SIMULADO NOIC 10 – PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIII IOAA E XI OLAA DE 2019

Nome: Nota:

PROVA TEÓRICA

Instruções

- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis;
- A prova tem duração total de **4 horas;**
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões;
- Essa prova é composta por 11 questões, divididas em 3 categorias:
    - Questões curtas **– 5 Questões**
    - Questões médias – **4 Questões**
    - Questões longas – **2 Questão**
- Segue abaixo uma tabela da pontuação máxima para cada questão.

Questão	Pontuação
1	20
2	25
3	25
4	25
5	25
6	50
7	50
8	50
9	55
10	75
11	100
Total	500

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_{\odot} = 1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}96 \times 10^{8}\ m$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3{,}83 \times 10^{26}\ W$
Magnitude absoluta visual	$M_{V_{\odot}} = 4{,}82$
Magnitude aparente visual	$m_{\odot} = -26{,}72$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778\ K$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220\ km\ s^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8{,}5\ kpc$
A Terra	
Massa	$M_{\oplus} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_{\oplus} = 9{,}81\ m/s^{2}$
Albedo	$\alpha_{\oplus} = 0{,}39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23°27'$
Duração do Ano Tropical	$365{,}2422\ dias\ solares\ médios$
Duração do Ano Sideral	$365{,}2564\ dias\ solares\ médios$
A Lua	
Massa	$M_{L} = 7{,}44 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$R_{L} = 1{,}74 \times 10^{6}\ m$
Distância Terra-Lua	$d_{L} = 3{,}78 \times 10^{8}\ m$
Período sinódico	$P_{S_L} = 29{,}5306\ dias$
Albedo	$\alpha_{L} = 0{,}14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_{L} = 5{,}14°$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1{,}496 \times 10^{11}\ m$
1 Parsec (pc)	$3{,}0856 \times 10^{16}\ m$
Constante gravitacional	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^{2}\ kg^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ J\ s$
Constante de Boltzmann	$k_{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Constante de Hubble	$H_{o} = 67{,}8\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2{,}998 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_{o} = 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26}\ W\ m^{-2}\ Hz^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m\ K$
Massa do elétron	$m_{e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do próton	$m_{p} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$
$1\ eV$	$1{,}60 \times 10^{-19}\ J$

Questões Curtas

(T.1) Estrelas Sob o Horizonte

Culauzis, um ótimo e influente astrônomo, está procurando um lugar bem específico da Terra. Ele escolherá esse local de modo que seja possível ver as estrelas $\alpha\, For$ ($\alpha_\alpha = 3h12m$ e $\delta_\alpha = -28°59'$) e $\epsilon\, CMa$ ($\alpha_\epsilon = 6h58m$ e $\delta_\epsilon = -28°58'$) simultaneamente no horizonte.

Quais seriam os valores de latitude possíveis que cumprem os requerimentos de Culauzis? A refração atmosférica pode ser negligenciada.

(T.2) Formação de partículas Δ

Partículas relativísticas obedecem a relação massa-energia abaixo

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad \text{(Eq. T2.1)}$$

Em que E é a energia relativística da partícula, p é seu momento relativístico, m é sua massa, e c é a velocidade da luz.

Um próton com massa m_p e energia E_p colide frontalmente com um fóton que possui energia E_b. Os dois se combinam e formam uma nova partícula de massa m_Δ, conhecida por Δ, ou simplesmente "partícula delta". Essa colisão ocorre em somente uma dimensão, que conserva o momento e a energia relativística.

(a) **Determine E_p em função de m_p, m_Δ e E_b.** Considere que E_b é muito pequeno em comparação aos outros parâmetros.

(b) Nesse caso, a energia do fóton provém da radiação cósmica de fundo, que é uma onda eletromagnética com comprimento de onda $1.06\, mm$. **Determine a energia desses fótons, expressando sua resposta em eV.**

(c) Assumindo esse valor de E_b, **qual é a energia do próton, em eV, que irá permitir que a reação descrita aconteça?** Esse resultado é um limite superior na energia do raios cósmicos. A massa do Δ é dada por $m_\Delta c^2 = 1232\, MeV$.

(T.3) Asteroide no Disco de Poeira

Considere uma estrela de massa $M_\star = 1{,}2 M_\odot$, e que tem um disco de poeira ao redor dela. Suponha que essa poeira seja constituída por grãos cujo diâmetro é $\phi = 10^{-6}\, m$ e a densidade numérica do meio é $n_p = 10^5\, grãos\, m^{-3}$. Nessa questão iremos analisar um asteroide com diâmetro $D = 1\, km$ e que orbita a estrela a uma distância de 40 U.A. Assuma que a densidade de massa dos grãos e do asteroide sejam iguais e de valor $\rho = 3000\, kg/m^3$.

Quanto tempo levará para o raio do asteroide duplicar?

(T.4) Estrelas Gêmeas e uma Nuvem de Gás

Duas estrelas idênticas orbitam entre si, imersas em uma nuvem esférica de gás de massa $2M$. As estrelas possuem massa M, raio R e giram em torno de si com período T. Sabe-se que o momento angular total do sistema binário é o mesmo do grupo de gás, que possui $L_{gás} = 10^3\pi\left(\frac{8}{5}\frac{MR^2}{T}\right)$.

Estime o período orbital, T_B, e o raio orbital, r_B, medido a partir do centro de massa desse sistema. Forneça sua resposta em termos de M, R, T e G.

(T.5) Escalando uma Montanha

Mr. Seeds está no Equador da Terra durante o equinócio vernal. No momento que o Sol começa a se pôr, ele começa a subir uma encosta na direção norte, inclinada de 10° em relação ao solo. Ele faz isso para ver o centro do disco solar no horizonte de forma exata e contínua.

Durante quantas horas ele conseguirá fazer isso se a máxima velocidade que ele desenvolve é 5 m/s? O relevo que envolve a montanha e a refração atmosférica podem ser negligenciados.

Questões Médias

(T.6) Emissão Sincrotron

Nos jatos provenientes de núcleos ativos de galáxias, nós temos populações de elétrons de altas energias em regiões com fortes campos magnéticos. Isso cria uma condição que favorece a emissão de fortes fluxos de radiação sincrotron. Em geral, esses elétrons são tão energéticos, que podem ser descritos como partículas ultra relativísticas, com $\gamma \gg 1$.

(a) Encontre uma expressão para Ω, que é a frequência angular de rotação de um elétron com fator de Lorentz γ e viajando a um ângulo ϕ em relação a um campo magnético B.

Ao passo que o elétron é acelerado devido ao campo magnético, ele emite radiação eletromagnética. Em um referencial que o elétron está momentaneamente em repouso, não existe direção preferida para a emissão da radiação. Metade é emitida para "frente" e o resto para "trás". No entanto, no referencial de um observador que vê o elétron se movendo com velocidade ultra relativística, com $\gamma \gg 1$, a radiação é concentrada em um cone com ângulo de abertura total $\theta \lesssim \frac{2}{\gamma}$. A medida que o elétron gira ao redor do campo magnético, um observador só irá ver pulsos de radiação se o cone passar pela linha de visada.

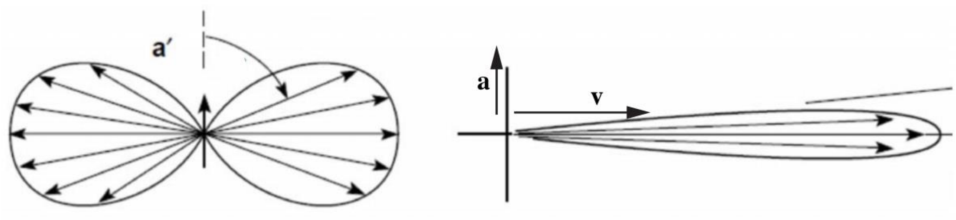

Figura T6.1 – O diagrama na esquerda mostra a distribuição de radiação de um elétron acelerando para o sentido positivo de y em um referencial em que ele está momentaneamente em repouso. O diagrama na direita mostra a distribuição de radiação para o mesmo elétron no referencial do observador citado no texto, em que a maior parte da radiação é emitida no cone. Nesse referencial, a direção da aceleração é representada pela letra a e sua velocidade pela letra v.

(b) Encontre a duração de um pulso, Δt, da radiação sincrotron observada de um elétron com fator de Lorentz γ, viajando a um ângulo ϕ com o campo magnético.

(c) Então, estime a frequência característica, υ_{car}, da radiação sincrotron.

A potência sincrotron total emitida é

$$P_s = \frac{1}{6\pi\epsilon}\left(\frac{q^4 B^2 sen^2\phi}{m^4 c^5}\right)E^2 \qquad \boxed{\text{(Eq. T6.1)}}$$

(d) Estime o tempo, τ, para que um elétron de energia E perca sua energia por resfriamento sincrotron.

(T.7) Alimentando um Buraco Negro

De acordo com o Grupo do Bando Mundial (Groupe de la Banque mondiale), a Terra produziu cerca de 2 bilhões de toneladas em desperdícios no ano de 2016. Para resolver esse problema, um graduando de física propôs uma ótima ideia: jogar todo esse resíduo, a uma taxa constante, em um buraco negro de Schwarzchild. Isso deve acontecer de tal forma que esse astro perca massa devido à radiação Hawking, na mesma taxa com que é adicionada massa.

(a) Calcule a massa do buraco negro que cumpre essa condição.
(b) Determine seu raio de Schwarzchild.
(c) Calcule sua temperatura.

As relações abaixo podem ser úteis:

- Temperatura Hawking de um buraco negro: $T = \dfrac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$

- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$

(T.8) Propriedades Centrais de uma Estrela

Se considerarmos somente a energia de radiação, o gradiente de temperatura para distâncias $0 < r \leq R$ do centro de uma estrela pode ser representado, em primeira aproximação, pela seguinte relação

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\kappa \rho_r L_r}{acT_r^3 r^2} \qquad \text{(Eq. T8.1)}$$

Em que ρ_r, L_r, T_r e κ são a densidade, luminosidade, temperatura e opacidade a uma distância r do centro. Note que o raio da estrela é R. Para essa questão, considere que $\kappa = 1$ e que ela está em equilíbrio hidrostático. Aqui, a é a constante de radiação e pode ser escrita como $a = 4\sigma/c$.

(a) Quais são as unidades de κ, no SI?
(b) Expresse a temperatura e a pressão no centro de uma estrela como função de L, M e R.
(c) Determine numericamente esses parâmetros, para uma estrela que nem o Sol.

Suponha que a pressão, P_r, de uma estrela possa ser aproximada para a seguinte função

$$P_r = \frac{\mathcal{R}\rho_r}{\mu} T_r \qquad \text{(Eq. T8.2)}$$

Em que $\mathcal{R}$ é a constante dos gases e μ o peso molecular médio.

(d) Tomando $\mu = 0,5$, **qual é a densidade no centro do centro do Sol?**

(e) Utilizando-se da equação T8.2, **mostre que existe uma relação Luminosidade-Massa dada por**

$$L \propto M^{\beta}$$

Qual o valor de β? Descreva numericamente a constante de proporcionalidade dessa relação.

(f) Se a pressão discutida nessa questão desaparecesse instantaneamente, **qual seria o tempo de colapso do Sol devido à ação gravitacional?**

(T.9) Voorwerp de Hanny

Voorwerp ("objeto" em holandês) de Hanny é um tipo raro de objeto astronômico, descoberto em 2007 pela professora Hany van Arkel enquanto participava do projeto *Galaxy Zoo*. Enquanto analisava a imagem da galáxia IC 2497, que fica na direção da constelação de Leão Menor, ela observou uma mancha verde próximo à galáxia.

Observações subsequentes mostraram que a galáxia IC 2497 está a um redshift $z = 0,05$. O Voorwerp está a uma distância similar e separação angular de 20 segundos de arco do centro da galáxia. Observações em rádio sugerem que Voorwerp é uma nuvem massiva de gás, feita de hidrogênio ionizado, com um tamanho de 10 kpc e massa de $10^{11}\ M_{\odot}$. Sendo assim, é provavelmente uma nuvem de gás que foi gerada durante a fusão com outra galáxia próxima.

Nessa questão você irá explorar a causa desse brilho de Voorwerp e aprenderá sobre um novo tipo de objeto astronômico: os quasares.

(a) Calcule a distância da galáxia até nós, em Mpc.

A taxa de ionização dos fótons de uma fonte (em fótons por segundo) pode ser expressa como

$$S_* = Vn^2\alpha$$

Em que V é o volume da região ionizada, n é a densidade numérica do gás ionizado e α é o coeficiente de ionização, sendo $\alpha = 2,6 \times 10^{-13}\ cm^{-3}s^{-1}$.

(b) **Calcule a potência da fonte requerida para ionizar completamente o Voorwerp (de formato esférico)**, dado que a energia de ionização do hidrogênio é 13,6 eV.

Uma possível fonte de radiação ionizante é o jato proveniente da acreção de matéria por um Buraco Negro Supermassivo (BNS) situado no centro dessa galáxia próxima. Essa acreção produz uma enorme quantidade de energia, sendo a maior causa de seu brilho. A uma galáxia que tem seu brilho devido a esse processo, damos o nome de quasar.

(c) A energia potencial gravitacional da matéria acretada a uma distância R_s, a uma taxa de acreção $\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial t}$, é convertida em radiação com eficiência η. **Mostre que a potência do BNS é dada por**

$$L = \frac{1}{2}\eta\dot{m}c^2$$

(d) A típica taxa de acreção de massa de um BNS ativo é da ordem de $2\,M_\odot\,ano^{-1}$ e, em geral, possui eficiência $\eta = 0{,}1$. **Calcule a luminosidade típica desse quasar. Compare a luminosidade do quasar com a potência necessária para ionizar o Voorwerp.**

Observações mais detalhadas mostraram que o núcleo dessa galáxia tem luminosidade $L \lesssim 10^{33}\,W$, então o buraco negro em IC 2497 não é ativo atualmente, i.e. a taxa de acreção é muito pequena. Acredita-se que os quasares acendam toda vez que o buraco negro começa a acumular uma nova fonte de matéria, e desligam quando o suprimento é esgotado. Portanto, esta pode ser a primeira evidência de um quasar desligando recentemente (por padrões astronômicos), com o Voorwerp refletindo a luz emitida pelo quasar enquanto ele ainda estava ativo. Isso faria com que IC 2497 fosse a galáxia mais próxima de nós a hospedar um quasar.

(e) Calcule a separação física projetada, r_p, entre a galáxia e o Voorwerp.

(f) Derive uma expressão para a diferença no tempo de viagem da luz entre os fótons que viajam diretamente para a Terra a partir da galáxia e os fótons refletidos primeiro no Voorwerp. Dê sua resposta como função de r_p, θ e outras constantes físicas. Perceba que θ é o ângulo entre as linhas de visada da Terra e o centro do Voorwerp medido por um observador no centro do IC 2497.

(g) Medições mais precisas mostraram que o Voorwerp está um pouco mais distante do que a galáxia, obtendo-se um valor de $\theta = 125°$. **Use esse fato, e o resultado encontrado em (f), para estimar um limite superior para quantos anos se passaram desde que o quasar parou de ser ativo.**

Questões Longas

(T.10) Observando Estrelas

Nesse momento o céu está perfeito para observar as estrelas. Mr. Seeds, percebendo isso, corre para ver o céu a partir de sua varanda. No entanto, há outro edifício bem na frente do seu, ocultando boa parte do céu! Então, ele decide descer para a área de lazer, em que ele terá um pouco mais de espaço para fazer suas observações diárias.

As varandas dos dois prédios são viradas exatamente para o Leste. Além disso, sabe-se que os edifícios possuem mesma altura e largura, de modo que estejam perfeitamente um de frente para o outro. Mr. Seeds está em um ponto da área de lazer, de forma que os prédios estejam equidistantes de sua posição e que haja máxima simetria.

As seguintes medições são bem conhecidas pelo astrônomo:

- Distância entre os prédios: $d = 25\ m$;
- Altura dos prédios: $h = 30\ m$;
- Largura dos prédios: $L = 20\ m$;
- Latitude do local: $\varphi = 30°27'04''N$.

Com base nessas informações, Mr. Seeds vira-se para o Norte e começa a fazer suas reflexões. Observe que o "trânsito" citado nos itens seguintes é somente entre os dois terraços. Imagine que a situação é semelhante ao astrônomo no fundo de um paralelepípedo sem teto!

(Parte A) Catalogando Estrelas

(a) Qual o intervalo de declinação, δ_{TT}, que uma estrela deve ter para que todo o seu trânsito seja observado entre os dois terraços dos prédios?

(b) Qual o intervalo de declinação, δ_{TP}, que uma estrela deve ter para que seu trânsito seja parcialmente feito entre os dois terraços dos prédios?

(c) Com isso, Mr. Seeds constrói uma tabela com várias estrelas visíveis em sua localidade. Ele as classifica em três categorias, em relação ao trânsito entre os terraços dos prédios: Trânsito Total (**TT**), Trânsito Parcial (**TP**) e Sem Trânsito (**ST**). Preencha a tabela da página seguinte, com base nas siglas indicadas anteriormente.

Tabela T10.1 – Catálogo de estrelas e suas classificações

Nome da Estrela	Ascensão Reta	Declinação	Classificação
α *Boo* – Arcturus	$14h15m38.34s$	$+19°10'13.8''$	
η *UMa* - Alkaid	$13h47m32.1s$	$+49°18'47.0''$	
α *Vir* - Spica	$13h25m11.53s$	$-11°09'41.5''$	
α *Lyr* - Vega	$18h36m56.50s$	$+32°47'08.0''$	
α *CVn* – Cor Caroli	$12h56m01.46s$	$+38°19'07.2''$	
β *Dra* - Rastaban	$17h30m25.94s$	$+52°18'05.1''$	
α *Leo* - Regulus	$10h08min21.98s$	$+11°58'03.0''$	
δ *Cyg* - Fawaris	$19h44m58.51s$	$+45°07'51.6''$	
α *UMi* - Polaris	$2h31m50.96s$	$+89°20'48.9''$	
ϵ *Vir* - Vindemiatrix	$13h02m10.23s$	$+10°57'33.9''$	
α *CrB* - Alphecca	$15h34m41.44s$	$+26°42'50.9''$	
α *Ser* - Unukalhai	$15h44m16.18s$	$+6°25'32.8''$	

(Parte B) Trânsito do Sol

Quando Mr. Seeds menos espera, já está começando a amanhecer. Ver o Sol lhe faz lembrar que é muito importante estudar essa querida estrela, então começa a fazer outros questionamentos.

(d) Qual será a longitude solar do Sol entre os momentos que ele irá transitar entre os dois terraços dos prédios?

(e) Entre quais dias do ano o Sol irá ser observado transitando entre os dois edifícios?

(f) A partir de que dia do ano o Sol passa a fazer um Trânsito Total entre as duas construções?

(Parte C) Observando o Zênite

Ao terminar os cálculos em relação ao Sol, Mr. Seeds percebe que outra noite já está começando. Ele volta seus olhos para o zênite e volta a fazer mais uma pequena série de perguntas.

(g) Qual a declinação, δ_Z, de uma estrela que passa ao zênite de Mr. Seeds?

(h) Com todos esses dados coletados, faça um esquema da situação proposta na questão. Para isso, o zênite do observador deverá estar no meio de seu desenho, e as linhas de declinação, δ_{TT}, δ_{TP}, δ_Z, também devem ser indicados de forma clara.

(T.11) Enviando um Tesla Roadster para Elon Musk

Estamos em 2033, e você já um grande engenheiro da empresa SpaceX!

Graças aos avanços das nossas tecnologias, seres humanos já estão começando a colonizar Marte. Inclusive, uma das pessoas que estão no planeta vermelho é o CEO da empresa, Elon Musk! Quando você menos espera, recebe uma mensagem dele por WhemtsApple, que diz:

> *"Olá jovem engenheiro que eu claramente sei o nome! Gostaria de dizer que vai tudo bem aqui por Marte, porém estou com alguns problemas... É muito difícil se deslocar por esse terreno sem um carro capaz e suficientemente estiloso ☐. Você poderia me mandar um Tesla Roadster adaptado para o solo marciano? Se puder serei extremamente grato (e irei te dar um aumento)."*

Para a sua sorte, você tinha acabado de lançar um Tesla Roadster acoplado a um satélite (quem nunca?). Para economizar combustível para manobras futuras, você decide utilizar a técnica do estilingue gravitacional antes de começar a órbita de transferência de Hohmann.

(Parte A) Estilingue Gravitacional

Está na hora de nosso querido carro de luxo iniciar sua incrível jornada até Marte. O sistema Satélite + Carro possui massa m_o, tal que $m_o \ll M_\oplus$, em que $M_\oplus$ é a massa da Terra.

O sistema está em uma órbita hiperbólica e se prepara para fazer um voo rasante. Tome a velocidade da Terra sendo igual a $\vec{v_e} = v_e\hat{\imath}$. O satélite se aproxima vindo da direção negativa do eixo x, faz a manobra e volta a se movimentar na mesma direção que estava antes, mas com diferente sentido. Em um referencial distante da Terra, a velocidade do satélite no eixo x é v_i, quando se aproximando, e v_f quando se afastando.

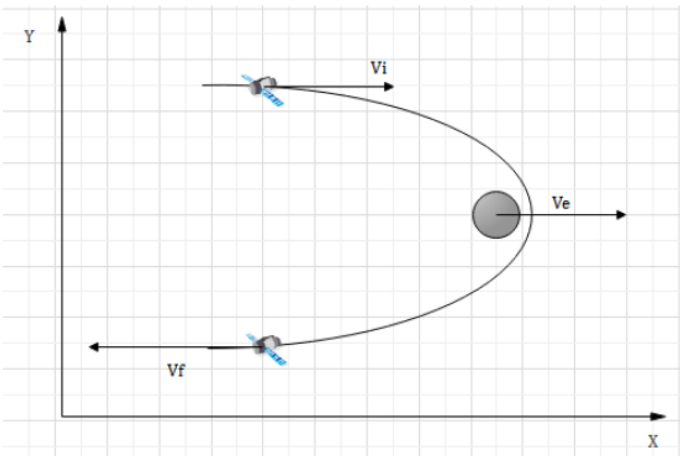

Figura T11.1 – Diagrama da situação proposta na questão

No instante antes de começar a manobra, a velocidade do satélite era igual a $\vec{v_i} = 3{,}25 v_e \hat{\imath}$. Assuma que a órbita da Terra ao redor do Sol é circular.

(a) **Determine a velocidade $\vec{v_e}$ da Terra imediatamente antes da manobra.**

(b) A partir das informações fornecidas no texto, **encontre uma expressão para v_f em função de v_e.**

(c) Com os resultados obtidos, **qual é a velocidade final, v_f, do satélite?** Expresse sua resposta em km/s.

(Parte B) Dinâmica do Satélite

Nessa parte iremos estudar como funciona o movimento desse satélite, que possui propulsores que o auxiliam para aumentar (ou diminuir) sua velocidade. Essa seção nos ajudará futuramente, então ainda não iremos analisar os parâmetros solicitados numericamente.

Os propulsores podem ser utilizados de modo a mudar o vetor velocidade do satélite em qualquer direção. Iremos assumir que a taxa de queima do combustível é constante e igual a $\mu = -\frac{dm}{dt}$. Você construiu tais propulsores de modo que os gases expelidos obtenham velocidade v_{rel} em relação ao sistema.

(d) **Determine uma expressão para a velocidade do sistema, $V(m)$, em que m é a massa do satélite para um dado instante.** Dê sua resposta em função de v_f, m_o, v_{rel} e m.

Pode ser útil saber que - $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ e $\int_{x_1}^{x_2} dx = x$.

(e) Em física, nós normalmente procuramos analisar o estado de um corpo em função do tempo. A expressão obtida em (d) é útil, mas medir a massa do satélite é razoavelmente difícil, já que estamos no espaço. Para isso, **encontre uma expressão para $V(t)$, em que $V(t)$ é a velocidade do sistema para um dado instante t.** Sua resposta deve estar em função de v_f, v_{rel}, m_o, μ e t.

(Parte C) Rumo a Marte

Finalmente, nosso querido Tesla Roadster está pronto para iniciar sua viagem até seu futuro dono. Nesta seção, vamos procurar entender quais parâmetros orbitais o sistema deve ter para que a manobra seja concluída. Basicamente, ao terminar manobra feita na Parte (A), pode-se considerar que o satélite já não está mais sob a ação gravitacional da Terra – somente a do Sol.

Preparado para colocar o carro do seu chefe para viajar pelo Sistema Solar? Então vamos começar! Nota: a órbita de Marte é circular, de raio $a = 1{,}52\ U.A.$

(f) Mostre que o semi-eixo maior da órbita adquirida pelo satélite necessariamente é da forma

$$a = \frac{r_{\oplus} G M_{\odot}}{2GM_{\odot} - v_f^2 r_{\oplus}}$$

Em que $r_{\oplus}$ representa a distância Terra-Sol.

(g) Conhecendo o periélio e o afélio dessa órbita, **de qual ponto seria melhor começar a manobra de transferência? A que distância ele fica do Sol?**

(h) Que incremento de velocidade, Δv, o foguete precisa ter para fazer uma transferência de órbita mínima energia até Marte?

Você estudou na Parte (B) a dinâmica de um satélite. Para essa questão, o satélite possui massa $m_o = 72500\ kg$ e o gás ejetado sai com velocidade relativa ao foguete $v_{rel} = 4{,}52\ km/s$. Além disso, os propulsores ejetam massa a uma taxa constante $\mu = 50\ kg/s$.

(i) Por quanto tempo é necessário ligar os propulsores para o foguete atingir o Δv calculado no item (h)? Indique também em que direção eles serão ligados.

(j) Qual a massa final do foguete, imediatamente antes de chegar em Marte?

(k) Ao chegar perto do planeta vermelho, **qual Δv_M deve ser aplicado ao sistema para que ele execute uma órbita circular de raio R_M ao redor do planeta?**

Dado – Raio de Marte $R_M = 3.389{,}5\ km$.

(l) Calcule por quanto tempo será necessário ligar os propulsores para aplicar tal Δv_M. Indique também em que direção eles serão ligados.

(m) Finalmente, determine a massa final do foguete, M_f, após essa manobra.

(n) Durante toda essa operação, **qual a massa total ejetada, em kg?**

(o) Qual o Δv_{TOT} total da operação?

(Parte D) Uma Noção de Tempo

Elon Musk também mandou uma mensagem para você, agora perguntando quanto tempo o foguete ainda irá demorar para chegar em solo marciano. Nesse instante, t, o satélite está sob o semieixo menor da órbita.

(p) A partir dos resultados anteriores, **quanto tempo se passa desde o início da órbita de transferência até o seu fim?**

(q) Das informações dessa seção, **quanto tempo ainda falta para que o carro chegue até o planeta?**

(r) **Qual é o ângulo entre a reta que liga o Sol e o periélio do satélite e a reta que liga o Sol e Marte no instante $t = 0$? A contagem de tempo começa quando a órbita de transferência se inicia.**

(s) **Determine t, em anos.**

(t) Por fim, **qual o ângulo formado pela reta Sol-Periélio (da órbita do satélite) e a reta Sol-Marte no instante t?**