Soluções – Simulado 04
Material escrito por Bismarck Moreira

“Ob-la-di, Ob-la-da, life goes on, bra!”
- Paul McCartney

Duvidas?
Mande um e-mail para
bismarckvasconcelos0703@gmail.com

Fortaleza - Brasil
06/08/2019

• Questão 1

• A trajetória da bigorna é uma reta de comprimento D, que pode ser identificada como uma elipse degenerada de semi-eixo maior $\frac{D}{2}$, em que, no intante inicial, a Terra e o objeto estão sob os focos.

Pela 3ª Lei de Kepler, vem:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \Rightarrow \frac{(2\Delta t)^2}{(D/2)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \quad \text{(eq. 01)}$$

• Do movimento lunar, sabemos que $\frac{T_L^2}{a_L^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}$ (eq. 02)

• Igualando as duas equações acima:

$$32\frac{\Delta t^2}{D^3} = \frac{T_L^2}{a_L^3} \Rightarrow D = a_L \cdot \left(\frac{\Delta t}{T_L}\right)^{2/3} \cdot 32^{1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D = 2{,}65 \cdot 10^5 \text{ Km}}$$

• Questão 2

• Tome uma estrela de magnitude aparente m e outra de magnitude m+1. Como as duas tem mesma luminosidade, escrevemos:

$$(m+1) - m = -2{,}5 \log\left[\frac{L}{4\pi d_{m+1}^2} \cdot \frac{4\pi d_m^2}{L}\right] = -2{,}5 \log\left(\frac{d_m}{d_{m+1}}\right)^2 \Rightarrow \text{(eq. 03)}$$

$$\Rightarrow \frac{d_{m+1}}{d_m} = 1{,}58 \Rightarrow \left(\frac{d_{m+1}}{d_m}\right)^3 = 3{,}98$$

• Como $N \propto d^3$ (densidade de estrelas é constante), vem:

$$\boxed{\frac{N_{m+1}}{N_m} = 3{,}98}$$

• Questão 3

• Velocidade de escape do aglomerado:

$$\frac{mV_{esc}^2}{2} = \frac{GMm}{r} \Rightarrow \frac{M}{r} = \frac{V_{esc}^2}{2G} \qquad (eq. 04)$$

• Expressando M em função de ρ e r:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \qquad (eq. 05)$$

• Igualando (eq. 05) e (eq. 04): $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{r} = \frac{V_{esc}^2}{2G} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3V_{esc}^2}{8\pi r^2 \cdot G} = \frac{3 \cdot (700 \cdot 10^3)^2}{8\pi \cdot (10 \cdot 10^6 \cdot 3{,}0856 \cdot 10^{16})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 3{,}21 \cdot 10^{-27}\ Kg/m^3}$$

• Questão 4

• Pela lei de Hubble, temos

$$v = H_0 \cdot d \Rightarrow d = \frac{z \cdot c}{H_0} \Rightarrow d^2 = \frac{z^2 \cdot c^2}{H_0^2} \qquad (eq. 06)$$

• Densidade de fluxo das galáxias da pesquisa:

$$S_\nu = \frac{F}{\Delta\nu} = \frac{L}{4\pi d^2} \cdot \frac{1}{\Delta\nu} \Rightarrow d^2 = \frac{L}{4\pi\,\Delta\nu \cdot S_\nu} \Rightarrow \qquad (eq. 07)$$

$$\Rightarrow \frac{z^2 \cdot c^2}{H_0^2} = \frac{L}{4\pi\,\Delta\nu \cdot S_\nu} \Rightarrow z = \frac{H_0}{2c}\sqrt{\frac{L}{4\pi\,\Delta\nu\, S_\nu}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{67{,}8 \cdot 10^3}{3{,}0856 \cdot 10^{16} \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^8}\sqrt{\frac{10^{30}}{\pi \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-26}}} \Rightarrow$$

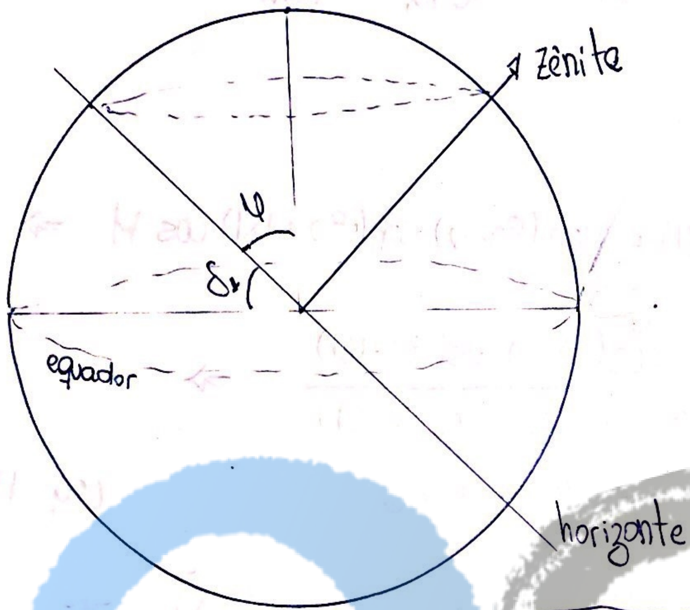
$$\Rightarrow \boxed{z = 0{,}413}$$

· Questão 5

· Condição para a estrela não se pôr:

$$\delta_* = 90 - \varphi \qquad (eq. 08)$$

· Na esfera celeste.



$$\text{Área}_{\text{CALOTA}} \propto 2\pi\,(1 - \cos \varphi/2)$$

· Daí,

$$\frac{A_c}{A_{TOT}} = \frac{n_c}{N_{AT}} = \frac{2\pi(1-\cos\varphi/2)}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{n_c}{N_{AT}} = \frac{4\pi\,\text{sen}^2\,\varphi/2}{4\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_c}{N_{AT}} = \left(\text{sen}^2\,\frac{\varphi}{2}\right)\cdot 100} \rightarrow \text{em } \%$$

· Questão 6

· Densidade de fluxo:

$$S_\nu = B_\nu \cdot \Omega = \frac{2k_B T}{c^2}\,\nu^2 \cdot \left(\frac{\pi R^2}{d^2}\right) \Rightarrow T = \frac{S_\nu}{2k_B \cdot \pi}\left(\frac{c\cdot d}{\nu \cdot R}\right)^2 \Rightarrow \qquad (eq. 09)$$

$$\Rightarrow T = \frac{S_\nu}{2k_B\cdot\pi}\left(\frac{\lambda d}{R}\right)^2 = \frac{0{,}1\cdot 10^{6}\cdot 10^{-26}}{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\pi}\left(\frac{0{,}1\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}}{6{,}96\cdot 10^{8}}\right)^2 \Rightarrow$$

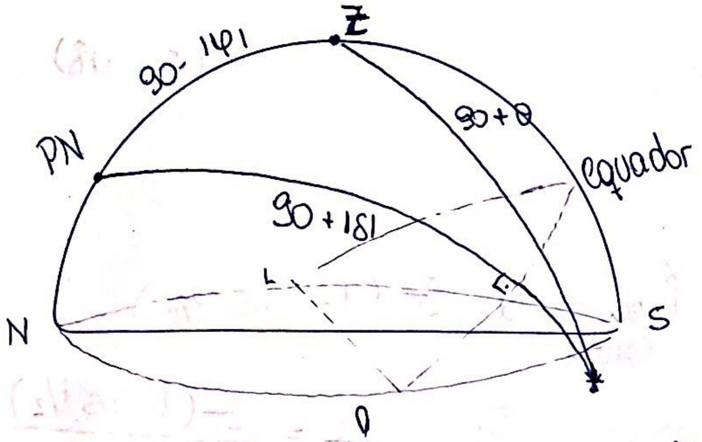
$$\Rightarrow \boxed{T = 5328\ K}$$

· Questão 7

· Encontrando o ângulo de horizonte.

$$\cos\theta = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{6{,}38\cdot 10^6}{6{,}38\cdot 10^6 + 2175} \Rightarrow \theta = 1{,}50° \qquad (eq. 10)$$

• Com isso, podemos desenhar o triangulo de observação da situação.



• Pela lei dos cossenos no triângulo ao lado, vem:

$$\cos(90+\theta) = \cos(90-\varphi).\cos(90+|\delta|) + \text{sen}(90-\varphi)\,\text{sen}(90+|\delta|)\cos H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos H = \frac{\cos(90+\theta) - \cos(90-\varphi)\cos(90+|\delta|)}{\text{sen}(90-\varphi)\ \text{sen}(90+|\delta|)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos H \cong -0{,}66 \Rightarrow H = 131{,}6^\circ = 8{,}77 \text{ horas} \quad \text{(eq. 11)}$$

• Porem, $T.S. = \alpha \pm H = \pm 8{,}77 + \left[22 + \left(\frac{57}{60}\right) + \left(\frac{39}{3600}\right)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} T.S._{OCASO} = 7\text{h } 44\text{min } 6{,}9 \text{ sec} \\ \hline T.S._{NASCER} = 14\text{h } 11\text{min } 12 \text{ sec} \end{array}}$$

• Questão 8

(a) • Do enunciado, $P = 3 + 4 \Rightarrow \boxed{P = 7 \text{ dias}}$

(b) • Do efeito doppler, vem:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow v_I = c.\left(\frac{5975 - 5985}{5985}\right) = -501{,}2 \text{ Km/s}.$$

$$\Rightarrow v_{II} = c.\left(\frac{6000 - 5985}{5985}\right) = 751{,}9 \text{ Km/s}.$$

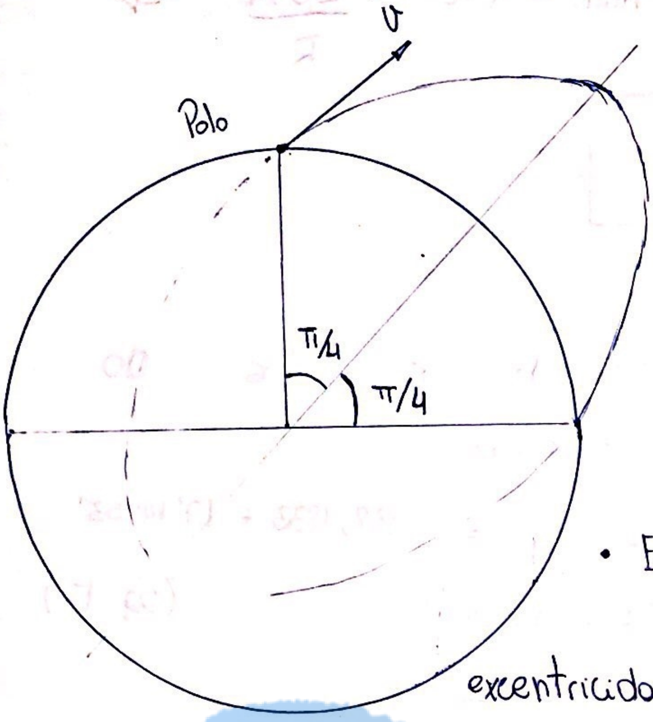
(c) • Conservando o momento angular:

$$v_I.(1+e) = v_{II}.(1-e) \Rightarrow e = \frac{1 - v_I/v_{II}}{1 + v_I/v_{II}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e = 0{,}2}$$

• Questão 9

• Para uma órbita Kepleriana, podemos escrever:



$$r = \frac{p}{(1 + e\cos(\varphi - \varphi_0))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{máx} = \frac{p}{1 - e} \qquad \text{(eq. 12)}$$

quando $\varphi - \varphi_0 = \pi$

• Em (eq. 12), $p = \frac{L^2}{m\mu}$ e a excentricidade é $e = \left(1 + \frac{2EL^2}{m\mu}\right)^{1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e = \left(1 + \frac{2Ep}{\mu}\right)^{1/2} \qquad \text{(eq. 13)}$$

• Para o problema dado,

$$\frac{p}{R_p} = 1 + \left(1 + \frac{Ep}{\mu}\right)^{1/2}\cos\frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{2Ep}{\mu}\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{p}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{Ep}{\mu} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2p}{R} + \frac{p^2}{R^2} = \frac{Ep}{\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2p} - \frac{2}{R} + \frac{p}{R^2} = \frac{E}{\mu} \qquad \text{(eq. 14)}$$

• Para encontrar a mínima energia, diferenciamos (eq. 14) em p e igualamos a zero:

$$-\frac{1}{2p^2} + R^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad \text{(eq. 15)}$$

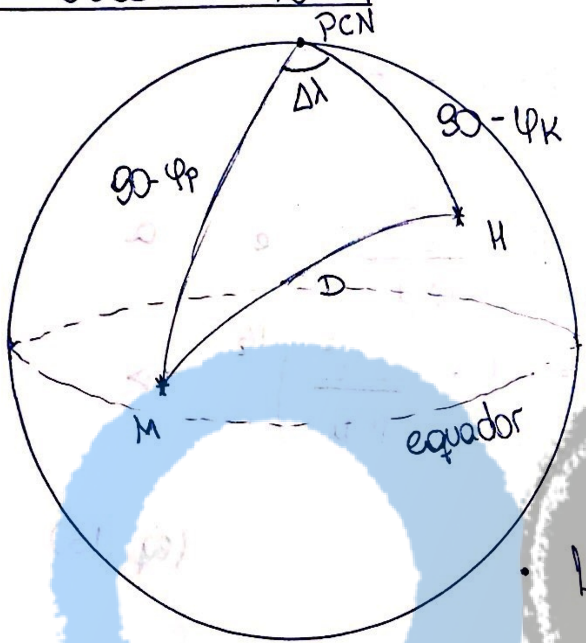
Portanto, $\frac{E_{min}}{\mu} = \frac{\sqrt{2} - 2}{R}$ (eq. 16)

- Da conservação de energia.

$$\frac{\mu(\sqrt{2}-2)}{R} = \frac{1}{2} m v_{min}^2 - \frac{\mu}{R} \Rightarrow V_{min}^2 = (\sqrt{2}-1)\,\frac{2GM}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{min} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)}\cdot V_{esc}}$$

- Questão 10



- Determinando os lados do triângulo esférico:

$\Delta\lambda = \lambda_P + \lambda_K = 98{,}1833 + 17°14'53''$

$\Rightarrow \Delta\lambda = 115{,}4314°$ (eq. 17)

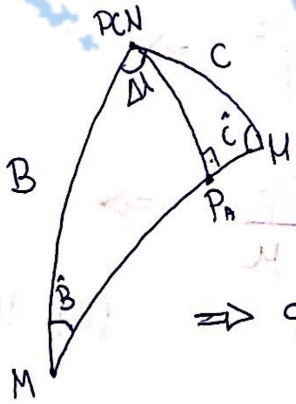
$90-\varphi_P = 70{,}9467° \rightarrow B$

$90-\varphi_K = 43{,}2303° \rightarrow C$

- Lei dos cossenos para descobrir D:

$\cos D = \cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos \Delta\lambda \Rightarrow$ (eq. 18)

$\Rightarrow D = 92{,}30°$



- Lei dos senos: $\frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen}\Delta\lambda} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen}\Delta\lambda}{\operatorname{sen} D} = 58{,}68°$ (eq. 19)

- Finalmente, no triângulo PCN P_A H:

$\frac{\operatorname{sen}\widehat{PPN}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen} 90} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{PPN} = \operatorname{sen}\hat{C}\operatorname{sen} C \Rightarrow \widehat{PPN} = 35{,}81°$ (eq. 20)

$\therefore \varphi_A = 90 - 35{,}81 \Rightarrow \boxed{\varphi_A = 54°11'12''}$

• Questão 11

(a) • Distância até o sistema:

$$d = \frac{1}{0{,}201''} \Rightarrow d = 4{,}98 \text{ pc} \quad \text{(eq. 21)}$$

• Semi-eixo do sistema em U.A.: $a = d\alpha = 4{,}98 \cdot 6{,}89 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 34{,}28 \text{ U.A.} \quad \text{(eq. 22)}$$

• Terceira lei de Kepler: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_B + m_c)} \Rightarrow m_B + m_c = \frac{a^3}{T^2} M_\odot \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_B + m_c = 0{,}655 \quad \text{(eq. 23)}$$

• Do centro de massa, obtemos: $\frac{a_B}{a_c} = \frac{m_c}{m_B} = 0{,}37 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_c = 0{,}37\, m_B \quad \text{(eq. 24)}$$

• Resolvendo o sistema, vem $\boxed{\begin{array}{l} m_B = 0{,}478\, M_\odot \\ \hline m_c = 0{,}177\, M_\odot \end{array}}$

(b) • Equação de Pogson:

$$M_B - M_{B\odot} = -2{,}5 \log \frac{L_B}{L_\odot} \Rightarrow 9{,}6 - 4{,}80 = -2{,}5 \log \frac{L_B}{3{,}83 \cdot 10^{26}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L_B = 4{,}60 \cdot 10^{24}\, W}$$

(c) • Da luminosidade de B, temos:

$$L_B = 4\pi R_B^2 \sigma T_B^4 \Rightarrow R_B^2 = \frac{4{,}60 \cdot 10^{24}}{4\pi\sigma (16900)^4} \Rightarrow R_B = 8{,}90 \cdot 10^6\, m \quad \text{(eq. 25)}$$

• Substituindo os dados obtidos:

$$\rho_B = \frac{m_B}{\frac{4}{3}\pi R_B^3} \Rightarrow \rho_B = 3{,}22 \cdot 10^8\, Kg/m^3 \quad \text{(eq. 26)}$$

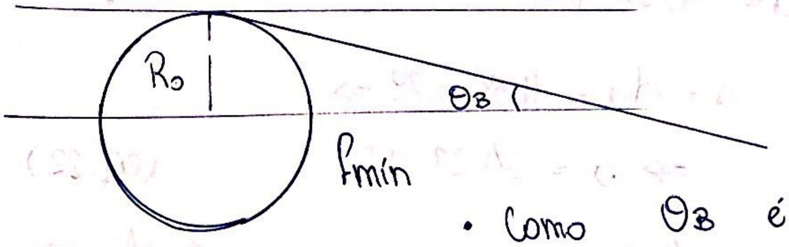
• Daí,

$$\frac{\rho_B}{\rho_\odot} = 2{,}29 \cdot 10^5$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\oplus} = 5{,}84 \cdot 10^4$$

• Questão 12

(a)



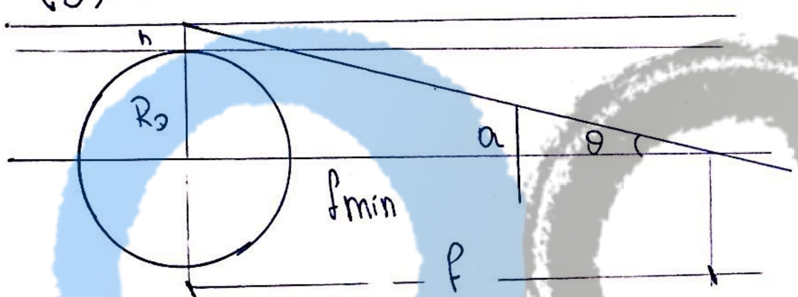
• $tg\,\theta_B = \dfrac{R_o}{f_{mín}}$ (eq. 27)

• Como θ_B é um ângulo pequeno,

$$tg\,\theta_B \approx \theta_B \Rightarrow \frac{2R_{sch}}{R_o} = \frac{4GM_o}{c^2 \cdot R_o} = \frac{R_o}{f_{mín}} \Rightarrow f_{mín} = \frac{R_o^2 c^2}{4GM_o} \quad \text{(eq. 28)}$$

$$\Rightarrow f_{mín} = \frac{(6{,}96 \cdot 10^8)^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}} \Rightarrow \boxed{f_{mín} \cong 549\ \text{U.A.}}$$

(b)



• Da geometria do problema:

$$\frac{R_o + h}{f} = \frac{2R_{sch}}{R_o + h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{(R_o + h)^2}{2R_{sch}} \quad \text{(eq. 29)}$$

$$\cdot\ tg\,\theta = \theta = \frac{a}{f - f_{mín}} \Rightarrow a = \frac{\theta}{2R_{sch}}\left[(R_o + h)^2 - R_o^2\right] = \frac{1}{R_o + h}\left[2R_o h + h^2\right]$$

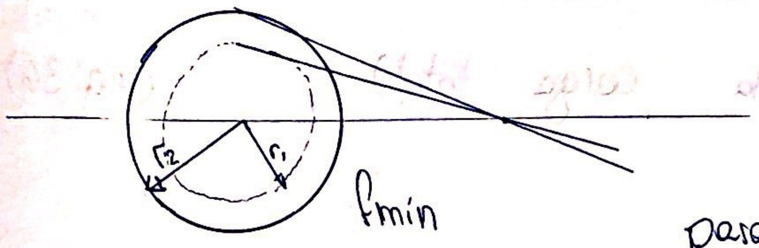
$$\Rightarrow a \cong \frac{1}{R_o} \cdot 2R_o \cdot h \Rightarrow a = 2h \quad \text{(eq. 30)}$$

• A amplificação é a razão entre as áreas de coleta de energia:

$$Am = \frac{A_o}{A_c} = \frac{\pi R_o^2}{2\pi R_o h} = \frac{R_o}{2h} \Rightarrow \boxed{Am = \frac{R_o}{a}}$$

(c) • Basta pegar dois círculos concêntricos de raio r_1 e r_2 dentro do Sol.

Veja:



• Como o aglomerado se comporta como uma lente convexa, todos os raios paralelos passam pelo foco.

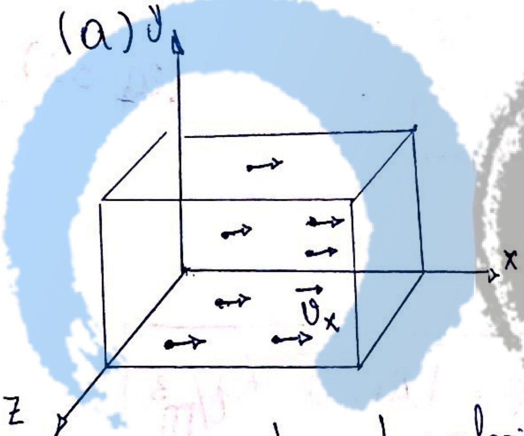
$$f_{min} = \frac{r_1^2}{2R_{sch_1}} = \frac{r_2^2}{2R_{sch_2}} \Rightarrow \frac{R_{sch_2}}{R_{sch_1}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \quad \text{(eq. 31)}$$

$$\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \boxed{M \propto r^2}$$

• Questão 13

(Parte A)

(a)



• Número de partículas atingindo a parede do contêiner.

$$n = \eta\, V_x \quad \text{(eq. 32)}$$

↳ por unidade de área a cada segundo

• Momento transferido: $P = n\, p_x \Rightarrow \boxed{P = \eta\, V_x \cdot p_x}$ (eq. 33)

↳ que é a pressão exercida no contêiner.

(b) Da equação dada: $\Delta p\, \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow p_x \approx \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_x^3 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{\Delta x^3} = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^3 \cdot n_e \Rightarrow \boxed{p_x = \left(\frac{h}{2\pi}\right) \cdot n_e^{1/3}} \quad \text{(eq. 34)}$$

(c) • Momento linear do elétron em x:

$$p_x = m_e V_x \Rightarrow V_x = \frac{p_x}{m_e}$$

• Em (eq. 33): $P = n_e \cdot \frac{p_x}{m_e} \cdot p_x = \frac{n_e}{m_e} \cdot p_x^2 = \frac{n_e}{m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot n_e^{2/3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{n_e^{5/3}}{m_e}} \quad \text{(eq. 35)}$$

(d) • A estrela deve ser neutra:

$$n_e = Z\, n_p \quad \text{(balanço da carga total)} \qquad \text{(eq. 36)}$$

• Descobrindo n_p:

$$\rho = A \cdot m_p \cdot n_p + m_e n_e \quad ; \quad m_e n_e \ll A m_p n_p$$

$$\Rightarrow \rho = A m_p \cdot n_p \Rightarrow n_p = \frac{\rho}{A \cdot m_p} \qquad \text{(eq. 37)}$$

• Com isso, $\boxed{n_e = \left(\frac{Z}{A}\right) \cdot \left(\rho/m_p\right)}$ (eq. 38)

(e) • Substituindo (eq. 38) em (eq. 35):

$$P = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_e} \cdot n_e^{5/3} = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \cdot \left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3} \cdot \frac{1}{m_e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{deg} = \frac{2}{m_e} \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \cdot \left(\rho/m_p\right)^{5/3}} \qquad \text{(eq. 39)}$$

(Parte B)

(f) • Diretamente, fazemos:

$$\rho = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi (10^{-2} R_\odot)^3} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi (10^{-2} \cdot 6{,}96 \cdot 10^{8})^3} \Rightarrow \boxed{\rho = 1{,}41 \cdot 10^{9}\ Kg/m^3}$$

(g) • Substituindo em (eq. 39):

$$P_{deg} = \frac{2}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2\pi}\right) \cdot \left(\frac{0{,}5 \cdot 1{,}41 \cdot 10^{9}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}\right)^{5/3} \Rightarrow \boxed{P_{deg} = 5{,}78 \cdot 10^{21}\ N/m^2}$$

(h) • Pressão dos gases: $P = \eta K_B T = (n_p + Z n_p) K_B T \approx Z n_p \cdot K_B T \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{Z}{A}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{m_p}\right) \cdot K_B T = 0{,}5 \cdot \frac{1{,}41 \cdot 10^{9}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^{7} \Rightarrow \boxed{P = 5{,}82 \cdot 10^{13} N/m^2}$$

(i) • $$\frac{P_{deg}}{P} = \frac{5{,}78 \cdot 10^{21}}{5{,}82 \cdot 10^{13}} \Rightarrow \boxed{\frac{P_{deg}}{P} \simeq 100}$$

· Temperaturas de 10^7 K são alcançadas somente no núcleo da estrela. Mesmo com essa temperatura por toda a estrela, P_{deg} ainda é maior que P!

(j) · Do equilíbrio hidrostático: $\frac{dP}{dr} = -\rho g \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = \rho g R \qquad \text{(eq. 40)}$$

· Igualando (eq. 40) e (eq. 39):

$$\frac{2}{m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \cdot \left(\frac{4\pi R^3}{3M}\right)^{5/3} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M^{1/3} \cdot R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{2}{m_e G}\right) \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{A m_p}\right)^{5/3}} \qquad \text{(eq. 41)}$$

(K) · Observe que $M^{1/3} \cdot R = cte. \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^{1/3} \cdot R = (M - \Delta M)^{1/3} \cdot (R - \Delta R) = M^{1/3} \cdot R \left(1 - \frac{\Delta M}{M}\right)^{1/3} \cdot \left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1 - \frac{\Delta M}{3M} - \frac{\Delta R}{R} \Rightarrow \frac{\Delta M}{M} = -3\frac{\Delta R}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{\Delta R} = -\frac{3M}{R}}$$

Acabou!

* Sugestão de leitura: Seção 10.4 do Livro Astronomy: A physical perspective (Kutner)

A questão 13 é baseada nessa seção ^-^