



## Lista de Física Estelar

### Curso NOIC de astronomia

Aqui temos uma coletânea de exercícios abrangendo várias ideias diferentes, mais ou menos em ordem de dificuldade.

Encontrou sugestões, dúvidas ou correções? Mande para [rukalucas@outlook.com](mailto:rukalucas@outlook.com).

#### 1) Para aquecer (IOAA 2010)

A diferença de brilho entre duas estrelas de sequência principal dentro de um mesmo aglomerado aberto é de 2 magnitudes. As temperaturas efetivas delas são 6000K e 5000K, respectivamente. Estime a razão entre os raios das estrelas.

#### 2) Tempo de vida de uma estrela (IOAA 2014 - Adaptado)

Supondo uma relação massa-luminosidade do tipo  $L \propto M^\beta$ , estime o tempo de vida para uma estrela de sequência principal em função de sua massa  $M/M_\odot$ , do tempo de vida do Sol,  $t_\odot$  e  $\beta$ . Assuma que a fração de massa convertida em energia luminosa é constante entre as estrelas e no tempo.

#### 3) Neutrinos Solares (IOAA 2011 e muitas seletivas)

Estime o número de neutrinos solares que passam por uma área de  $1\text{m}^2$  da atmosfera terrestre perpendicular ao Sol a cada segundo. Use o fato de que cada reação nuclear no Sol produz 26,8 MeV de energia e 2 neutrinos.

#### 4) Duração do ano

Encontre a variação na duração do ano causada pelas reações termo nucleares do Sol em 1000 anos.

#### 5) Pressão estelar (NAO 2019 - Curta 4)

Considere uma estrela com massa  $M$  e raio  $R$ . A densidade da estrela varia função do raio  $r$  de acordo com a equação  $\rho(r) = \rho_c(1 - \sqrt{r/R})$ , onde  $\rho_c$  é a densidade no centro da estrela. Encontre uma expressão para  $dP/dr$  em termos de  $G, M, R$  e  $r$ , onde  $P$  é a pressão em um dado raio  $r$ .

#### 6) Vida em outros planetas (IOAA 2017)

Um lugar para procurar por vida é em planetas orbitando estrelas de sequência principal. Um bom ponto de partida é um planeta com uma temperatura similar à



Terra e com flutuação de temperatura pequena. Assuma que, para uma estrela de sequência principal, a relação entre luminosidade  $L$  e massa  $M$  é dada por

$$L \propto M^{3,5}$$

Pode-se assumir que a energia liberada em todo o tempo de vida de uma estrela é proporcional a  $M$ . Para o Sol, ele terá um tempo de vida na sequência principal de cerca de 10 bilhões de anos. Assuma também que as subclasses espectrais das estrelas (0-9) são dadas em uma escala linear em  $\log M$ .

Classe Espectral	O5V	B0V	A0V	F0V	G0V	K0V	M0V
Massa ( $M_{\odot}$ )	60	17,5	2,9	1,6	1,05	0,79	0,51

- Se considerarmos que são necessários pelo menos  $4 \times 10^9$  anos para que uma forma de vida inteligente evolua, qual o tipo espectral (preciso até o nível da subclasse) da estrela mais massiva em torno da qual os astrônomos devem procurar por vida inteligente?
- Considere que o planeta alvo tenha a mesma emissividade  $\varepsilon$  e albedo  $a$  da Terra. Escreva a expressão para a distância  $d$  do planeta, em U.A., até sua estrela da Sequência Principal, de massa  $M$ , para que ele tenha a mesma temperatura da Terra.
- A existência de um planeta ao redor de uma estrela pode ser inferida pela variação na velocidade radial da estrela em relação ao centro de massa do sistema. Se o menor deslocamento Doppler no comprimento de onda detectável pelo observador é  $(\Delta\lambda/\lambda) = 10^{-10}$ , calcule a menor massa de um planeta como o do item (b), em unidades de massas terrestres, que pode ser detectado por este método, ao redor de uma estrela de Sequência Principal como a do item (a).

## 7) Mancha Solar (IOAA 2018)

Campos magnéticos são importantes na física das estrelas e das manchas solares. Em primeira aproximação, podemos modelar a fotosfera do Sol consistindo de um plasma, que pode ser tratado simplesmente como um gás ideal de componente único, e um campo magnético ( $B$ ), que tem uma pressão magnética associada  $p_B = B^2/(2\mu_0)$ . Ela se comporta como qualquer outra pressão física, exceto que ela é devida ao campo magnético, ao invés da energia cinética das partículas.

Suponha que a densidade numérica de partículas na fotosfera seja constante em todos os lugares, mas o campo magnético dentro de uma mancha solar ( $B_{in} = 0,1T$ ) é muito mais forte do que fora dela ( $B_{out} = 5 \times 10^{-3}T$ ). Do espectro do corpo negro, a temperatura dentro da mancha solar é  $T_{in} \sim 4000K$ , enquanto a temperatura do exterior é  $T_{out} \sim 6000K$  (o que é a razão das manchas solares parecerem mais escuras). Para uma mancha solar ser estável seu interior deve estar em equilíbrio com o exterior.



- a) Estime a densidade numérica das partículas do plasma na fotosfera solar.
- b) Compare a sua resposta com uma estimativa da densidade numérica das partículas da atmosfera na superfície da Terra

### 8) Esfera de Dyson

A esfera de Dyson é uma estrutura idealizada que cobriria uma estrela para coletar grande parte de sua energia. Imagine uma esfera de Dyson no nosso Sol, com espessura média de 10km. Qual seria a densidade de tal estrutura, supondo que ela:

- (a) tem albedo nulo.
- (b) tem albedo  $\alpha = 0,5$

### 9) Estrutura estelar (MIT - Adaptado)

Suponha uma estrela hipotética de massa  $M$ , raio  $R$  e densidade constante  $\rho$  em todo seu volume. A estrela é composta por um gás ideal não relativístico de hidrogênio ionizado. (Não se preocupe com a densidade constante, a estrela só existe na lista)

- (a) Encontre a pressão em função do raio  $p(r)$  da estrela.  
*Dica: A pressão externa  $P(R) = 0$ , e  $dp = -\rho g dr$*
- (b) Estime a temperatura na metade do raio  $T(R/2)$  da estrela.
- (c) Imagine que, por súbita vontade do universo, surjam 100 Joules extras de energia no interior da estrela. A estrela esquenta ou esfria?

### 10) Massa e raio de Jeans

Estime o raio mínimo e a massa mínima para uma nuvem esférica composta apenas de hidrogênio molecular colapse em uma estrela, em função de sua temperatura  $T$  e de sua densidade  $\rho$ . Esses valores são conhecidos como raio de Jeans e massa de Jeans.

### 11) Limites de massas estelares (BAAO 2019 - Adaptado)

No coração de toda estrela, acontece a fusão nuclear. Para a maioria das estrelas isso envolve hidrogênio sendo convertido em hélio, um processo que começa quando dois prótons estão perto o bastante para que a força nuclear forte aja entre eles. As menores estrelas são aquelas em que a temperatura em seus núcleos são o bastante para ocorrer a fusão, enquanto as maiores são aquelas em que a pressão de radiação dos fótons saindo das reações nucleares pode ultrapassar a força gravitacional que mantém a estrela unida.

Para uma estrela de sequência principal feita de plasma (gás completamente ionizado de elétrons e núcleons) que se comporta como um gás ideal, a temperatura no núcleo pode ser aproximada como



$$T_{int} \approx \frac{GM\bar{\mu}}{k_B R}$$

onde  $\bar{\mu} = m_p / (2X + 3Y/4 + Z/2)$ .

Nessa equação,  $M$  é a massa da estrela,  $R$  o seu raio,  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $\bar{\mu}$  a massa média das partículas de plasma, com  $m_p$  a massa do próton.

- a) Dado que a composição do Sol tem fração de Hidrogênio  $X = 0,72$ , fração de Hélio  $Y = 0,26$  e fração de “metais” (qualquer elemento mais pesado)  $Z = 0,02$ , estime a temperatura no centro do Sol.
- b) Classicamente, dois prótons precisam haver energia suficiente para superar a atração eletrostática e se fundirem. Assumindo que a distância mínima nesse modelo para o fenômeno ocorrer é  $b = 1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$ , encontre a temperatura  $T_{clássica}$  necessária para a fusão dos prótons. (Você pode achar essa temperatura muito acima da do item a)

Classicamente, o núcleo do Sol não é quente o suficiente para a fusão, ainda que ela esteja claramente ocorrendo. A chave para isso é que isso é um fenômeno fundamentalmente quântico, e então os prótons podem usar o tunelamento quântico para atravessarem a barreira de Coulomb (Eletrostática). Na mecânica quântica, a fusão acontece quando  $b = \lambda$  onde  $\lambda$  é o comprimento de onda de Broglie do próton e está relacionado com o momento  $p$  dele por  $\lambda = h/p$ .

- c) Calcule  $T_{quântica}$ , a temperatura necessária para a fusão segundo esse modelo.

Nas menores estrelas, a degenerescência eletrônica as impede de comprimirem em raio e então de atingirem uma temperatura no núcleo  $T_{int} \geq T_{quântica}$ . No limite da degenerescência eletrônica, a densidade numérica de elétrons se torna  $n_e = 1/\lambda_e^3$  onde  $\lambda_e$  é comprimento de onda de Broglie dos elétrons.

- d) Assumindo a estrela de densidade uniforme nesse limite com  $\rho = m_p n_e$  e os elétrons em equilíbrio térmico com o plasma, mostre que a massa mínima de uma estrela para que  $T_{int} = T_{quântica}$  é  $\sim 0,1M_{\odot}$ .

Nas maiores estrelas, a pressão de radiação empurra as camadas externas da estrela mais forte que a gravidade as puxa. A maior luminosidade para uma estrela é conhecida como a luminosidade de Eddington,  $L_{Edd}$ . A aceleração devida à pressão de radiação pode ser calculada como

$$g_{rad} = \frac{\sigma_T F}{2m_p c} (1 + X)$$

onde  $\sigma_T = 66,5\text{fm}^2$  é a seção de choque do elétron e  $F$  é o fluxo da radiação. Assumindo que as estrelas de sequência principal seguem a relação massa-luminosidade  $L \propto M^3$ , a massa máxima de uma estrela pode ser encontrada considerando que ela está emitindo  $L_{Edd}$ .

- e) Calcule a máxima massa para uma estrela com porcentagem de hidrogênio semelhante ao Sol.



## 12) Estrela

Suponha que uma estrela esférica e estática é composta de  $N$  partículas neutras, e que seu raio é  $R$ .

Sejam  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , e a seguinte equação de estado é satisfeita

$$PV = Nk \frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)} \quad (1)$$

onde  $P$  e  $V$  são a pressão no interior da estrela e o volume da estrela, respectivamente, e  $k$  é a constante de Boltzmann.  $T_R$  e  $T_0$  são as temperaturas na superfície ( $r = R$ ) e no centro ( $r = 0$ ), respectivamente. Suponha  $T_R \leq T_0$ .

- a) Simplifique a equação de estado (1) usando  $\Delta T = T_R - T_0 \approx 0$ . Este caso é chamado de "estrela ideal". (Dica: use a aproximação  $\ln(1 + x) \approx x$  para pequenos valores de  $x$ )

Suponha que a estrela passe por um processo quase-estático, no qual ela pode passar por pequenas contrações e expansões, mas sem invalidar a equação de estado (1). A estrela satisfaz a Primeira Lei da Termodinâmica

$$Q = \Delta M c^2 + W \quad (2)$$

Onde  $Q$ ,  $M$ , e  $W$  são o calor, massa da estrela, e trabalho, respectivamente,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, e  $\Delta M \equiv M_{final} - M_{inicial}$ .

No próximo item, iremos assumir  $T_0$  constantes, enquanto  $T_R \equiv T$  é variável.

- b) Encontre a capacidade térmica da estrela a volume constante  $C_v$  em termos de  $M$ , e a capacidade térmica a pressão constante  $C_p$  em termos de  $C_v$  e  $T$ . (Dica: use a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  para pequenos valores de  $x$ )
- c) Suponha agora que  $C_v$  é constante e que o gás passa por um processo isobárico, de modo que a estrela produz calor e o irradia para o espaço.
- d) Encontre o calor produzido pelo processo isobárico, se as temperaturas inicial e final forem  $T_i$  e  $T_f$ , respectivamente.
- e) Suponha que um observador está muito distante da estrela. Usando as informações do item c, estime a distância do observador até a estrela.

Para os próximos dois itens, assume-se que a estrela é o nosso Sol.

- f) Se a luz solar for monocromática, com frequência  $5 \times 10^{14}$  Hz, estime o número de fótons irradiados pelo Sol a cada segundo.
- g) Calcule a capacidade térmica  $C_v$  do Sol assumindo que sua temperatura superficial varia de 5500 K até 6000 K em um segundo.

**Sugestão adicional: Questão longa SAO 2019**



## Tabela de Constantes

### O Sol

Massa	$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raio	$R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26} \text{ W}$
Magnitude absoluta visual	$M_{V\odot} = 4,82$
Magnitude aparente visual	$m_{\odot} = -26,72$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778 \text{ K}$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220 \text{ km s}^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot GC} = 8,5 \text{ kpc}$

### A Lua

Massa	$M_L = 7,44 \times 10^{22} \text{ kg}$
Raio	$R_L = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$
Distância Terra-Lua	$d_L = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$
Período sinódico	$P_{SL} = 29,5306 \text{ dias}$
Albedo	$\alpha_L = 0,14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_L = 5,14^\circ$

### Constantes físicas

1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1,496 \times 10^{11} \text{ m}$
1 Parsec (pc)	$3,086 \times 10^{16} \text{ m}$
Constante gravitacional	$G = 6,671 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante de Coulomb	$k = 8,988 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$
Constante de Hubble	$H_0 = 70,0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$
Constante de Wien	$b = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Massa do elétron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do próton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Carga elementar	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Comprimento de Repouso da Linha H- $\alpha$	$\lambda_{H\alpha 0} = 6562,8 \text{ \AA}$