdot 3,0856 \cdot 10^{16})^3}\left(\frac{10^{11} \cdot M_\odot}{1,67 \cdot 10^{-27}}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_* = 2,40 \cdot 10^{56} \text{ fótons/s} \qquad \text{(eq. 37)}$$

▲ Dica: o cálculo de S_* pode extrapolar o limite da potência de 10; então calcule primeiro $\sqrt{S_*}$ e depois eleve ao quadrado!

• Com S_*, podemos calcular a potencia emitida (luminosidade) do objeto.

$$L = S_* . E_{íon} = 2,40 . 10^{56} . 13,6 . 10^{-18} . 1,60 \Rightarrow \boxed{L = 5,22 . 10^{38} \, W}$$

▷ O aluno também pode interpretar "tamanho" como o raio do Voorwerp, obtendo $S_* = 2,99 . 10^{55}$ fótos. s^{-1}
e $L = 6,50 . 10^{37}$ W.

(c) - 5,5 pontos

• Energia potencial de uma partícula acretada.

$$E_p = \frac{GMm}{R_s} = \frac{GMm}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)} \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} mc^2$$

• Uma parte dessa energia é emitida na forma de radiação, o que resulta em:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \eta . \frac{\partial E_p}{\partial t} = \eta . \frac{\partial m c^2}{\partial t} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\eta . \dot{m} c^2}{2}} \qquad \text{(eq. 38)}$$

(d) - 8,25 pontos

• Substituindo os valores em (eq. 38):

$$L = \frac{1}{2} . 0,1 . \left(\frac{2 . 1,99 . 10^{30}}{365 . 24 . 60 . 60}\right) . (3 . 10^8)^2 \Rightarrow \boxed{L = 5,68 . 10^{38} \, W}$$

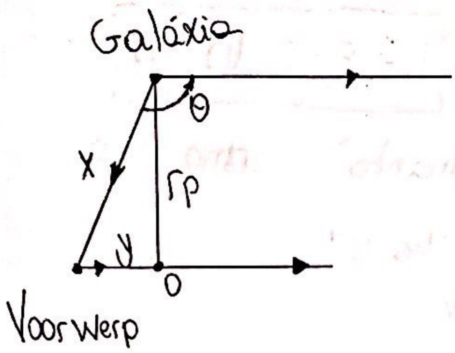
Conclusão: a luminosidade do quasar é alta o bastante para ionizar o Voorwerp.

(e) - 5,5 pontos

• De forma simples, fazemos:

$$r_p = \theta . d = 20'' . 221 \text{ Mpc} = \frac{20}{206265} . 221 . 10^3 \Rightarrow \boxed{r_p = 21,4 \text{ Kpc}}$$

(f) - 13,75 pontos



• A luz refletida pelo Voorwerp irá percorrer uma distância extra dada por $d = x + y$. (eq. 39)

• Cálculo de x: $x = \dfrac{r_p}{\cos(90-\theta)} = \dfrac{r_p}{\operatorname{sen}\theta}$ (eq. 40)

• Cálculo de y: $y = r_p \, tg(90-\theta) = -\dfrac{r_p}{tg\theta}$ (eq. 41)

• Tempo entre a galáxia e o ponto 0:

$\Delta t = \dfrac{d}{c} \Rightarrow$ (substituindo (eq. 40) e (eq. 41)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{r_p}{c}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{tg\theta}\right) = \frac{r_p}{c}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{r_p}{c \cdot \operatorname{sen}\theta}\cdot(1-\cos\theta)}$$

(g) - 2,75 pontos

• Substituindo os valores dados, vem:

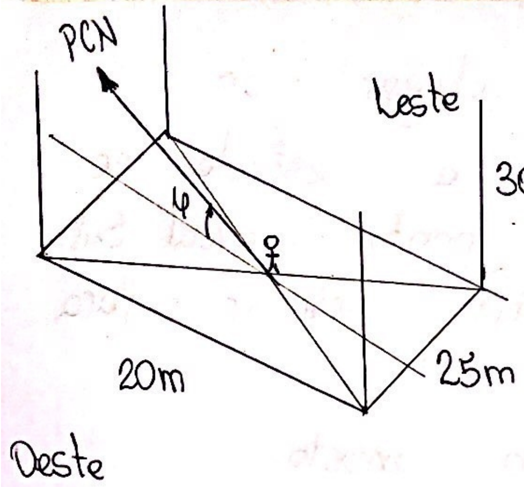
$$\Delta t = \frac{21{,}4 \cdot 10^3 \cdot 3{,}0856 \cdot 10^{16}}{2{,}998 \cdot 10^8 \cdot \operatorname{sen} 125}(1 - \cos 125) \Rightarrow \boxed{\Delta t = 4{,}24 \cdot 10^{12}\ s}$$

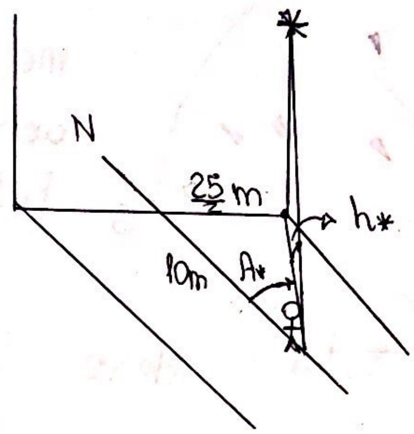
ou $\boxed{\Delta t = 134\,000 \text{ anos}}$

Questão (T.10)

(a) - 10 pontos

• Nas figuras da página seguinte teremos esquematizações da situação proposta no problema. Perceba que, ao olhar para o Norte, as estrelas que nascerem, no mínimo, no terraço do prédio terão trânsito total.



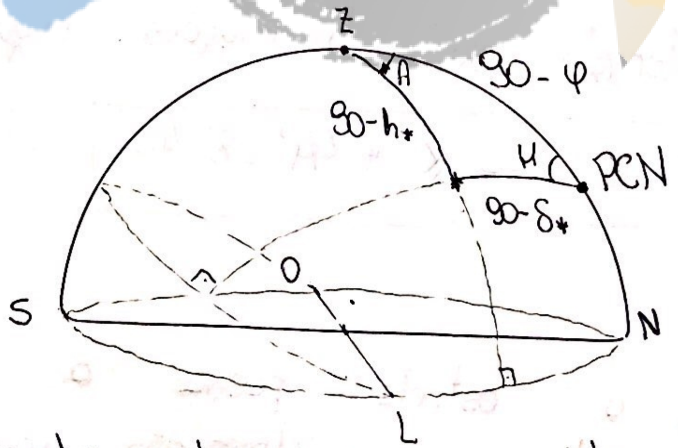


Com a figura do lado direito, podemos extrair o azimute e a altura da estrela nessa situação.

$$\triangleright\ tg\, h_* = \frac{h}{(Diagonal/2)} = \frac{2h}{\sqrt{d^2+L^2}} = \frac{2.30}{\sqrt{25^2+20^2}} \therefore h_* = 62° \quad (eq.42)$$

$$\triangleright\ tg\, A_* = \frac{(L/2)}{(d/2)} = \frac{25}{20} \Rightarrow A_* = 51° \quad (eq.43)$$

• Agora podemos montar o triângulo de posição para essas condições.

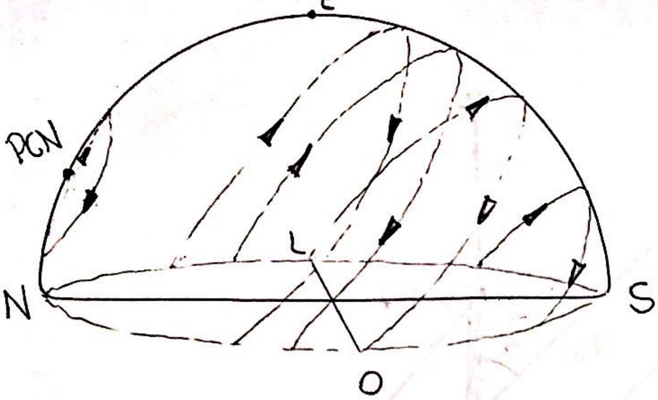


Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

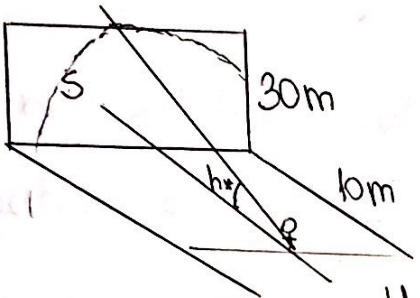
$$\cos(90-\delta_*) = \cos(90-h_*).\cos(90-\varphi) + sen(90-h_*)\, sen(90-\varphi)\cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(90-\delta_*) = 0{,}701 \Rightarrow \delta_* = +44°\,28'\,45'' \quad (eq.44)$$

• Esse valor é o limite superior de declinações possíveis. Para o limite inferior, precisamos lembrar da trajetória aparente que as estrelas tem no céu.

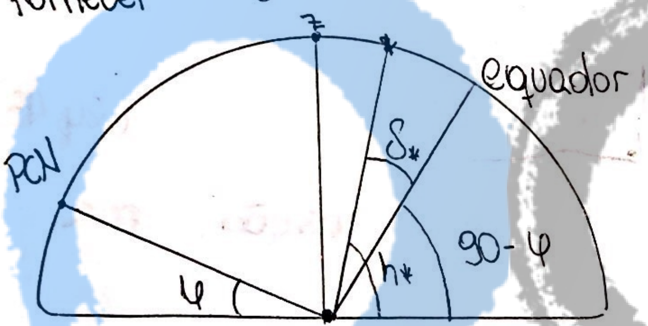


Antes de chegar ao meridiano local, a estrela se aproxima do ponto cardeal Sul. Então, o limite inferior para um Trânsito Total deve obedecer o exposto:



$$tg\,h_* = \frac{30}{10} \Rightarrow h_* = 72° \quad \text{(eq. 45)}$$

• Com isso, sua altura na culminação superior pode nos fornecer a sua declinação.



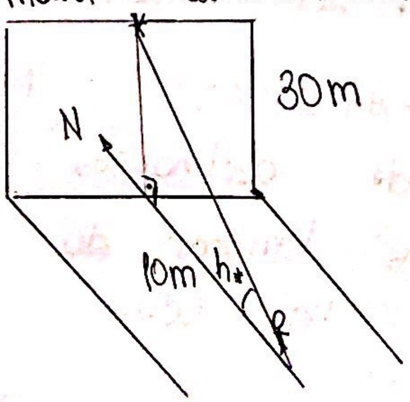
$$\Rightarrow (h_* - \delta_*) = 90 - \varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta_* = h_* + \varphi - 90 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta_* = +12°\,00'\,58'' \quad \text{(eq. 46)}$$

• Finalmente, o intervalo de declinações requerido é:

$$\boxed{+12°\,00'\,58'' \leq \delta_{TT} \leq +44°\,28'\,45''} \quad \text{(eq. 47)}$$

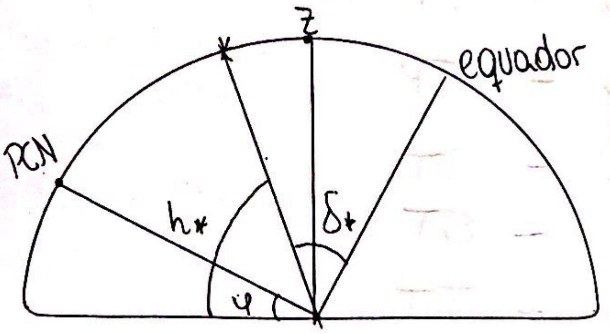
(b) - 12 pontos

• Para o Norte, a estrela passa a executar algum tipo de trânsito quando sua culminação ocorre no ponto de maior altura (análogo ao item anterior).



$$tg\,h_* = \frac{30}{10} \Rightarrow h_* \simeq 72° \quad \text{(eq. 48)}$$

• Daí, podemos desenhar:



$$\Rightarrow (h_* - \varphi) + \delta_* = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_* = 90 + \varphi - h_* \Rightarrow$$

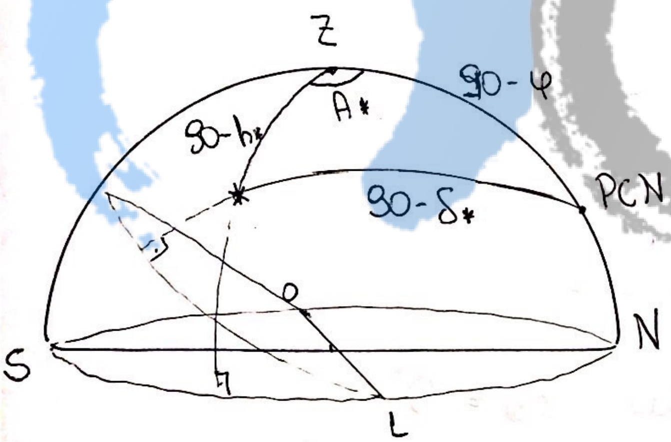
$$\Rightarrow \delta_* = +48° 53' 10'' \quad \text{(eq. 49)}$$

• Para o limite inferior de declinação, faremos o procedimento análogo ao primeiro passo do item (a).

$$tg(180 - A_*) = \frac{25}{2.10} \Rightarrow A_* = 129° \quad \text{(eq. 50)}$$

$$tg\, h_* = \frac{2.30}{\sqrt{25^2 + 20^2}} \Rightarrow h_* = 62°$$

• Desenhando o triângulo de posição, temos:



$$\cos(90 - \delta_*) = \operatorname{sen} h_* \operatorname{sen}\varphi + \cos h_* \cos\varphi \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_* = 11° 09' 49''$$

• Finalmente, para o Trânsito parcial, obtemos a seguinte relação:

$$\text{(eq.51)} \quad +44° 28' 45'' < \delta_{TP} \leq +48° 53' 10'' \quad \text{ou} \quad 11° 09' 49'' \leq \delta_{TP} < +12° 00' 58''$$

(c) - <u>8 pontos</u>

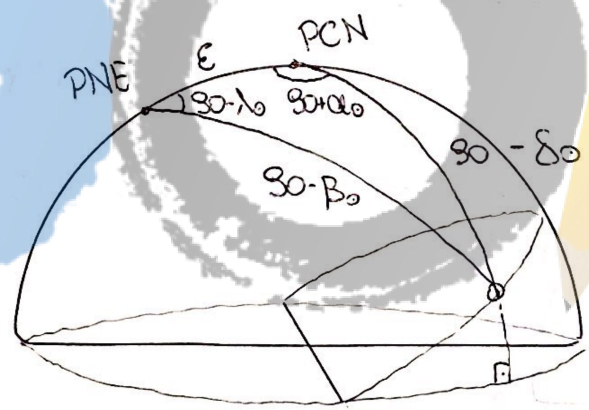
• Basta preencher a tabela com base nas equações 51 e 47.

α Boo - TT
η UMa - ST
α Vir - ST
α Lyr - TT
α CVn - TT
β Dra - ST

α Leo - TP
δ Cyg - TP
α UMi - ST
ϵ Vir - ST
α CrB - TT
α Ser - ST

(d) - 15 pontos

• Ele começa a transitar quando possui declinação igual a $\delta_{\odot min} = +11°\,09'\,49''$. Sabendo disso, faremos a conversão de sistema de coordenadas.



▷ Lei dos cossenos e aplicando $\beta_\odot = 0°$:

$$\cos(90-\delta_\odot) = \cos(90-\beta_\odot)\cos\varepsilon + \operatorname{sen}(90-\ )\operatorname{sen}\varepsilon\cos(90-\lambda_\odot) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\delta_\odot = \operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\lambda_\odot \qquad \text{(eq. 52)}$$

• Substituindo os valores em (eq. 52), vem:

$$\operatorname{sen}\lambda_\odot = \frac{\operatorname{sen}(11°\,09'\,49'')}{\operatorname{sen}(23°\,07')} \Rightarrow \lambda_\odot = +23°\,07'$$

$$\therefore \boxed{23°\,07' \leq \lambda_\odot \leq 156°\,53'} \qquad \text{(eq. 53)}$$

(e) - 10 pontos

- $\Delta\lambda = \dfrac{360°}{365,2422} \Rightarrow \Delta\lambda = 0,9856°/\text{dia}$ (eq. 54)

- Substituindo (eq. 53) em (eq. 54), obtém-se:

  ▷ $\Delta D = \dfrac{23°07'}{\Delta\lambda} = 23,45$ dias após 21 de Março (13 de Abril)

  ▷ $\Delta D' = \dfrac{156°53'}{\Delta\lambda} = 159,17$ dias após 21 de Março (27 de Agosto)

- O Sol fará qualquer tipo de trânsito entre 13 de Abril e 27 de Agosto!

(f) - 5 pontos

- A partir de (eq. 52), calculamos a longitude solar que permite isso:

  ▷ $\text{sen}\,\lambda_\odot = \dfrac{\text{sen}(12°00'58'')}{\text{sen}(23°27')} \Rightarrow \lambda_\odot = 32°01'$ (eq. 55).

- Finalmente, $\Delta D = \dfrac{32°01}{\Delta\lambda} = 32,49$ dias após 21/03 (22 de Abril)

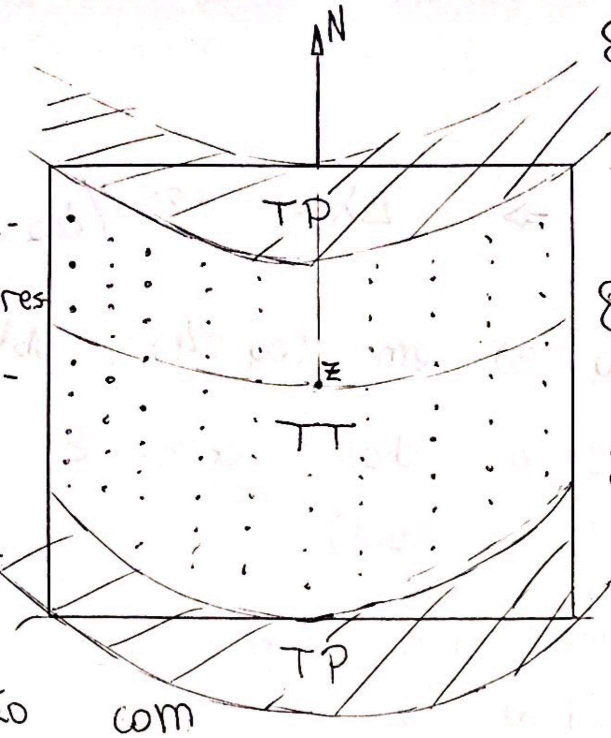
(g) - 5 pontos

- Diretamente, podemos afirmar que uma estrela que tem culminação superior no zênite terá $\delta_* = \varphi$. Portanto,

$$\boxed{\delta_z = +30°27'04''}$$

(h) - 10 pontos

- Reunindo todos os resultados relevantes para esse passo, podemos fazer o seguinte esquema:



$\delta_{TP+} = +48°\ 53'\ 10''$

$\delta_{TT+} = +44°\ 28'\ 45''$

$\delta_{Z} = +30°\ 27'\ 04''$

$\delta_{TT-} = +12°\ 00'\ 58''$

$\delta_{TP-} = +11°\ 09'\ 49''$

A região marcada com "///" corresponde às estrelas que executam um trânsito parcial entre os dois terraços. A região com ":::" se refere à estrelas com trânsito total.

Questão (T.11)

(a) - 4 pontos

• Supondo que a órbita da Terra é circular, escrevemos, pela resultante centrípeta:

$$\frac{M_\oplus . v_e^2}{a_\oplus} = \frac{G M_\odot M_\oplus}{a_\oplus^2} \Rightarrow v_e^2 = \frac{G M_\odot}{a_\oplus} = \frac{6{,}67.10^{-11} . 1{,}99.10^{30}}{1{,}496 . 10^{11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_e = 2{,}97 . 10^4\ m/s} \quad (eq. 56)$$

(b) - 12 pontos

• Essa situação pode ser tratada como uma colisão em uma dimensão. Da conservação do momento linear, temos:

$$M_\oplus . v_e + m_o v_i = -m_o v_f + M_\oplus v_e' \quad (eq. 57)$$

• Coeficiente de restituição, assumindo uma colisão elástica:

$$e = 1 = \frac{v_e' + v_f}{v_i - v_e} \Rightarrow v_e' = (v_i - v_e) - v_f \quad (eq. 58)$$

• Substituindo (eq. 58) em (eq. 57), desenvolvemos:

$$M_\oplus \cdot v_e + m_0 v_i = -m_0 v_f + M_\oplus \cdot (v_i - v_e - v_f) \Rightarrow v_f = \frac{M_\oplus \cdot (v_i - 2v_e) - m_0 v_i}{m_0 + M_\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{M_\oplus v_i \left(1 - \frac{m_0}{M_\oplus}\right) - 2M_\oplus v_e}{m_0 + M_\oplus} \approx \boxed{v_f \simeq v_i - 2v_e} \quad \text{(eq. 59)}$$

(c) – 4 pontos

• Substituindo (eq. 56) e que $v_i = 3{,}25\, v_e$ em (eq. 59):

$$v_f = 3{,}25\, v_e - 2v_e = 1{,}25\, v_e \therefore \boxed{v_f = 37{,}2\ \text{Km/s}}$$

(d) – 18 pontos

• Tome um instante t do movimento em que o satélite possui velocidade V e massa m. O momento linear do sistema nesse instante vale $p = mV$. (eq. 60)

• Após um intervalo dt, o momento passa a valer, devido a ejeção de gases, $p = (m + dm)(V + dV) - dm(V - v_{rel})$ (eq. 61)

• Assumindo que o sistema é isolado, $\frac{dp}{dt} = 0$ (eq. 62)

• Então, da conservação do momento:

$$mV = (m + dm).(V + dV) - dm(V - v_{rel}) \Rightarrow m\,dV = -dm\, v_{rel} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{v_f}^{V} dV = -v_{rel} \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} \Rightarrow V(m) - v_f = v_{rel} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V(m) = v_f + v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)} \quad \text{(eq. 63)}$$

(e) – 2 pontos

• Da relação dada, $\mu = -\frac{dm}{dt} \Rightarrow -\mu \int_0^t dt = \int_{m_0}^{m} dm \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(t) = m_0 - \mu t \quad \text{(eq. 64)}$$

• Substituindo (eq. 64) em (eq. 63), temos:

$$V(t) = v_f + v_{rel} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) \Rightarrow \boxed{V(t) = v_f - v_{rel}' \ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right)} \quad \text{(eq. 65)}$$

(f) - 4 pontos

• Primeiro é necessário saber em que tipo de órbita o satélite está. Analisando a energia total do sistema:

$$E_T = \frac{m_0 v_f^2}{2} - \frac{GM_\odot m_0}{r_\oplus} = m_0\left(\frac{v_f^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_\oplus}\right) = m_0\left(\frac{(37{,}2 \cdot 10^3)^2}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}496 \cdot 10^{11}}\right)$$

$$\Rightarrow E_T < 0 \rightarrow \text{elipse!}$$

• A partir daí, escrevemos:

$$-\frac{GM_\odot m_0}{2a} = \frac{m_0 v_f^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r_\oplus} \Rightarrow a = \frac{(GM_\odot/2)}{\frac{GM_\odot}{r_\oplus} - \frac{v_f^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{GM_\odot r_\oplus}{2GM_\odot - v_f^2 r_\oplus}} \quad \text{(eq. 66)}$$

(g) - 2 pontos

• Calculando o semi-eixo maior a partir de (eq. 66):

$$a = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30} - (32{,}7 \cdot 10^3)^2 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}} = 3{,}42 \cdot 10^{11}\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2{,}29 \text{ U.A.}} \quad \text{(eq. 67)}$$

• $r_a = 2a - r_\oplus \Rightarrow r_a = 3{,}57$ U.A. (eq. 68)

• É melhor lançar do periélio, pois ele terá maior velocidade e estará mais perto da órbita de Marte.

(h) – 4 pontos

• O semi-eixo maior da órbita de transferência é calculado por: $a_t = \frac{r_\oplus + a_M}{2} = \frac{1+1,52}{2} \Rightarrow a_t \approx 1,26\,UA$. (eq.69)

• Velocidade que o satélite deve ter em $r \to r_\oplus$:

$$-\frac{GM_\odot m_0}{2a_t} = \frac{m v^2}{2} - \frac{GM_\odot m_0}{r_\oplus} \Rightarrow v^2 = GM_\odot\left(\frac{2}{r_\oplus} - \frac{1}{a_t}\right) \Rightarrow v = 32,7\ Km/s$$

• Com isso, $\Delta v = v - v_f = 32,7 - 37,2 \Rightarrow \boxed{\Delta v = -4,52\ Km/s}$ (eq.70)

(i) – 3 pontos

• Substituindo (eq.70) em (eq.65):

$$\Delta v = -v_{rel} \ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) = \frac{4,52}{-4,52} \Rightarrow \mu t = (1 - e^{-1})\, m_0 \Rightarrow$$ (eq.71)

$$\Rightarrow t = 916\,s \Rightarrow \boxed{t = 15,3 \text{ minutos}}$$

(j) – 2 pontos

• Substituindo (eq.71) em (eq.64), $m(t) = 72500 - 50 \cdot 916 \Rightarrow$ (eq.72)

$$\Rightarrow \boxed{m = 26700\ Kg}$$

(K) – 4 pontos

• Velocidade que o foguete terá na órbita de Marte:

$$v_M^2 = GM_\odot\left(\frac{2}{a_M} - \frac{1}{a_t}\right) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{1,496 \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{2}{1,52} - \frac{1}{1,26}\right) \Rightarrow$$ (eq.73)

$$\Rightarrow v_M = 21,5\ Km/s$$

• Velocidade que ele deve ter para orbitar Marte:

$$v_M'^2 = \frac{GM_M}{R_M} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,107\, M_\oplus}{3389,5 \cdot 10^3} \Rightarrow v_M' = 3,55 \cdot 10^3\ m/s$$ (eq.74)

• Daí, de (eq.74) e (eq.73), $\boxed{\Delta v_M = -18,0\ Km/s}$

(m) - 3 pontos

- $18 = -4{,}52 \ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) \Rightarrow t = 524\,s$ (eq. 75)

- Substituindo em (eq. 64), $M_f = 26\,700 - 524 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{M_f = 514\,kg}$ (eq. 76)

(n) - 2 pontos

- Basta subtrair a massa final da inicial:

$|\Delta M_T| = 172\,500 - 514 \Rightarrow \boxed{\Delta M_T = 71\,986\ Kg}$ (eq. 77)

(o) - 3 pontos

- Por definição, o Δv_{TOTAL} é a soma dos módulos de todos os incrementos de velocidade.

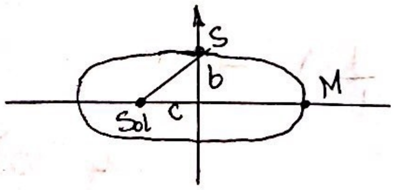
$\Delta v_{TOT} = \sum |\Delta v| = 4{,}52 + 18 \Rightarrow \boxed{\Delta v_{TOT} = 22{,}5\ Km/s}$ (eq. 78)

(p) - 6 pontos

- Da 3ª lei de Kepler: $T^2 = a^3 \Rightarrow \Delta t = \frac{a^{3/2}}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 0{,}707\ anos}$ (eq. 79)

(q) - 10 pontos

- No tempo t temos a seguinte configuração:



- Da 2ª lei de Kepler:

$$\frac{A_{SOL-S-M}}{\Delta T} = \frac{A_{elipse}}{T} \Rightarrow \Delta T = T \cdot \frac{A_{SOL-S-M}}{A_{elipse}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta T = T \cdot \left(\frac{\frac{bc}{2} + \frac{\pi ab}{4}}{\pi ab} \right) = T \cdot \left(\frac{c}{2\pi a} + \frac{1}{4} \right) = T \cdot \left(\frac{e}{2\pi} + \frac{1}{4} \right) \text{(eq. 80)}$$

- Da equação paramétrica da elipse: $r_\oplus = a_T \cdot (1 - e) \Rightarrow$

$$\Rightarrow e = 1 - \frac{1{,}00}{1{,}26} \Rightarrow e = 0{,}206 \quad \text{(eq. 81)}$$

- Substituindo (eq. 81) em (eq. 80):

$$\Delta T = 1{,}4 \cdot \left(\frac{0{,}206}{2\pi} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0{,}400 \text{ anos}} \quad \text{(eq. 82)}$$

(r) - 6 pontos

- Em um tempo Δt, Marte tem que estar no mesmo ponto que o satélite. Então, em $t=0$, ele terá uma separação angular equivalente ao suplementar do ângulo que ele tem que percorrer.

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{P_M} \cdot \Delta t = \frac{2\pi \, \Delta t}{(a_M)^{3/2}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}707}{(1{,}52)^{3/2}} \Rightarrow \Delta\theta = 136° \quad \text{(eq. 83)}$$

- Daí, $\theta = 180 - \Delta\theta \Rightarrow \boxed{\theta = 44{,}1°}$ (eq. 84)

(s) - 2 pontos

- $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{tempo} \\ \text{total}}}{t = \Delta t} - \underset{\substack{\searrow \\ \text{o que ele} \\ \text{ainda precisa} \\ \text{viajar}}}{\Delta T} \Rightarrow \boxed{t = 0{,}307 \text{ anos}}$ (eq. 85)

(t) - 6 pontos

- Analogamente ao item (r), escrevemos:

$$\Delta\theta' = \omega t = \frac{2\pi \cdot 0{,}307}{(1{,}52)^{3/2}} \Rightarrow \Delta\theta' = 59° \quad \text{(eq. 86)}$$

- Finalmente, $\alpha = \theta + \Delta\theta' \Rightarrow \boxed{\alpha = 103{,}1°}$ (eq. 87)

Acabou!

Sugestão de leitura adicional: excesso de velocidade hiperbólica.