Rumo ao ITA

Física

Análise Dimensional

Ivan Guilhon Mitoso Rocha

A análise dimensional é um assunto básico que estuda as grandezas físicas em geral, com respeito a suas unidades de medida. Como as grandezas físicas sempre estão associadas a unidades, podemos dizer o estudo de analise dimensional está em todos os ramos da física.

Estudaremos conceitos iniciais sobre como a partir de um número limitado de grandezas físicas fundamentais podemos criar outras grandezas derivadas, e como utilizar princípios fundamentais de análise dimensional pode nos ajudar a decorar (e até prever!) o formato de fórmulas envolvendo grandezas físicas.

1. Grandezas Fundamentais

Denominamos de grandezas físicas fundamentais um *grupo limitado* de grandezas que vão nos servir como base para escrevermos outras grandezas que possam surgir adiante, a partir das fundamentais que já foram definidas antes.

Na Mecânica, por exemplo, definimos normalmente as grandezas fundamentais como sendo massa(M), comprimento(L) e tempo(T), pois essas são grandezas mais básicas para nós, que não necessitam de outras para serem definidas. Outras grandezas da mecânica, como velocidade, devem ser sempre possíveis de ser escrita como uma combinação das grandezas fundamentais, a velocidade pode ser escrita como a razão entre espaço e tempo.

As grandezas fundamentais que serão adotadas por nós daqui em frente:

- Massa: M
- Comprimento: L
- Tempo: T
- Temperatura: θ
- Corrente Elétrica: I *(**Importante:** Não é carga!)*

É bom ter em mente que números puros, não têm unidade, isso é o que diferencia um número de uma grandeza estudada pela física.

2. Regras Básicas para operações com grandezas

2.1 Unidade Dimensional

Cada grandeza física pode ser obtida a partir de grandezas fundamentais, mas como fazemos isso? Em geral nós devemos ter uma expressão que define a grandeza estudada a partir de outras conhecidas. Veja com será a notação adotada para se referir a uma grandeza física $\boldsymbol{A}$ e a unidade dimensional de $\boldsymbol{A}$**.**

$$\boldsymbol{A} \rightarrow grandeza\ física$$

$$[\boldsymbol{A}] \rightarrow unidade\ dimensional\ de\ A$$

Exemplo:

$v \rightarrow velocidade$

$[v] \rightarrow \frac{m}{s^2}\ \ (SI)$

Observação: Por conveniência definimos a unidade dimensional de um número puro como sendo:

$$[n] = 1, se\ n \text{ é } um\ número\ puro.$$

2.2 Operações de soma e diferença

A primeira regra com operações com grandezas físicas diz que só é possível nos falarmos de operações de soma e diferença de grandezas quando todas elas têm as mesmas tem a mesma unidade dimensional.

Vale a velha regra da tia de matemática do colégio: "Não se soma banana com abacaxi". É exatamente disto que estamos falando, é possível multiplicar e dividir grandezas para derivar novas grandezas, mas fazer operações de soma nem sempre é possível.

Exemplo: Observe a seguinte fórmula da cinemática.

$$s = s_0 + v_o t + \frac{at^2}{2}$$

Como $[s] = L$, já podemos afirmar que $[v_o t] = L$ e $\left[\frac{at^2}{2}\right] = L$. Isso seria de grande importância se nós estivéssemos interessados em determinarmos, por exemplo, a unidade dimensional de aceleração, isto é, $[a]$.

2.3 Operações de multiplicação e divisão

A segunda regra com operações com grandezas físicas diz que ao quando fazemos o produto de duas grandezas físicas, a unidade dimensional do resultado é o produto das unidades dimensionais dos fatores. Da mesma forma, quando fazemos a divisão de duas grandezas físicas, a unidade dimensional do resultado é a divisão das unidades dimensionais das grandezas de antes.

Em outras palavras, ao multiplicar ou dividir grandezas, fazemos isso com seus valores e com suas unidades.

Exemplo: Adotando o mesmo exemplo anterior.

$$s = s_0 + v_o t + \frac{at^2}{2}$$

Já sabemos que:

$\left[\frac{at^2}{2}\right] = L.$

Sendo que:

$$\left[\frac{at^2}{2}\right] = \frac{[at^2]}{[2]} = \frac{[a].[t^2]}{1} = [a].[t]^2 = [a].T^2$$

Logo:

$$L = [a].T^2$$

$$[a] = L.T^{-2}$$

O resultado concorda é esperado, visto que em geral a aceleração é dada em m/s^2.

3. Previsão de fórmulas

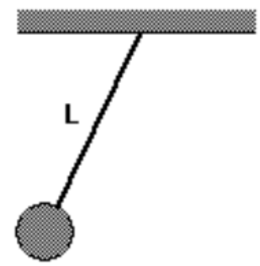
3.1. Princípio da homogeneidade

"Uma equação física só pode ser verdadeira se os dois lados da equação tiverem a mesma unidade dimensional."

Esse é, em poucas palavras, o princípio da homogeneidade, graças a ele uma equação do tipo $10Kg = 15m/s^2$ não faz o menor sentido, uma vez que m^3e Kg representação grandezas físicas diferentes.

3.2. Método dos expoentes desconhecidos

O método dos expoentes desconhecidos é uma forma de conseguir prever o formato de uma equação física, ele também pode ser usado para relembrar uma fórmula que você não se lembre com todos os detalhes.



Vamos ilustrar o método com um exemplo clássico, a previsão do período de um pêndulo simples. Suponhamos que você esteja interessado em calcular o período de oscilação de um corpo de massa m, presa por um fio de comprimento l, em um ambiente de gravidade dada por g.

É possível determinar o formato da relação matemática entre essas grandezas?

A relação entre essas grandezas deve ser da forma: $T = k.m^{\alpha}l^{\beta}g^{\gamma}$, onde K é uma constante numérica (número puro) que deve assumir um valor real e α,β e γ são expoentes desconhecidos das grandezas $m, l\ e\ g$, respectivamente.

Do princípio da homogeneidade temos que os dois lados da equação têm a mesma unidade dimensional:

$$[T] = [k]\ [m]^{\alpha}[l]^{\beta}[g]^{\gamma}$$

O próximo passo é determinar a unidade dimensional de cada um das grandezas envolvidas:

$[k] = 1\ (K\ \text{é}\ n\acute{u}mero\ puro)$

$[T] = T$

$[m] = M$

$[l] = L$

$[g] = L.T^{-2}$

Note $[g]$ é a aceleração gravitacional local e deve ter portanto unidade de aceleração, que por sua vez já teve sua unidade dimensional determinada em exemplos anteriores. Substituindo as unidades dimensionais temos que:

$$T = M^{\alpha}.L^{\beta}.(LT^{-2})^{\gamma}$$

$$T = M^{\alpha}.L^{\beta+\gamma}.T^{-2\gamma}$$

Comparando o lado esquerdo com o direito temos sempre um sistema, onde as variaveis que devem ser encontradas são os expoentes α,β e γ.

$$\begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \beta + \gamma \\ 1 = -2\gamma \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = -1/2 \end{cases}$$

Logo a equação física que estamos procurando deve ser da forma:

$$T = K.\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Onde K é um número que não pode ser determinado por meio de analise dimensional, sendo necessárias realizações de medidas em laboratório ou então de uma demonstração física mais específica. Nesse caso particular o valor numerico de K é dado por 2π.

Exercício resolvido

A lei que descreve a interação entre duas cargas elétricas pontuais q_1 *e* q_2, separadas uma distância d uma da outra, é a lei de Coulomb:

$$F = \frac{Kq_1q_2}{d^2}$$

Determine, por meio da teoria de análise dimensional, a unidade da constante física K no SI.

Solução:

i. Determinar $[F]$, $[q]$ e $[d]$.

Nesse passo devemos determinar a unidade dimensional de cada grandeza, por meio de quaisquer relações físicas que estejam ao nosso alcance, quanto mais simples, melhor.

Calculando $[F]$:

$$F = ma$$
$$[F] = [m].[a] = MLT^{-2}$$

Calculando $[q]$:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$
$$[I] = \frac{[\Delta q]}{[\Delta t]}$$
$$I = \frac{[q]}{T}$$
$$[q] = I.T$$

Como comprimento é uma grandeza fundamental:

$$[d] = L$$

ii. Utilizando o princípio da homogeneidade

$$[F] = \frac{[K].[q]^2}{[d]^2}$$
$$MLT^{-2} = \frac{[K]I^2T^2}{L^2}$$

Logo, isolando $[L]$, temos que:

$$[K] = ML^3I^{-2}T^{-4}$$

Como estamos falando do sistema de unidades internacional:

$$[K] = Kg.m^3.A^{-2}s^{-4}$$

4. Análise Dimensional no ITA

1) (ITA-2002) Em um experimento verificou-se a proporcionalidade existente entre energia e a freqüência de emissão de uma radiação característica. Nesse caso, a constante de proporcionalidade, em termos dimensionais, é equivalente a:
   a) Força
   b) Quantidade de movimento
   c) Momento angular
   d) Pressão
   e) Potência

2) (ITA-2004) Durante a apresentação do projeto de um sistema acústico, um jovem aluno do ITA esqueceuu-se da expressão da intensidade de uma onda sonora. Porém, usando da sua intuição, concluiu ele que a intensidade média (I) é uma função da amplitude do movimento do ar (A), da freqüência (f), da densidade do ar (ρ) e da velocidade do som (c), chegando à expressão $I = A^x f^y \rho^z c$. Considere as grandezas fundamentais: massa, comprimento e tempo, assinale a opção correta que representa os respectivos valores do expoentes x, y e z.
   a) -1,2,2

b) 2,-1,2
c) 2,2,-1
d) 2,2,1
e) 2,2,2

3) (ITA-2005) Quando camadas adjacentes de um fluido viscoso deslizam regularmente umas sobre as outras, o escoamento é dito laminar. Sob certas condições, o aumento de velocidade provoca o regime de escoamento turbulento, que é caracterizado por movimento aleatórios das partículas do fluido. Observa-se, experimentalmente, que o regime de escoamento (laminar ou turbulento) depende de um parâmetro adimensional (número de Reynolds) dado por $R = \rho^{\alpha} v^{\beta} d^{\gamma} \eta^{\tau}$, em que ρ é a densidade do fluido, v, sua velocidade, η, seu coeficiente de viscosidade e d, uma distância característica associada à geometria do meio que circunda o fluido. Por outro lado, num outro tipo de experimento, sabe-se que uma esfera de diâmetro D, que se movimenta num meio fluido, sofre a ação de uma força de arrasto viscoso dada por $F = 3\pi D\eta v$. Assim sendo, com relação aos respectivos valores de $\alpha, \beta, \gamma\ e\ \tau$, uma das soluções é:
a) $\alpha = 1,\quad \beta = 1,\quad \gamma = 1,\quad \tau = -1.$
b) $\alpha = 1,\quad \beta = -1,\ \gamma = 1,\quad \tau = 1.$
c) $\alpha = 1,\quad \beta = 1,\quad \gamma = -1,\ \tau = 1.$
d) $\alpha = -1, \beta = 1,\quad \gamma = 1,\quad \tau = 1.$
e) $\alpha = 1\ ,\ \beta = 1,\quad \gamma = 0,\quad \tau = 1.$

4) (ITA-2008) Define-se intensidade I de uma onda como a razão entre a potência que essa onda transporta por unidade de área perpendicular à direção dessa propagação. Considere para uma certa onda de amplitude A, freqüência f e velocidade v, que se propaga num meio de densidade ρ, foi determinada que a intensidade é dada por: $I = 2\pi^2 f^x \rho v a^y$. Indique quais são os valores para x e y,respectivamente.
a) $x = 2\ ;\ y = 2$
b) $x = 1\ ;\ y = 2$
c) $x = 1\ ;\ y = 1$
d) $x = -2\ ;\ y = 2$
e) $x = -2\ ;\ y = -2$

5) (ITA-2009) Sabe-se que o momento angular de uma massa pontual é dado pelo produto vetorial do vetor posição pelo seu momento linear. Então, em termos das dimensões de comprimento (L), de massa (M), e de tempo (T), um momento angular qualquer tem sua dimensão dada por:
a) $L^0 M^1 T^{-1}$
b) $L^1 M^0 T^{-1}$
c) $L^1 M^1 T^{-1}$
d) $L^2 M^1 T^{-1}$
e) $L^2 M^1 T^{-2}$

6) (ITA-2010) Pela teoria Newtoniana da gravitação, o potencial gravitacional devido ao Sol, assumindo simetria esférica, é dado por $-V = GM/r$, em que r é a distância média do centro do corpo ao Sol. Segundo a teoria da relatividade essa equação deve ser corrigida para $-V = GM/r + A/r^2$, em que A depende de G, de M e da velocidade da luz, c. Com base na análise dimensional e considerando K uma constante adimensional, assinale a opção que apresenta a expressão da constante A, seguida da ordem de grandeza da razão entre o termo de correção, A/r^2, obtido por Einstein, e o termo GM/r da equação de Newton, na posição da Terra, sabendo que a priori $k = 1$.

a) $A = \frac{kGM}{c}$ e 10^{-5}

b) $A = \frac{kG^2M^2}{c}$ e 10^{-8}

c) $A = \frac{kG^2M^2}{c}$ e 10^{-3}

d) $A = \frac{kG^2M^2}{c^2}$ e 10^{-5}

e) $A = \frac{kG^2M^2}{c^2}$ e 10^{-8}

7) (ITA-2011) Um exercício sobre a dinâmica da partícula tem seu inicio assim enunciado: "*Uma partícula está se movendo com uma aceleração cujo módulo é dado por* $\mu\left(r + \frac{a^3}{r^2}\right)$*, sendo r a distância entre a origem e a partícula. Considere que a partícula foi lançada a partir de uma distância a com uma velocidade inicial de* $2\sqrt{\mu a}$*.*"
Existe algum erro conceitual nesse enunciado? Por que razão?

a) Não, porque a expressão para a velocidade é consistente com a da aceleração;

b) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria $2a^2\sqrt{\mu}$;

c) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria $2a^2\sqrt{\mu/r}$;

d) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria $2\sqrt{a^2\mu/r}$;

e) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria $2a\sqrt{\mu}$;

5. Gabarito

1) *C*
2) *D*
3) *A*
4) *A*
5) *D*
6) *E*
7) *E*