Gabarito

Lista de Física Estelar do curso NOIC de astronomia

Por Lucas Shoji

Qualquer dúvida mande para rukalucas@outlook.com :)

Para mais conteúdo, acesse https://noic.com.br/olimpiadas/astronomia/

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento, 27/04/2020

1)
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_1/r_1^2}{L_2/r_2^2} \overset{r_1 \approx r_2}{\approx} \frac{T_1^4 \cdot R_1^2}{T_2^4 \, R_2^2} = 10^{-0{,}4\Delta m} \rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = 1{,}7}$$

2) A energia liberada durante a vida da estrela é

$\Delta E = \eta \cdot M c^2$

↳ % de massa convertida em E.

O tempo de vida é:

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\eta M c^2}{L} = \frac{\eta M c^2}{K \cdot M^{\beta}} \rightarrow \Delta t \propto M^{1-\beta} \rightarrow \boxed{t = t_\odot \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1-\beta}}$$

3) Energia liberada do Sol em 1s, em N reações:

$L_\odot \cdot 1s = N \cdot 26{,}8 \, MeV.$

O número de neutrinos liberados é o dobro do número das reações. Também, a fração que atinge a Terra em relação ao total é $f = \pi R_\oplus^2 / (4\pi \, UA^2)$. Assim:

$$N_N = 2 \cdot \frac{L_\odot \cdot 1s}{26{,}8 \, MeV} \cdot \frac{\pi R_\oplus^2}{4\pi \, UA^2} \cdot \frac{1m^2}{\pi R_\oplus^2} \Rightarrow \boxed{N_N \sim 6 \cdot 10^{14}}$$

4) A massa convertida em energia nesse período é

$$\Delta M_\odot c^2 = L_\odot \cdot \Delta t \rightarrow \Delta M_\odot = \frac{L_\odot \Delta t}{c^2} = 1{,}345 \cdot 10^{20} \, kg$$

Pela 3ª lei de Kepler, desprezando mudanças no semi-eixo maior da órbita:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \rightarrow T \propto M^{-1/2} \rightarrow \frac{T + \Delta T}{T} = \sqrt{\frac{M_\odot}{M_\odot + \Delta M_\odot}} \rightarrow \boxed{\Delta T \sim -1 \, ms}$$

5) A massa dentro de um raio r é:

$$m(r) = \int_0^r \rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{21}\pi \rho_c r^3 (7 - 6\sqrt{r/R})$$

$$m(R) = M = \frac{4}{21}\pi \rho_c R^3 (7-6) \rightarrow \boxed{\rho_c = \frac{21M}{4\pi R^2}}$$

Pelo equilíbrio hidrostático,

$$dP = -\rho(r).\underbrace{\frac{Gm(r)}{r^2}}_{g}.dr \rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{21GM^2 r}{4\pi R^6}\left(7 - 13\sqrt{\frac{r}{R}} + 6\frac{r}{R}\right)}$$

6) Como na questão 2,

a) $t \propto \frac{E}{L} \propto \frac{M}{M^{3,5}} \rightarrow \frac{t}{t_\odot} = \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{2,5}$

Assim, substituindo $t = 4\cdot 10^9$ anos, temos a máxima massa para uma estrela com vida inteligente:

$M = 1,44 M_\odot$.

Como o tipo espectral é linear em $\log M$, a subclasse será:

$$\frac{\overset{G0V-F0V}{\overbrace{10}}}{\underset{F0V}{\log 1,6} - \underset{G0V}{\log 1,05}}(\log 1,6 - \log 1,44) = 2,5 \rightarrow \boxed{F2V \text{ ou } F3V}$$

Estrela de tipo

b) $P_{entra} = P_{sai} \rightarrow (1-a)\frac{\pi R^2 L}{4\pi d^2} = \varepsilon 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow T^4 \propto \frac{L}{d^2} \xrightarrow{T\ cte} \frac{L}{d^2} = \frac{L_\odot}{d_\odot^2}$

Como $L \propto M^{3,5}$, $\boxed{d = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,5/2} \text{UA}}$

6) cont.

c) Terceira Lei de Kepler:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(M+m)}{(a_M+a_m)^3} \quad . \quad a_M = \frac{m}{M} a_m \quad e \quad V = \omega . a_M . \rightarrow$$

$$V = \omega a_m \frac{m}{M} = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{G(M+m) \cdot a_m^2}{(a_M+a_m)^3}} \approx m \sqrt{\frac{G}{M a_m}}$$

Como pelo item (b) $a_m \approx d = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,5/2}$ UA e $V = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) \cdot c$:

$$m = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \sqrt{\frac{M}{G} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,5/2} \cdot UA}$$

Minimizando M, minimizamos m. $M_{min} = 1,44 M_\odot$, pelo item (a).:

$$\boxed{m = 0,554 M_\odot}$$

7) A pressão cinética (a normal) será:

a)

$$p_k V = nRT = NkT \rightarrow P_k = n k T$$
$\hookrightarrow N/V$.

Pelo equilíbrio, a pressão externa deve ser igual à interna:

$$n_\odot k T_{in} + \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} = n_\odot k T_{out} + \frac{B_{out}^2}{2\mu_0} \rightarrow \boxed{n_\odot = 1,44 \cdot 10^{23} /m^3}$$

b) A pressão atmosférica é $P_\oplus = n_\oplus k T_\oplus \rightarrow n_\oplus \approx 2,4 . 10^{25} /m^3$.

$\hookrightarrow \sim 10^5 Pa$ $\hookrightarrow \approx 300K$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{n_\oplus}{n_\odot} \sim 100.}$$

8) a) A pressão de radiação será:

$$p = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{dA} = \frac{d(E/c)}{dt} \cdot \frac{1}{dA} = \frac{F}{c} = \frac{\sigma T^4}{c}.$$

No equilíbrio, essa pressão equilibra a gravidade:

$$\frac{\sigma T^4}{c} \cdot 4\pi R^2 = \frac{GM}{R^2} \cdot \overbrace{\rho \cdot 4\pi R^2 \cdot \underset{10 cm}{e}}^{m} \rightarrow \boxed{\rho_a \approx 7{,}70 \cdot 10^{-3} \ kg/m^3}$$

b) A mudança de momentum nos fótons refletidos é

$$\Delta p = 2 \cdot p_0 = \frac{2 \cdot E}{c}.$$

Assim, a pressão de radiação será:

$$p' = (2 \cdot 50\% + 1 \cdot 50\%) \cdot \frac{F}{c} \rightarrow p' = \frac{1{,}5 \sigma T^4}{c}.$$

Assim, como a força dos fótons cresce 1,5 x, a gravidade, consequentemente a densidade, aumentará 1,5 x:

$$\boxed{\rho_b \approx 1{,}15 \cdot 10^{-2} \ kg/m^3}$$

9) a) A massa dentro de um raio r será:

$$m(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{R^3} \cdot r^3 \rightarrow g(r) = \frac{G m(r)}{r^2} = \frac{GMr}{R^3}$$

Podemos encontrar a pressão por uma integral:

$$\int_r^R dp = -\int_r^R \rho g \, dr \rightarrow p(R) - p(r) = -\int_r^R \rho \cdot \frac{GMr}{R^3} \, dr = \frac{\rho GM}{R^3}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

Como $\rho = M/(4\pi R^3/3)$,

$$\boxed{p(r) = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

9) cont.

b) A pressão será, por substituição na fórmula de (a):

$$p(R/2) = \frac{9GM^2}{32\pi R^4}$$

Como o gás é ideal:

$$pV = nR_G T \rightarrow p\underset{\downarrow}{\mu} = \rho R_G T \rightarrow T(R/2) \sim \frac{9GM^2 m_p}{32\pi R^4 \cdot R_G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}} \rightarrow$$

massa molecular $= m_p$

$$\boxed{T(R/2) \sim \frac{3GMm_p}{8R\,N_A\,k_B}}$$

c) Como $\langle U \rangle = -2\langle k \rangle$, $\Delta U + \Delta k = -\Delta k = 100J \rightarrow \Delta k = -100J$.

A energia cinética, portanto a térmica, diminui.

Logo, a estrela esfria.

10) No equilíbrio, a nuvem respeita o teorema do Virial:

$$k = -U/2 \rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} \cdot NkT = +\frac{3GM^2}{5R}\,\frac{1}{2}$$

γ = coef. de Poisson $= 5/3$

Como $N = M/(2m_p)$,

$$\frac{3}{2}\,\frac{M}{2m_p}\,kT = \frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R}\,\frac{1}{2}$$

Quando o termo da esquerda é maior, a energia cinética supera a gravitacional e a nuvem expande. Quando menor, a nuvem contrai - condição necessária para a estrela formar.