

# Sistema Solar

Ian Seo Takose

## 1. Configurações Planetárias

Ao estudarmos o Sistema Solar, percebemos que os corpos podem descrever configurações especiais, tão especiais que atribuímos nomes a essas posições relativas entre os planetas. Dentre elas temos: **elongação máxima**, **oposição**, **conjunção** e **quadratura**.

### 1.1. Planetas Interiores e Exteriores

Já que são posições *relativas*, precisamos escolher um planeta de referência, o qual convenientemente escolhemos a Terra, uma vez que aqui é o nosso “ponto de observação”. A partir disso, definimos planetas interiores e exteriores pela sua relação entre seu raio orbital e o da Terra - se for menor é interior e se for maior é exterior.

### 1.2. Elongação

Definimos a elongação como o ângulo entre as direções Terra-Sol e Terra-planeta, isto é, se desenhássemos uma seta apontando da Terra para o Sol e uma outra apontando da Terra para o planeta, a elongação é o ângulo entre essas setas. A visualização das setas ajuda a diferenciar quando a elongação é  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . Na Figura 1, podemos ver um planeta interior I de elongação  $\alpha$  e um exterior E com elongação  $\beta$ .

Em especial, na situação mostrada na figura, em que a reta Terra-Planeta é tangente à órbita do Planeta, ou seja, ângulo Terra-Planeta com Planeta-Sol é de  $90^\circ$ , temos a **elongação máxima** desse planeta, pois se tentássemos aumentar o  $\alpha$ , não haveria intersecção com a órbita, portanto não seria uma posição possível para o planeta estar, o que nos diz que aquele é o ângulo máximo mesmo.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Para ver que não é outro ponto da órbita que isso acontece, você pode imaginar que começamos com  $\alpha$  sendo  $0^\circ$  e fomos aumentando-o lentamente. Perceba que, a medida que fomos aumentando o ângulo, sempre terá dois pontos de intersecção com a órbita. Note também que esses pontos vão gradativamente se aproximando até que eles eventualmente “se encontram”, nos deixando com a situação de tangência. Analisando assim, é mais fácil de aceitar que aquele é um caso especial, uma vez que é o único que nos dá apenas um ponto de intersecção, ao invés de 2 como os outros ângulos menores que esse.

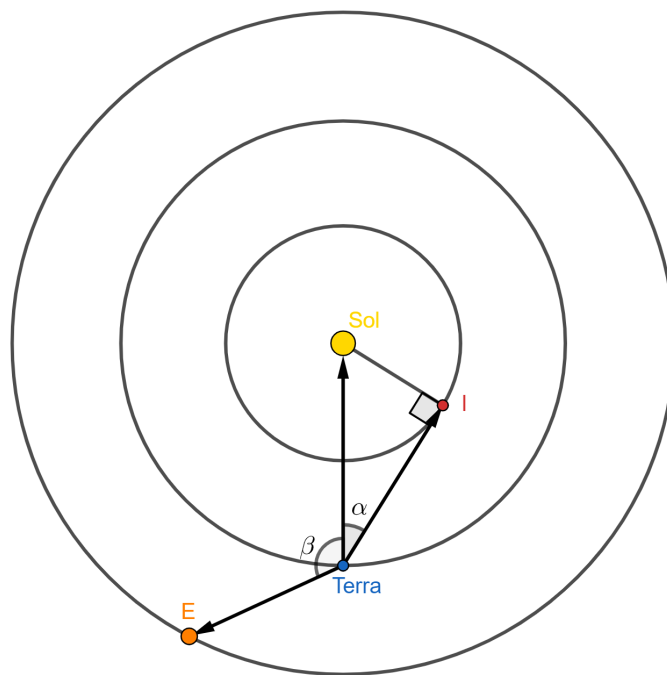


Figura 1: Elongação máxima do planeta I e elongação qualquer do planeta E

Com um pouco de geometria, podemos ver que esse ângulo é sempre dado como:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{R_I}{R_{Terra}} \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1} \left( \frac{R_I}{R_{Terra}} \right),$$

onde  $R_I$  e  $R_{Terra}$  são os raios orbitais do planeta I e da Terra, respectivamente.

Por fim, por simetria, note que esse mesmo ponto existe no lado esquerdo da órbita. Para diferenciá-los, chamamos o da esquerda de elongação máxima leste e o da direita de elongação máxima oeste. Como esquerda e direita são conceitos relativos, a elongação máxima leste é a que está mais perto da próxima elongação máxima, levando em consideração a translação do planeta (ou seja, nesse caso o planeta estaria girando para o sentido anti-horário<sup>2</sup>). Em geral, não é necessário esquentar muito a cabeça entre qual é qual.

### 1.3. Oposição

Ao contrário dos planetas interiores, que a elongação máxima depende do raio orbital do planeta, ou seja, varia de planeta a planeta, a elongação máxima para planetas exteriores é **sempre**  $180^\circ$  - que ocorre quando as setinhas estão

<sup>2</sup>Em especial, para o Sistema Solar, os planetas giram seguindo a **regra da mão direita**, isto é, se você apontar com seu dedo para o Polo Celeste Norte (ou Polo Norte da Eclíptica), os planetas vão rodar na direção em que seus outros 4 dedos estão curvados

em sentidos opostos, como podemos ver na Figura 2. Dessa forma, ao invés de chamarmos de elongação máxima, convenientemente escolheram dar o nome de **oposição**, já que o planeta está *oposto* ao Sol em relação à Terra.

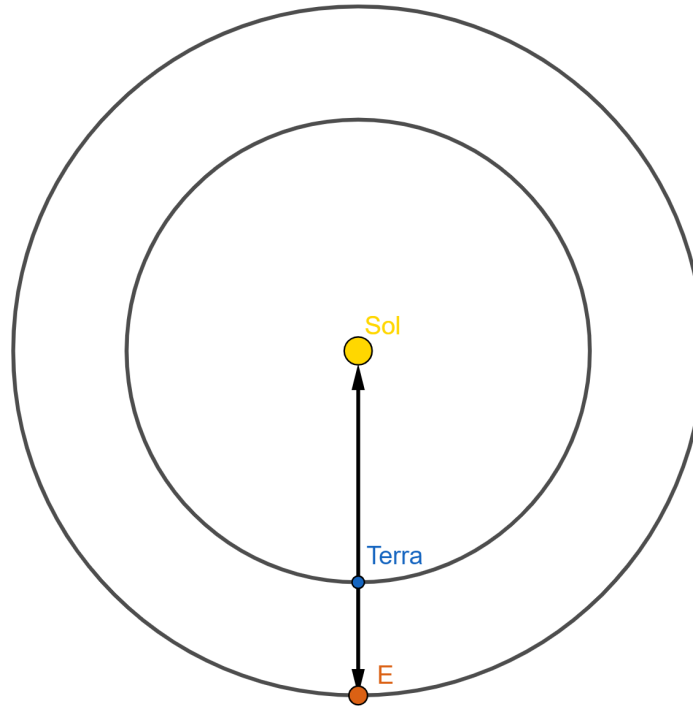


Figura 2: Ilustração da oposição do planeta E

#### 1.4. Quadratura

Por falta do que fazer, acharam que seria interessante dar um nome para quando a elongação vale  $90^\circ$ , só porque  $90^\circ$  é um ângulo bonito. Assim como a elongação máxima, há dois pontos, um na esquerda e um na direita, onde a configuração é satisfeita. Analogamente, definiram como Quadratura Leste o da esquerda e Quadratura Oeste o da direita. Novamente, esquerda e direita são conceitos muito relativos, então, assim como com a elongação máxima, a Quadratura Leste será a mais perto da próxima Quadratura, mas, de novo, melhor esquentar a cabeça com coisas mais importantes kk.

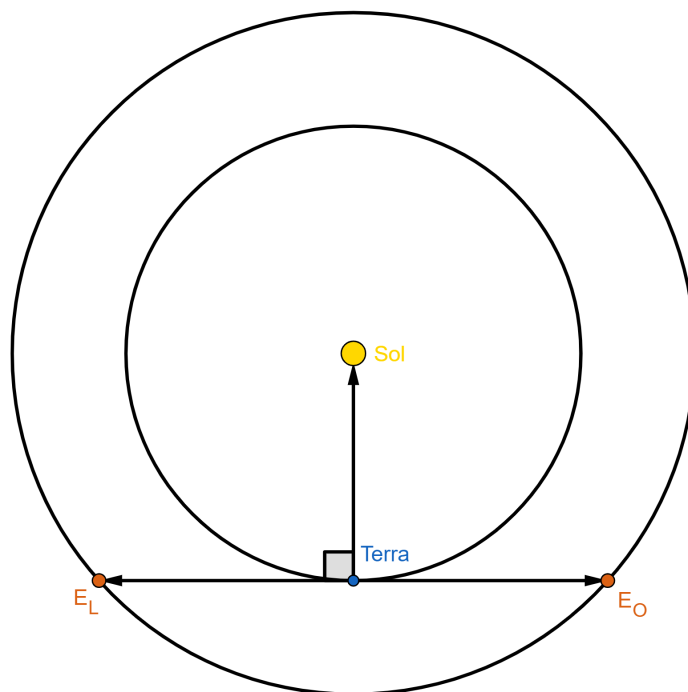


Figura 3: Temos o planeta exterior  $E_L$  em Quadratura Leste e  $E_O$  em Quadratura Oeste.

### 1.5. Conjunção

Quando a elongação de um planeta vale  $0^\circ$ , dizemos que está ocorrendo uma conjunção. Lembrar das setinhas agora ajuda bastante a não confundir conjunção com oposição - se as setas estiverem opostas, é oposição, se elas estiverem apontando pro mesmo lado, é conjunção. Perceba que para planetas interiores há dois pontos na órbita em que ocorre conjunção, na configuração Terra-Planeta-Sol e na Terra-Sol-Planeta, portanto, para podermos diferir qual é qual, chamamos a primeira de Conjunção Inferior e a segunda de Conjunção Superior, por motivos que ficam mais claros ao olhar para a Figura 4.

Em especial, se, ao invés de pegarmos o ângulo Terra-Sol e Terra-Planeta, pegarmos especificamente Terra-Júpiter e Terra-Saturno (para melhor visualização dessas retas ver figura 4), quando a elongação for nula, teremos a chamada Grande Conjunção, a qual ocorreu há pouco tempo (21 de dezembro de 2020) - espero que você tenha visto, pois a próxima só ocorrerá em 31 de outubro de 2040 ☹

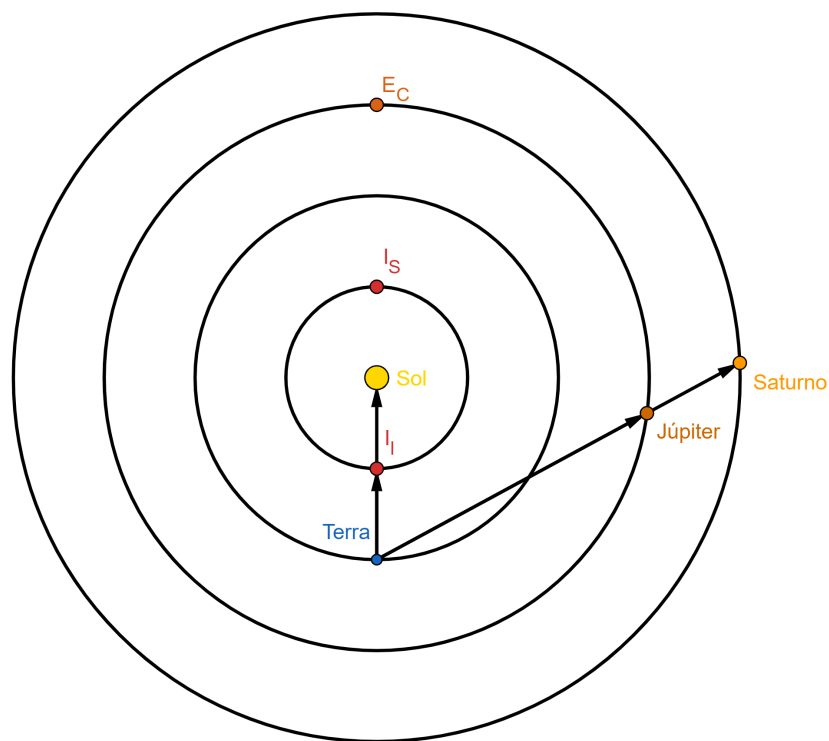


Figura 4: Temos o planeta exterior  $E_C$  em conjunção e os planetas interiores  $I_S$  e  $I_I$  em Conjunção Superior e Inferior, respectivamente, onde fica claro porque uma é superior e a outra inferior. Não desenhei as setas para todas as conjunções para evitar a poluição de setinhas (importante é ver que elas estão alinhadas, ou seja,  $\text{elongação} = 0^\circ$ ). À direita da figura temos retratado uma Grande Conjunção. Note que, apesar do nome, ela **não** é uma conjunção pela definição original, só tem esse nome porque as setinhas ligando a Terra ao planeta ficam iguais às de uma conjunção (alinhadas).

A Figura 5, retirada da [Wikipedia](#), tem todas as configurações de uma vez, o que eu evitei porque ia ficar meio poluído e ruim de entender de primeira, ela é melhor para relembrar delas depois de já ter visto uma vez.

Para concluir essa parte de configurações planetárias, perceba que a Lua, apesar de não ser um planeta orbitando o Sol, também acaba passando por algumas dessas configurações. Especificamente, 4 delas: Conjunção Inferior, Quadratura Leste, Quadratura Oeste e Oposição. O interessante dessas posições é que elas são fases da Lua bem conhecidas - Lua Nova, Quarto Crescente, Quarto Minguante e Lua Cheia (consegue ver o por quê?). Essa noção ajudará um pouco a entender a nossa próxima seção.

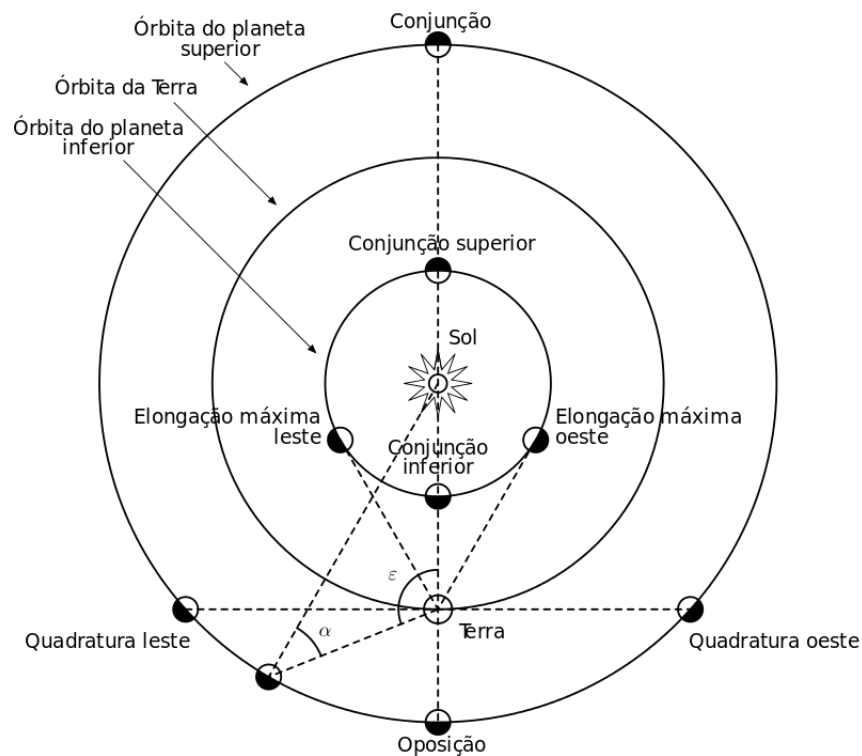


Figura 5: Resumo de Configurações Planetárias.

## 2. Eclipses

Para quem curte astronomia, eventos astronômicos são sempre bem legais de serem observados. No entanto, quem chama a atenção de qualquer um são os eclipses. Seja lunar ou solar, esses fenômenos são sempre admirados por todos. Nessa seção iremos estudar as causas e a geometria desses tão famosos eventos.

### 2.1. Eclipse Solar

O eclipse solar ocorre quando a Lua passa na frente do Sol, quando vista da Terra. Se lembrarmos das configurações planetárias, isso acontece quando a Lua “está”<sup>3</sup> em Conjunção Inferior (ver Figura 5), ou seja, eclipses solares ocorrem em Lua Nova. Existem 3 tipos de eclipse solar: total, parcial e anular (ou anelar). Os dois primeiros são bem conhecidos, pois são um retrato impecável de expectativa vs realidade, respectivamente, como fielmente descrito na imagem abaixo:

<sup>3</sup>Coloquei aspas porque não definimos essas configurações para a Lua, é apenas uma analogia



Figura 6: A realidade ainda mais fiel mostraria a imagem deformada do Sol no chão ao tentarmos fazer uma câmara escura para podermos, minimamente, ver o eclipse

Podemos ver o esquema do eclipse total e parcial na Figura 7 retirado da [Wikipedia](#). Na imagem, vemos que a sombra da Lua faz um cone (que em 2D, como na imagem, é representado por um triângulo) que é “interrompido” pelo anteparo preto (representando a superfície da Terra ~~Plana~~), de forma que efetivamente vemos um tronco de cone (representado por um trapézio) na figura, delimitando a região A (umbra). Na região B (penumbra), vemos que a Lua bloqueia uma parcela dos raios de luz - por exemplo, na região B superior, vemos que a Lua bloqueia os raios de luz que vêm da parte de baixo do Sol, mas não bloqueia os que vêm da parte de cima. Dessa forma, a região B não é completamente escura, e o que um observador vê nessa região pode ser visto na Figura 9, que seria apenas uma parte do Sol coberta.

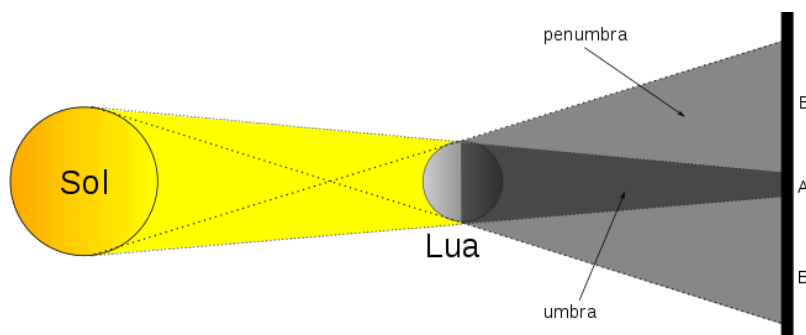


Figura 7: Ilustração de um eclipse solar total (A) e parcial (B)

Lembrando do fato de que a trajetória da Lua não é perfeitamente circular, podemos fazer um exercício mental do que aconteceria se a Lua estivesse mais

longe da Terra no eclipse retratado. Note que, a medida que a Lua se afasta da Terra, a base menor do trapézio (que, na verdade é um tronco de cone) vai diminuindo, até que, para uma distância Terra-Lua específica, temos um triângulo com o vértice na superfície terrestre. Teoricamente, nessa situação, só seria possível ver o eclipse total em um ponto da Terra, doido né? Na verdade, podemos encontrar essa distância  $d$  para uma separação Terra-Sol dada por  $a_{\odot}$ , raio solar  $R_{\odot}$  e raio lunar  $R_L$ , com um pouco de geometria<sup>4</sup>:

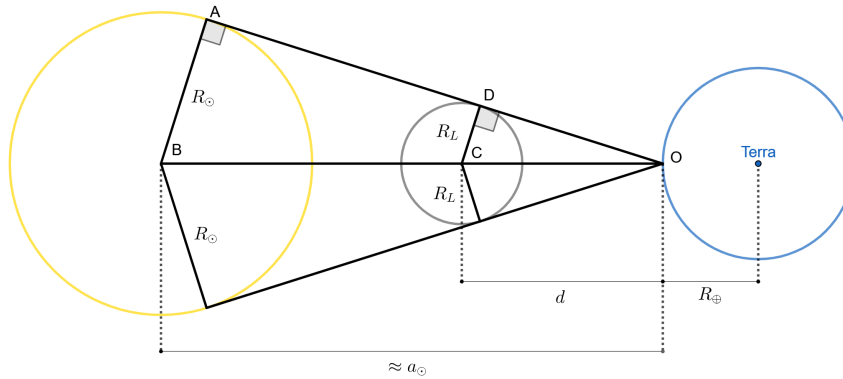


Figura 8: Esquema simplificado da situação de eclipse solar pontual. Em amarelo temos o Sol, em cinza a Lua e em azul, como sinalizado, a Terra.

Já que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , vemos que os triângulos OBA (hehe) e OCD são semelhantes pelo caso AA. Por construção,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são o raio do Sol e da Lua, ou seja  $AB = R_{\odot}$  e  $CD = R_L$ . Assim, aplicando as relações de semelhança, encontramos que:

$$\frac{a_{\odot}}{R_{\odot}} = \frac{d}{R_L} \Rightarrow d = a_{\odot} \frac{R_L}{R_{\odot}}$$

Substituindo  $a_{\odot} = 1,50 \cdot 10^{11} m$ ,  $R_L = 1,74 \cdot 10^6 m$  e  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 m$ , vemos que  $d = 3,75 \cdot 10^8 m$ . De acordo com a [Wikipedia](#), a distância Terra-Lua vai de  $3,63 \cdot 10^8 m$  (perigeu) até  $4,06 \cdot 10^8 m$  (apogeu), ou seja, não só é uma distância possível<sup>5</sup>, como também pode ocorrer da Lua estar mais distante ainda. Nesse caso, o cone de sombra iria se fechar antes da Terra, daí fica a pergunta, o que veríamos nesse caso?

Quem estava curioso para saber sobre o terceiro tipo de eclipse que citei no começo dessa seção, já deve imaginar que tem algo a ver com anel. De fato, a

<sup>4</sup>Note que os ângulos são retos pois os raios de luz devem tangenciar a superfície dos corpos. Além disso, perceba que, na verdade a distância OB é  $a_{\odot} - R_{\oplus}$ , mas como  $a_{\odot} \gg R_{\oplus}$ , podemos aproximar para apenas  $a_{\odot}$ .

<sup>5</sup>Na verdade, a distância  $d$  que achamos é a distância da superfície da Terra até o centro da Lua. No entanto, as medidas dadas pela Wikipedia são a separação de centro a centro entre a Terra e a Lua, então, para compararmos, o certo mesmo seria somar o raio  $R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 m$  do nosso planeta, nos dando a distância  $D = 3,81 \cdot 10^8 m$  que também está dentro da margem, por isso coloquei apenas como uma nota de rodapé.



situação é bem parecida com um eclipse total, no entanto o círculo da Lua é menor que o do Sol, de forma que vemos um anel de luz ao redor da Lua, como mostra o esquema da Figura 9, também retirada da [Wikipedia](#).

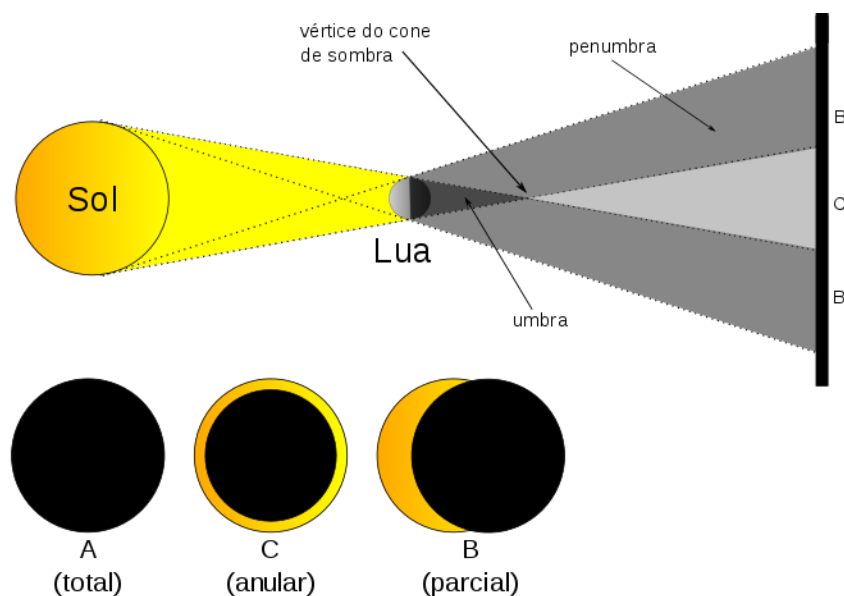


Figura 9: Esquema do eclipse anular e legenda com a o que um observador vê nas regiões A, B e C, note que ela complementa a Figura 7.

Talvez enxergar porque é formado esse anel seja difícil de visualizar pelo esquema da Figura 9, até por ser uma situação com corpos enormes muito distante do nosso cotidiano. Na verdade, se torna bem mais intuitivo se você tentar (ou só imaginar, funciona também) com coisas mais comuns, tipo uma lâmpada e uma bolinha. Se você estiver em uma sala iluminada por uma lâmpada e uma bolinha na mão e você decidir cobrir a luz da lâmpada com a bolinha, é fácil de perceber que se você colocar a bolinha bem perto do seu olho, ela vai cobrir toda a luz da lâmpada. Se você for afastando a bolinha do seu olho, uma hora ela vai parar de cobrir toda a luz e então, se você continuar afastando seu braço, agora ela só vai estar cobrindo uma parcela da luz, deixando passar os raios ao redor dela. Bem mais simples, né?

## 2.2. Eclipse Lunar

Os eclipses lunares ocorrem quando a Lua passa na sombra da Terra (ou seja, atrás da Terra), bem parecido com o eclipse solar, mas estamos trocando a Terra e a Lua de posição. Novamente, se pensarmos nas configurações planetárias, a Lua passa por lá quando ela está em “Oposição” (ver Figura 5). Logo, eclipses lunares sempre ocorrem em Lua Cheia.

Devido ao fato do tamanho da Terra ser consideravelmente maior que o da Lua (aproximadamente 50 vezes maior, em volume), a sombra que a Terra faz na Lua é consideravelmente maior também, de modo que, enquanto a sombra da Lua em um eclipse solar só pode ser visto em algumas regiões da Terra, a sombra (tanto a umbra quanto a penumbra) da Terra é capaz de cobrir a Lua em sua totalidade. Portanto, temos 3 tipos de eclipses lunares: total, parcial e penumbral. Na realidade, o eclipse penumbral também é dividido em parcial e total, entretanto, a variação do brilho da Lua quando ela passa pela penumbra não é muito significativa, de forma que o eclipse penumbral parcial e total são quase iguais, por isso fica a sua escolha separar em dois o eclipse lunar penumbral ou não.

Quanto aos outros dois, estão relacionados com a passagem da Lua na sombra da Terra: se ela for completamente encoberta, é um eclipse total, se for parcialmente, parcial. A Figura 10 (retirada da [Wikipedia](#)) mostra o esquema dos casos (as linhas representam a trajetória da Lua).

Uma característica notável do eclipse lunar total é que, ao invés de ficar completamente escura, a Lua fica na verdade avermelhada. Isso ocorre por conta de um fenômeno chamado “Dispersão de Rayleigh”<sup>6</sup>, o qual não entrarei muito no mérito de explicar rigorosamente por fugir do escopo da aula, mas, basicamente, cada comprimento de onda é desviado de uma maneira diferente pela refração da luz do Sol na atmosfera terrestre, de forma que a luz vermelha é convenientemente desviada para a região da umbra. Para ficar um pouco mais claro porque é vermelho e não azul (ou verde), pense na cor do céu quando o Sol está se pondo, é avermelhado né? Pois bem, se você estivesse na Lua olhando para o Sol, ele também estaria se pondo, mas, ao invés de se por no horizonte, ele estaria se pondo atrás da Terra. Não é exatamente um argumento rigoroso, mas pelo menos não faz parecer que eu tirei do bolso o porquê de ser vermelho.

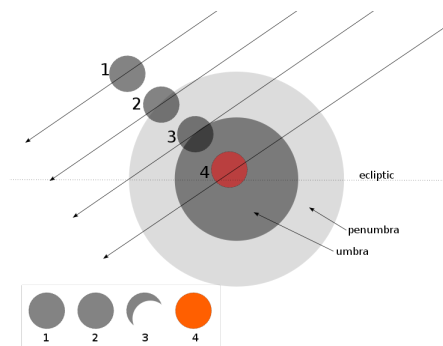


Figura 10: 1- Não há eclipse; 2- Eclipse Lunar Penumbral (Parcial); 3- Eclipse Lunar Parcial; 4- Eclipse Lunar Total; perceba que a imagem da Lua em 1 é igual a imagem em 2.

<sup>6</sup>Ele também é responsável pelo fato do céu ser azul, caso você queira dar uma lida mais aprofundada sobre, veja [aqui](#) em português ou [aqui](#) em inglês, porém mais completo

O que nos resta é analisar se é possível que ocorra um eclipse lunar anular. Podemos fazer isso da mesma forma que fizemos com o eclipse solar, para calcular a distância Terra-Lua  $d$  necessária para o eclipse “pontual” e ver se isso é uma configuração possível para Lua. Essencialmente os cálculos são os mesmos, mas estaremos trocando o raio da lua pelo raio  $R_{\oplus}$  da Terra.

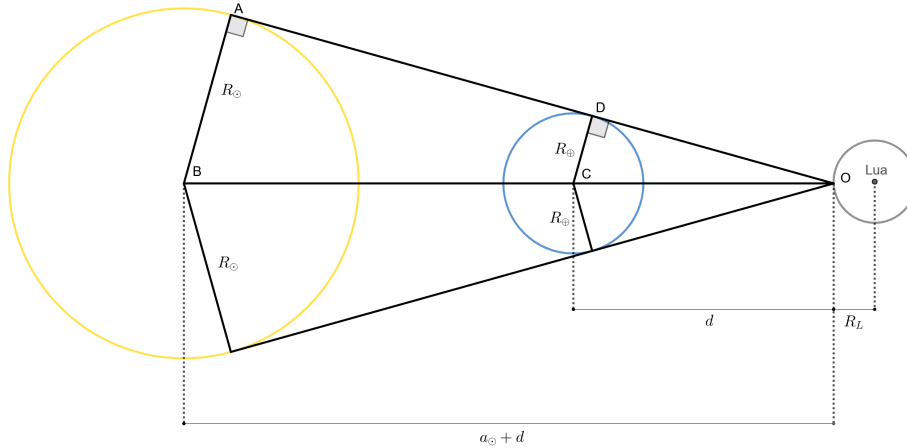


Figura 11: Esquema simplificado da situação de eclipse lunar pontual. Em amarelo temos o Sol, em azul a Terra e em cinza a Lua.

Pela semelhança, temos:

$$\frac{a_{\odot} + d}{R_{\odot}} = \frac{d}{R_{\oplus}} \Rightarrow R_{\odot}d = a_{\odot}R_{\oplus} + R_{\oplus}d \Rightarrow d = a_{\odot} \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot} - R_{\oplus}}$$

Substituindo<sup>7</sup>,

$$d = 1,50 \cdot 10^{11} \cdot \frac{6,37 \cdot 10^6}{6,96 \cdot 10^8 - 6,37 \cdot 10^6} = 1,39 \cdot 10^9 \text{ m} > 4,06 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Já que aquele é o valor do apogeu, ponto mais distante da Terra que a Lua chega, vemos que não é possível ocorrer um eclipse lunar anular.

### 3. Período Sideral e Sinódico

Além de configurações planetárias e eventos astronômicos, ao estudarmos o Sistema Solar, é necessário sabermos intervalos de tempo. Perguntas como “Em quanto tempo teremos outra Lua Cheia?” ou “Em quanto tempo Júpiter estará em oposição de novo?” é o que iremos tentar responder nessa seção. Bora?

<sup>7</sup>Perceba que a distância de verdade é  $D = d + R_L$ , no entanto é fácil de ver que acrescentar o raio da Lua ao  $d$  nem muda seu valor, isto é,  $d \gg R_L$ .

### 3.1. Período Sideral

Talvez a palavra “Sideral” te faça pensar que é algo que você não conhece, mas não se deixe enganar, período sideral nada mais é do que o período que você está acostumado a saber. É o tempo que a Lua demora para dar uma volta na Terra, é o tempo que a Terra (ou qualquer outro planeta, mas claro, com um outro valor de período sideral) demora para transladar em torno do Sol, entre outros exemplos. De maneira rigorosa, o período sideral é definido como o intervalo de tempo que um corpo leva para completar uma volta em sua órbita *em relação a uma estrela distante*. Essa última condição ficará mais clara quando introduzirmos o próximo tipo de período:

### 3.2. Período Sinódico

Como acabamos de ver, período sideral é o tempo que demora para uma certa configuração se repetir no referencial de uma *estrela distante*. No entanto, para nós que estamos na Terra e não em uma estrela distante, esse intervalo de tempo talvez não seja tão relevante para realizar observações, eu não quero saber quanto tempo vai demorar para uma estrela longe ~~que nem vida tem~~, ~~estrela nem é gente~~ ver outra Lua Cheia, eu quero saber quanto tempo **eu** vou levar para ver uma próxima Lua Cheia, entende o problema? A partir desse conflito, criou-se o conceito de período sinódico.

Período sinódico é o intervalo de tempo entre duas configurações iguais de um outro corpo, no *referencial da Terra* (ou qualquer outro corpo rotacionando, como iremos ver). Para encontrar seu valor, considere a situação:

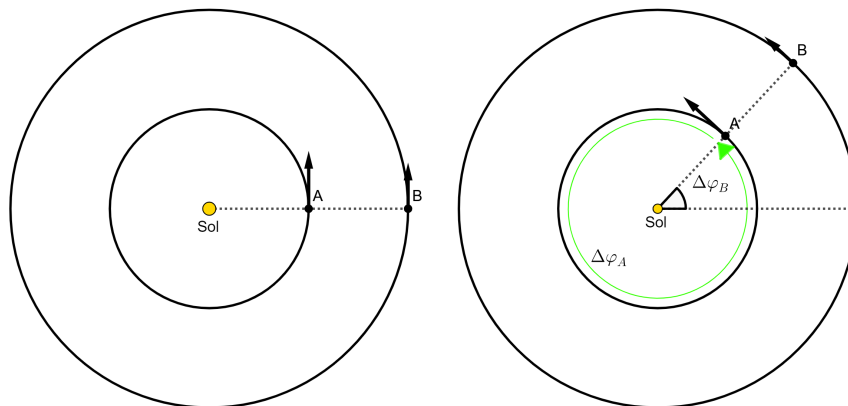


Figura 12: Esquema do que ocorre após um período sinódico

Como o Planeta A está mais perto do Sol, sua velocidade angular  $\omega_A$  é maior do que a velocidade angular  $\omega_B$  do outro planeta. Dessa forma, o único jeito de eles se “encontrarem”, é se o Planeta A dar uma volta a mais do que o B.

Assim, podemos escrever a relação entre o ângulo que cada um percorreu como:

$$\Delta\varphi_A = \Delta\varphi_B + 2\pi,$$

já que  $2\pi \text{ rad}$  é o valor de uma volta ( $360^\circ$ ).

Assumindo órbitas circulares, os planetas devem ter velocidade constante de acordo com a 2ª Lei de Kepler. Assim, sendo  $P_A$  e  $P_B$  os períodos **siderais** de A e B, respectivamente, sabemos que as velocidades angulares são dadas por:

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

Por fim, por cinemática, sabemos que a variação angular deve ser dada por:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

Finalmente, se S for o período sinódico, sabemos que  $\Delta t = S$  pela condição de encontro, logo:

$$\frac{2\pi}{P_A}S = \frac{2\pi}{P_B}S + 2\pi \Rightarrow S \left( \frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_B} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_B}.$$

**Observações importantes:** essa fórmula só vale para planetas girando para o mesmo sentido e, para que S não dê negativo, você deve colocar, quando for aplicar a fórmula,  $P_A$  como sendo o menor período entre os dois. Perceba que poderíamos ter isolado o S, mas do jeito que apresentamos a fórmula, ela é mais fácil de ser memorizada. Uma aplicação direta disso é que, dados o período sideral de Júpiter como sendo  $P_J = 12 \text{ anos}$ , podemos encontrar seu período sinódico  $S_J$  como sendo:

$$\frac{1}{S_J} = \frac{1}{P_{Terra}} - \frac{1}{P_J},$$

já que o período sideral da Terra é simplesmente 1 ano<sup>8</sup>:

$$\frac{1}{S_J} = \frac{1}{1} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \Rightarrow S_J = \frac{12}{11} \approx 1,09 \text{ ano} \approx 400 \text{ dias}.$$

Ou seja, respondendo a pergunta do começo dessa seção, demora, aproximadamente, 400 dias para ocorrer uma nova oposição.

---

<sup>8</sup>Perceba que a unidade do período sinódico será a mesma que você colocou para os períodos sinódicos, então lembre-se: seja coerente, se usar anos para um dos períodos, você deve usar anos para o outro, para então seu período sinódico sair em anos também

## 4. Exercícios

1. (**Dia Solar e Dia Sideral**) Uma relação importante que podemos encontrar com o conceito de período sinódico é a diferença entre dia solar e dia sideral. Por definição, um dia solar é o tempo que o Sol leva para voltar ao mesmo lugar (por exemplo, no zênite) em relação a um observador na Terra e ele vale 24 horas. De maneira bem similar, o dia sideral é definido como o período de rotação da Terra. No entanto, como já vimos, o fato da Terra estar transladando ao redor do Sol faz com que esses dois valores não sejam iguais. Dito isso, faça o que se pede:
  - (a) Demonstre que a fórmula encontrada para o período sinódico também funcionaria caso o corpo B estivesse orbitando o corpo A (mas o corpo A continua orbitando o Sol).
  - (b) Com isso, calcule o período sinódico  $S_L$  da Lua (esse intervalo de tempo também é chamado de Luação ou Mês Sinódico). Considere o período sideral da Lua sendo  $P_L = 27,3 \text{ dias}$ .
  - (c) Por fim, fazendo as correspondências necessárias, calcule a duração de um dia sideral em horas, minutos e segundos. Considere que  $1 \text{ ano} = 365,25 \text{ dias (solares)}$ .
2. (**Eclipse Coletivo**) Aborrecido por descobrir que o próximo eclipse que ocorrerá na sua região será parcial, o menino Markitos decide criar um dispositivo que afastará a Lua (temporariamente) para tornar o eclipse uma experiência unificada: ao invés de alguns verem um eclipse total e outros um eclipse parcial, todos irão ver um eclipse anular (todos, menos o pessoal que está no fuso oposto e é de noite para eles, F). Graças ao seu grande conhecimento tecnológico, Markitos facilmente cria seu dispositivo. Por sorte, Markitos também é muito bom em Astronomia e sabe que se ele afastar demais a Lua, quase nem será possível vê-la (já que seu diâmetro angular ficará muito pequeno) e, portanto, quer afastá-la o mínimo possível. Ele determina que, para ficar satisfeito com o resultado, a Lua deve encobrir mais de 10% do Sol (em termos da área, quando vistos da Terra). Infelizmente, por saber demais das outras matérias, Markitos tem sérios problemas com geometria. Assim, Markitos pede encarecidamente pela sua ajuda para encontrar a mínima distância Terra-Lua para que suas expectativas de um eclipse solar igualitário sejam atendidas. Ele ficará decepcionado com o resultado?

## 5. Resoluções

### 1. (Dia Solar e Dia Sideral)

- (a) Utilizando o mesmo raciocínio que vimos para deduzir inicialmente, temos:

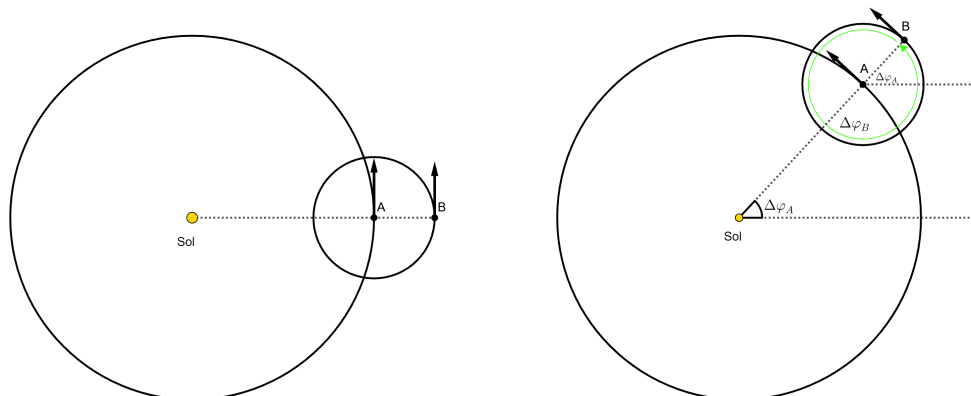


Figura 13: Configuração dos corpos ao se passar um período sinódico

Que é bem parecido com a outra vez. Entretanto, agora quem deu uma volta a mais foi o corpo B:

$$\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_A + 2\pi$$

Fazendo as mesmas contas,

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_B} - \frac{1}{P_A},$$

que é a mesma fórmula (pelo menos se você usar a regra de colocar o menor período primeiro e depois o maior).

- (b) Para a Lua, fica:

$$\frac{1}{S_L} = \frac{1}{P_L} - \frac{1}{P_{Terra}} \Rightarrow \frac{1}{S_L} = \frac{1}{27,3} - \frac{1}{365,25} \Rightarrow S_L = 29,5 \text{ dias.}$$

- (c) Basta perceber que estamos essencialmente orbitando a Terra com um período sideral  $P_{rot}$  que é igual ao período de rotação da Terra. Além disso, precisamos entender que um dia solar é essencialmente definido como o período sinódico do Sol. Logo (colocando tudo em dias solares):

$$\frac{1}{S_{Sol}} = \frac{1}{P_{rot}} - \frac{1}{P_{Terra}} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{P_{rot}} - \frac{1}{365,25} \Rightarrow P_{rot} = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{-1}$$

portanto,  $P_{rot} = 0,997 \text{ dias solares} = 23h56min04s$ .

2. (**Eclipse Coletivo**) Podemos notar que no caso de mínima distância o cone que se forma após o cone de sombra se “fechar” deve tangenciar simetricamente a Terra, pois, nesse caso, qualquer movimento pra frente que fizermos com a Terra, alguma parte dela sairá do cone, violando nossa condição. Devido a simetria, podemos tratar a figura como bidimensional. Temos então:

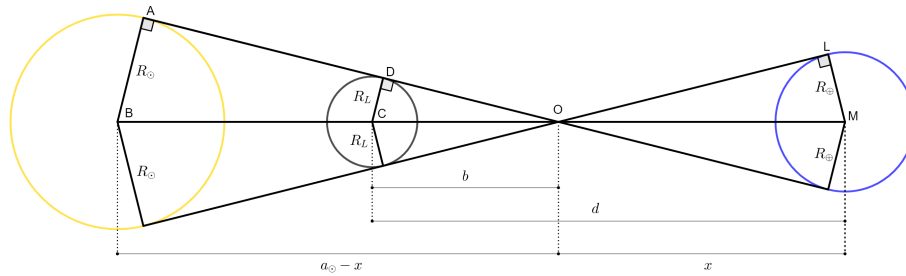


Figura 14: Ilustração do exercício. Em amarelo temos o Sol, em preto a Lua e em azul a Terra

Seja  $x$  a distância do centro da Terra até o ponto onde o cone de sombra da Lua converge,  $b$  o mesmo só que para a Lua e  $d$  a distância Terra-Lua. Lembrando que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, vemos que todos os triângulos retângulo da figura são semelhantes pelo caso AA. Pela semelhança entre os triângulos OBA e OML, tiramos que<sup>9</sup>:

$$\frac{x}{R_{\oplus}} = \frac{a_{\odot} - x}{R_{\odot}} \Rightarrow \frac{x}{R_{\oplus}} = \frac{a_{\odot}}{R_{\odot} + R_{\oplus}} \Rightarrow x = a_{\odot} \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot} + R_{\oplus}}$$

Agora, vendo a semelhança entre OCD e OML:

$$\frac{b}{R_L} = \frac{x}{R_{\oplus}} \Rightarrow b = x \frac{R_L}{R_{\oplus}}$$

Por fim, é fácil de notar que  $d = x + b$ , logo:

$$d = x \left( 1 + \frac{R_L}{R_{\oplus}} \right) = a_{\odot} \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot} + R_{\oplus}} \left( 1 + \frac{R_L}{R_{\oplus}} \right),$$

substituindo  $a_{\odot} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $R_L = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$  e

<sup>9</sup>Aqui usamos uma propriedade de frações que diz que, se  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$



$R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 m$ , encontramos que  $d = 1,73 \cdot 10^9 m$ . Com o valor de  $d$ , podemos encontrar o diâmetro angular da Lua como sendo:

$$\theta_L = \frac{2R_L}{d} = 2,01 \cdot 10^{-3} rad$$

Analogamente, para o Sol:

$$\theta_{\odot} = \frac{2R_{\odot}}{a_{\odot}} = 9,28 \cdot 10^{-3} rad$$

Já que os diâmetros angulares são pequenos, podemos aproximar suas “áreas angulares” para  $A = \frac{\pi\theta^2}{4}$ , de forma que a razão  $\eta$  entre as áreas é:

$$\eta = \frac{\frac{\pi\theta_L^2}{4}}{\frac{\pi\theta_{\odot}^2}{4}} = \left(\frac{\theta_L}{\theta_{\odot}}\right)^2 = \left(\frac{2,01 \cdot 10^{-3}}{9,28 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 0,0469 = 4,69\% < 10\%.$$

Infelizmente, Markitos ficará decepcionado com o resultado ☹