SIMULADO NOIC 11 – PROVA TEÓRICA
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA
XIV IOAA E XII OLAA DE 2020

Nome: Nota:

PROVA TEÓRICA

Instruções

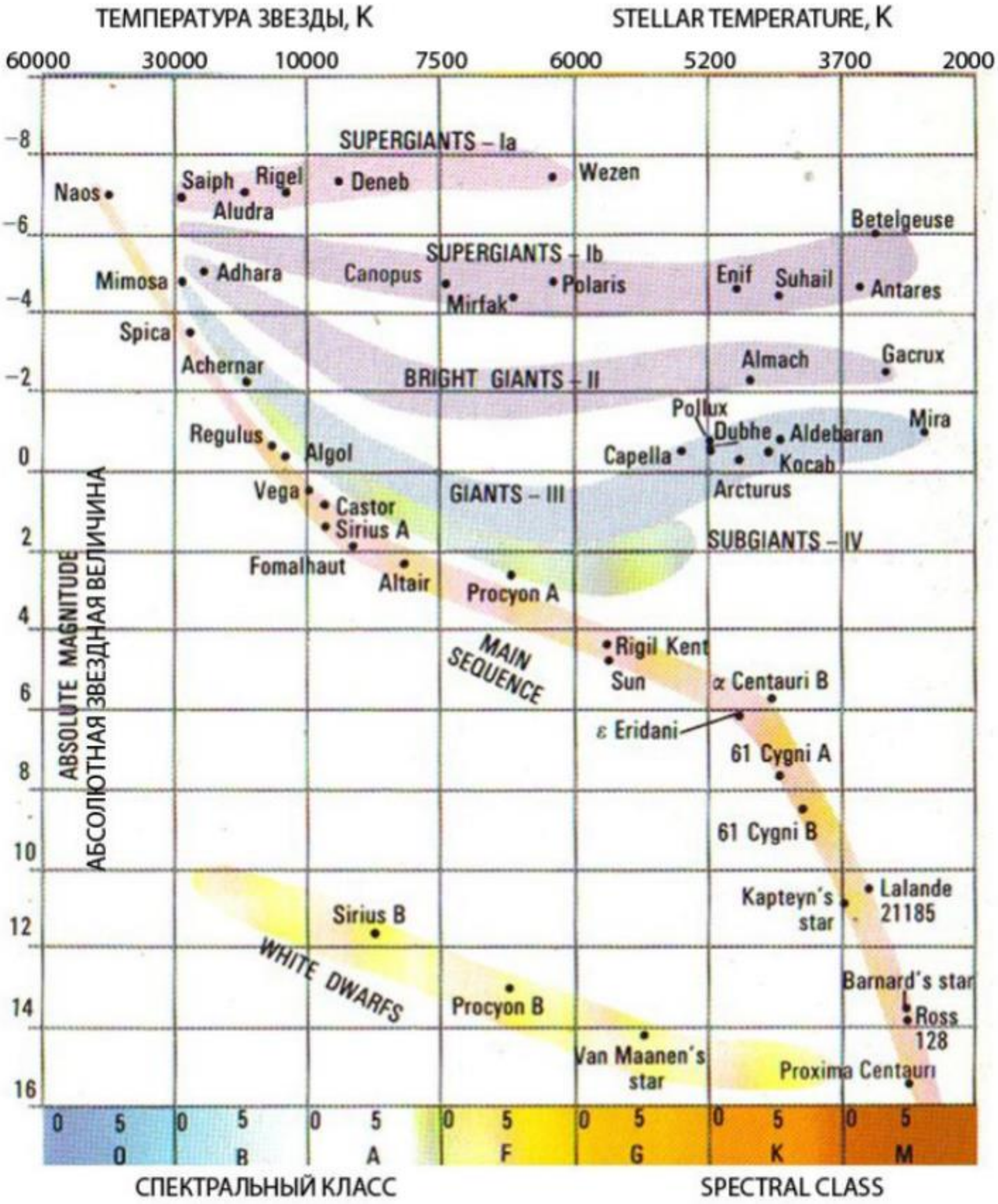
- A prova é individual e sem consultas;
- Suas soluções podem ser feitas a lápis;
- A prova tem duração total de **4 horas;**
- É permitido o uso de calculadora científica, não programável, para auxiliar nos cálculos das questões;
- Essa prova é composta por 14 questões, divididas em 3 categorias:
    - Questões curtas **– 5 Questões**
    - Questões médias – **5 Questões**
    - Questões longas – **2 Questões**
- Segue abaixo uma tabela da pontuação máxima para cada questão.

Questão	Pontuação
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10
6	20
7	20
8	20
9	20
10	20
11	75
12	75
Total	300

Tabela de Constantes

O Sol	
Massa	$M_{\odot} = 1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}96 \times 10^{8}\ m$
Luminosidade	$L_{\odot} = 3{,}83 \times 10^{26}\ W$
Magnitude absoluta bolométrica	$M_{V_{\odot}} = 4{,}74$
Magnitude aparente bolométrica	$m_{\odot} = -26{,}83$
Temperatura Superficial	$T_{\odot} = 5778\ K$
Velocidade orbital na Galáxia	$v_{\odot} = 220\ km\ s^{-1}$
Distância até o centro galáctico	$d_{\odot_{GC}} = 8{,}5\ kpc$
A Terra	
Massa	$M_{\oplus} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
Raio	$R_{\odot} = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$
Aceleração da gravidade na superfície	$g_{\oplus} = 9{,}81\ m/s^{2}$
Albedo	$\alpha_{\oplus} = 0{,}39$
Obliquidade da Eclíptica	$\epsilon = 23°27'$
Duração do Ano Tropical	$365{,}2422\ dias\ solares\ médios$
Duração do Ano Sideral	$365{,}2564\ dias\ solares\ médios$
A Lua	
Massa	$M_{L} = 7{,}44 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$R_{L} = 1{,}74 \times 10^{6}\ m$
Distância Terra-Lua	$d_{L} = 3{,}78 \times 10^{8}\ m$
Período sinódico	$P_{S_L} = 29{,}5306\ dias$
Albedo	$\alpha_{L} = 0{,}14$
Inclinação orbital em relação à Eclíptica	$\epsilon_{L} = 5{,}14°$
Constantes físicas	
1 Unidade Astronômica (U.A.)	$1{,}496 \times 10^{11}\ m$
1 Parsec (pc)	$3{,}0856 \times 10^{16}\ m$
Constante gravitacional	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^{2}\ kg^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ J\ s$
Constante de Boltzmann	$k_{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Constante de Hubble	$H_{o} = 70{,}0\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2{,}998 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_{o} = 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
1 Jansky (Jy)	$10^{-26}\ W\ m^{-2}\ Hz^{-1}$
Constante de Wien	$k = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m\ K$
Massa do elétron	$m_{e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do próton	$m_{p} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$
Comprimento de Repouso da Linha H-α	$\lambda_{H_{\alpha 0}} = 6562{,}8\ Å$

Диаграмма Герцшпрунга-Рассела Hertzsprung-Russell diagram



Questões Curtas

1) Nascer e Pôr do Sol no Círculo Ártico (Fundamental Astronomy)

Mostre que no Círculo Ártico, o Sol:

(a) (5 pontos) Nasce no mesmo tempo sideral $\boldsymbol{x}$ entre 22 de dezembro e 22 de junho.
(b) (5 pontos) Se põe no mesmo tempo sideral $\boldsymbol{x}$ entre 22 de junho e 22 de dezembro.

2) Extinção na Nebulosa Planetária (IOAA 2012)

Uma nebulosa planetária antiga, com uma anã branca em seu centro, está localizada a 50 pc da Terra. Exatamente na mesma direção, mas atrás da nebulosa, está outra anã branca, idêntica a primeira, mas distante 150 pc de nós. Considere que as duas anãs brancas possuem magnitude bolométrica absoluta +14.2 e índices de cor intrínsecos $(B-V)_0 = 0.300$ e $(U-V)_0 = 0.330$. Há extinção no meio interestelar e na nebulosa planetária. Quando medimos os índices de cor para a anã branca mais próxima (aquela no centro da nebulosa planetária), encontramos os valores $(B-V) = 0.327$ e $(U-B) = 0.038$. Nesta parte da Galáxia, as taxas de extinção interestelar são 1.50, 1.23 e 1.00 magnitudes por kpc para os filtros U, B e V, respectivamente.
Calcule os índices de cor que seriam medidos para a segunda anã branca.

3) Pressão Estelar (NAO 2019)

Considere uma estrela de massa M e raio R. Sabendo que a densidade varia com o raio de acordo com a equação $\rho(r) = \rho_{\text{centro}}\left(1-\sqrt{\frac{r}{R}}\right)$, **encontre uma expressão para $\boldsymbol{dP/dr}$**, ou seja, a derivada da pressão em relação à distância r até o centro, em função de M, R, e r, além de constantes físicas.

4) Encontro de Estrelas (Folclore Astronômico)

Duas estrelas de massa M, separadas por uma distância r, apenas sujeitas ao campo gravitacional uma da outra estão inicialmente no repouso.
Calcule quanto tempo passará até que as duas estrelas se encontrem.

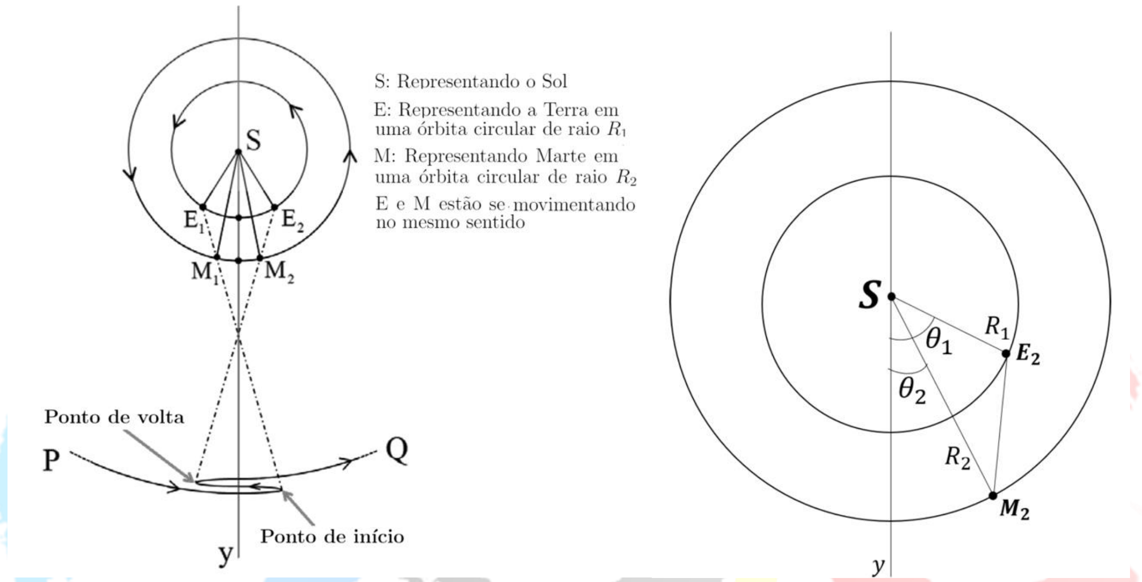
5) Mantendo a Hora (SAO 2018)

Sabendo que os satélites que fazem parte do Sistema de Posicionamento Global (GPS) orbitam a Terra num raio de 26.600 km, e que devido a relatividade geral e especial, os relógios dos satélites andam 38 microssegundos mais rápido todo dia, **calcule a mudança no raio orbital do satélite $\boldsymbol{\Delta r}$ necessária para minimizar as correções necessárias devidas à efeitos relativísticos.**

Questões Médias

1. Movimento Retrógrado de Marte (Simulado T3 2019)

O movimento retrógrado aparente é o movimento de um corpo planetário em um sentido oposto ao de outros corpos de seu sistema conforme observado de um ponto de referência particular. É conhecido que Marte executa um movimento retrógrado no céu terrestre nas imediações de sua oposição, como demonstrado nas figuras abaixo. Como se pode notar, o movimento retrógrado se inicia quando a Terra e Marte estão na posição E1 e M1 e é finalizado quando estão na posição E2 e M2. Use que R1 = 1,00 UA e R2 = 1,52 UA. Considere também que o período de translação terrestre é de 365 dias.



(a) (6 pontos) Calcule o ângulo θ_1 da Terra no ponto E2 em relação à reta y (reta vertical).

(b) (6 pontos) Calcule o ângulo θ_2 de Marte no ponto M2 em relação à reta y (reta vertical).

(c) (8 pontos) Calcule o tempo Δt, em dias, do movimento retrógrado de Marte. Isto é, o tempo que se leva do ponto de início até o ponto de volta.

2. Vega e Altair Paraguaio (IOAA 2018 - Adaptada)

Caiú está em Ayolas, Paraguai. Numa limpa noite de dezembro, ele olha para o céu e se pergunta:

caso Sírius e Canopus não tivessem velocidade radial, isto é, se estivessem presas ao "firmamento", **quais as coordenadas do primeiro ponto no qual as duas passariam?**

Segue uma tabela com os dados necessários para responder a pergunta do nosso herói (J2000):

	δ	α	μ_δ(mas/ano)	$\mu_\alpha \cos\delta$(mas/ano)
Sírius	-16° 42′ 58″	$06^h\, 45^m\, 08.9^s$	−1223,07	−546,01
Canopus	−52° 41′ 44″	$06^h\, 23^m\, 57.1^s$	23,24	19,93

3. Distância ao Aglomerado de Coma (IOAA 2019 - Adaptada)

O aglomerado de galáxias de Coma (Abell 1656) possui diâmetro angular aparente de aproximadamente 100 minutos de arco, e contém mais de 1000 galáxias individuais, a maioria delas elípticas anãs e gigantes. Elas se movimentam ao redor do centro de massa do aglomerado em órbitas aproximadamente circulares. A tabela abaixo apresenta medidas de velocidades radiais de algumas galáxias do aglomerado.

#	$v_r\ (km/s)$	#	$v_r\ (km/s)$	#	$v_r\ (km/s)$	#	$v_r\ (km/s)$
1	6001	6	7116	11	7156	16	7111
2	7666	7	7004	12	7522	17	8292
3	6624	8	4476	13	7948	18	5358
4	5952	9	6954	14	4951	19	4957
5	5596	10	8953	15	7797	20	7183

a) (4 pontos) **Calcule** a distância ao aglomerado.

b) (2 pontos) **Estime** o tamanho físico do aglomerado (em Mpc).

c) (8 pontos) **Encontre** uma expressão para a Massa Virial do aglomerado de Coma em função do seu raio, R, e da dispersão de velocidades radiais, σ_r.

d) (3 pontos) **Estime** a massa virial do aglomerado de Coma, em massas solares.

Dica: σ_r pode ser aproximado como o desvio padrão das velocidades radiais.

e) (1 ponto) A luminosidade total do aglomerado é $L \approx 5 \times 10^{12} L_{Sol}$. **Calcule** a Razão Massa-Luminosidade do aglomerado, em unidades de Massa Solar por Luminosidade Solar.

f) (2 pontos) Quais afirmações abaixo são verdadeiras?

A) A razão massa-luminosidade do aglomerado de Coma é muito maior que a de uma galáxia espiral típica (como a Via Láctea).

B) A razão massa-luminosidade do aglomerado de Coma é similar à de uma galáxia espiral típica.

C) A razão massa-luminosidade do aglomerado de Coma é muito menor que a de uma galáxia espiral típica.

D) O aglomerado de Coma contém muito mais matéria escura que uma galáxia espiral típica.

E) O aglomerado de Coma contém muito menos matéria escura que uma galáxia espiral típica.

4. Galáxia Espiral (IAO 2015 - Adaptada)

Uma galáxia espiral que consiste principalmente de estrelas de classe espectral A7-A8 foi descoberta na constelação do Cruzeiro do Sul. A galáxia pode ser vista como uma elipse de 40” x 30” no céu. A linha Hα alargada é observada nos comprimentos de onda de 7054Å a 7057Å no espectro da galáxia. Sabendo que a relação Massa-Luminosidade para estrelas da sequência principal dessa classe é dada por $L \propto M^4$, **estime** o número de estrelas na galáxia.

5. Magnitude Limite (Antonio Mário Magalhães – IAG USP)

Vamos estudar o limite de detecção para um grande telescópio. Considere um telescópio de abertura $D = 8\,m$ usado para imageamento direto com um detector de eficiência quântica $q = 0{,}65$, ao longo de uma banda $\Delta\lambda = 1000$ Å, de 5000 Å a 6000 Å**.** Este telescópio está num sítio muito bom, onde o brilho do céu é $B_{céu} = 22{,}5\, mag/arcsec^{\mathbf{2}}$ e o seeing é $d = 0{,}5\, arcsec$. Uma estrela de magnitude zero nesta banda passante tem um fluxo de fótons $F_0 = 10^3 fótons/\left(s \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \text{Å}\right)$.

a) (9 pontos) **Escreva** a fórmula para a razão sinal/ruído obtida para uma estrela de magnitude V dentro da banda $\Delta\lambda$ e tempo de exposição t, assumindo que o brilho do céu seja conhecido perfeitamente (através de medidas independentes) e somente contribui para o ruído através dos fótons de fundo dentro do disco de seeing da estrela.

b) (7 pontos) **Qual a magnitude limite**, ou seja, qual a magnitude da estrela que fornece sinal/ruído = 3, para $\Delta\lambda = 1000$ Å e $t = 1\, hora$? Verifique que o regime em que isso acontece é “limitado pelo fundo de céu”.

c) (4 pontos) **Qual deve ser a razão focal do telescópio** para que o diâmetro do disco de seeing seja menor que dois píxeis de CCD de 27 μm? Comente brevemente o resultado.

Questões Longas

1. Inflação Cósmica (IPhO 2017 - Adaptada)

a) (12 pontos) A partir de gravitação newtoniana e assumindo um universo esférico isotrópico em expansão, **mostre** que a primeira equação de Friedmann pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)}$$

Encontre também o valor da constante A_1.

b) (9 pontos)Utilizando a primeira lei da termodinâmica, **mostre** que a segunda equação de Friedmann, ou equação dos fluídos, pode ser escrita como:

$$\dot{\rho} + A_2\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Encontre também o valor da constante A_2.

c) (8 pontos) Para resolver as equações dos itens a) e b), é necessário assumir uma relação do tipo $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, onde w é uma constante. O fator $H = \frac{\dot{a}}{a}$, é chamado de constante de Hubble. Os valores atuais desses parâmetros são indicados por um índice 0. Existem três componentes para o universo: a matéria comum, a radiação e a energia escura. Sabendo que a energia escura é a energia do vácuo, **encontre** o valor resultante para w no caso:

1. de um universo composto somente de matéria não relativística.

2. de um universo composto apenas por radiação, isto é, energia de fótons.

3. de um universo composto apenas por energia escura.

d) (9 pontos) No caso de $k = 0$, **encontre** $a(t)$ para os casos de 1 a 3 do item c). Para os casos 1 e 2, use $a(t = 0) = 0$. Para o caso 3, use que $a_0 = 1$.

e) (6 pontos) A constante k na primeira equação de Friedmann se refere à curvatura do universo. Seu valor pode ser $k = +1$, para um universo fechado, isto é, de curvatura positiva; $k = 0$ para um universo plano, isto é, euclidiano, sem curvatura; e $k = -1$ para um universo aberto, isto é, de curvatura negativa, infinito. Seja o parâmetro de densidade $\Omega = \rho/\rho_c$, onde $\rho_c c^2 = H^2/A1$ é a densidade de energia crítica.

Encontre $\boldsymbol{k}$ na primeira equação em termos de Ω, H, a, e R_0.

f) (4 pontos) **Encontre** uma faixa de valores para Ω que corresponda para cada valor de k.

g) (8 pontos) Observações da radiação cósmica de fundo sugerem fortemente que nosso universo é aproximadamente euclidiano. **Encontre** $(\Omega(t) - 1)$ quando o universo é dominado por:

1. radiação.

2. matéria não relativística.

h) (5 pontos) O problema de a curvatura do universo ser zero, é que qualquer deviação dessa planicidade no passado se propagaria e não veríamos a planicidade atual. Dessa forma, para solucionar esse problema, o universo teria de passar por um período de domínio da densidade de energia escura, o que levaria à um período de expansão exponencial, chamado de período de inflação.

Para o período de domínio da energia escura, isto é, a energia do vácuo, **encontre** $(\Omega(t) - 1)$ em função do tempo. Assuma $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.

i) (8 pontos) **Mostre** que a condição de inflação implica nas seguintes condições:

1. expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$).

2. raio de Hubble decrescente $(d(aH)^{-1}/dt) < 0$

j) (6 pontos) **Mostre** que a condição de um raio de Hubble decrescente pode ser expressa em termos do parâmetro $\epsilon = -\dot{H}/H^2$, quando $\epsilon < 1$.

2. Um Satélite Fadado ao Fracasso (IPhO 2005 – Adaptada pelo CCD)

Um satélite em órbita geoestacionária recebe, por erro dos operadores, um burst na direção do centro da Terra. Esse burst provocou uma variação na velocidade orbital de Δv, e é caracterizado pelo parâmetro $\beta = \Delta v/v_0$, onde v_0 é a velocidade orbital inicial do satélite. Suponha, dos itens de (a) a (d), $\beta < 1$:

(a) (15 pontos) **Determine** os parâmetros da nova órbita, semi-latus rectum l e excentricidade e, em função de r_0 (raio orbital inicial) e β.

(b) (5 pontos) **Calcule** o ângulo a entre o semieixo maior da nova órbita e o vetor posição do burst acidental.

(c) (8 pontos) **Dê** as expressões analíticas das distâncias do perigeu $r_{mín}$ e do apogeu ($r_{máx}$) ao centro da Terra, em função de r_0 e β, e calcule seus valores para $\beta = 1/4$.

(d) (7 pontos) **Determine** o período T da nova órbita em função de T_0, o período inicial, e β, e calcule seu valor numérico para $\beta = 1/4$.

(e) (10 pontos) **Calcule** o valor mínimo de β, β_{esc}, necessário para que o satélite escape da atração gravitacional da Terra.

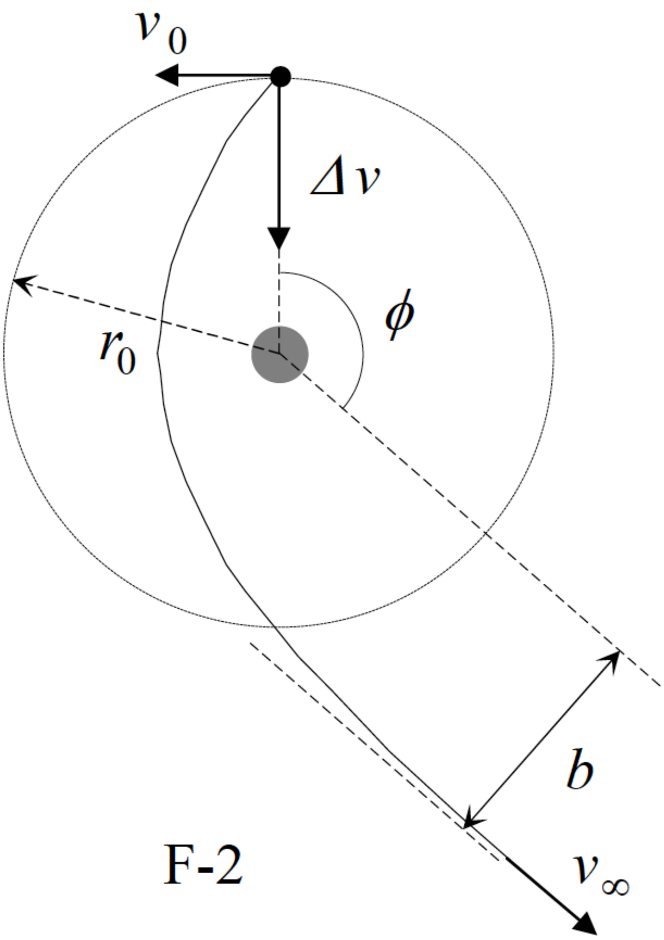
(f) (5 pontos) **Calcule**, na situação do item anterior, a menor distância entre o centro da Terra e o satélite ($r'_{mín}$), em função de r_0.

Suponha, agora, $\beta > \beta_{esc}$.

(a) (10 pontos) **Determine** a velocidade residual no infinito, v_∞ em função de v_0 e β.

(b) (8 pontos) **Determine** o parâmetro de impacto b da direção da assíntota da órbita, em termos de r_0 e β (veja a Figura 17.5).

(c) (7 pontos) **Determine** o ângulo ϕ da direção da assíntota em termos de β. Calcule seu valor numérico para $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$.



F-2