Análise Dimensional

Sistema Internacional = define as unidades de medida, partindo de 7 grandezas fundamentais:

1. distância, medida em metros, com símbolo m;
2. massa, medida em quilogramas, com símbolo kg;
3. tempo, medido em segundos, com símbolo s;
4. corrente elétrica, mediada em Ampères, símbolo A;
5. temperatura termodinâmica, medida em kelvins, com símbolo K;
6. Quantidade de matéria, medida em mols, símbolo mol 1;
7. Intensidade luminosa, medida em candelas, símbolo cd.

OBS.: TRABALHAREMOS SOMENTE COM DISTÂNCIA, MASSA E TEMPO! Então serão as mais importantes para nós ☺️

Todas as outras unidades com as quais trabalhamos derivaram das que foram citadas no último slide, por exemplo:

[F] = N, mas o que é um Newton?
Bem, sabemos, pela segunda lei de Newton, que F = m.a

Ok! E já sabemos que a massa (a qual representamos por m) é uma das unidades fundamentais, medida em quilogramas.

Mas e a aceleração? Bem, ela nada mais é que a medida de quanto a velocidade variou em um intervalo de tempo.

E a velocidade? Ela é a medida da variação da distância em dada variação de tempo. Agora chegamos onde eu queria, pois sabemos que tanto distância quanto tempo são unidades fundamentais. Logo, $v = \frac{d}{t}$ e, em unidades, $[v] = \frac{m}{s}$.

Agora o comeback:
a aceleração é a variação da velocidade no tempo, logo,

$$[a] = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s} . \frac{1}{s} = \frac{m}{s^2}$$

Então, nossa força, em unidades será: $[F] = kg . \frac{m}{s^2} = \frac{kg . m}{s^2}$

Porém para não precisarmos escrever $(kg.m)/s^2$ todas as vezes em que quisermos falar de força, decidiram dar a isso um nome, e nada mais justo que homenagear quem a manipulou algebricamente! Portanto, um $(kg.m)/s^2$ é a mesma coisa que um N.

Toda enrolação apenas para dizer que o que acabamos de fazer foi uma mera análise dimensional! Muito mais simples do que parece.

Mas o que seria então essa tão falada análise dimensional?

Eu gosto de dizer que a análise dimensional é basicamente manipulação algébrica com unidades de medida, mas, como o termo “manipulação algébrica” também assusta, digo que é somente brincar com a matemática, mas sem números, apenas nós, nossa criatividade e as letras (até onde as regras matemáticas nos permitem ir, claro).

Costumamos indicar as dimensões a partir de L, para comprimento, M, para massa, e T, para tempo, de forma a postular letras que indicarão certas grandezas, ao invés de usar arbitrariamente x, y, d, m, t, etc.

Logo,

[L] = m

[M] = kg

[T] = s

Fonte: vozes da minha cabeça.
Mas pra mim fez sentido ser esse o motivo.
Sei lá né. Esse pessoal das exatas é tudo doido.

E agora que já expliquei como se vocês fossem acéfalos, partiremos para o exercício ☺️

15) Em um livro de astrofísica, Nilton se deparou com uma equação a qual representava o tempo de algo. Infelizmente, o livro tinha falhas de impressão, que mancharam algumas partes, inclusive da explicação do que se tratava a equação. Uma dessas manchas, sobreporam os expoentes, respectivamente, da Constante Gravitacional, da massa do corpo e da velocidade da luz. Nilton, um menino sabido, considerou como **x** o expoente da constante, **y** o expoente da massa e, por fim, **z**, o expoente referente à velocidade da luz.

$$t = \frac{5120\pi G^x M^y}{\hbar c^z}$$

Após calculá-los, Nilton os multiplicou, obtendo:

Dica: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, em que h é a constante de Planck

(a) 6

(b) 12

(c) 24

(d) 30

(e) Em branco.

Quando resolvemos um exercício de análise dimensional, é fundamental que nos atentemos apenas àquilo que é necessário, e nós já sabemos que o que queremos destrinchar aqui são ***GRANDEZAS***.

Dito isso, transcreveremos a fórmula a qual devemos analisar:

$$t = \frac{5120\pi G^x M^y}{\hbar c^z} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \rightarrow$$

2π é uma constante ADIMENSIONAL. “Ah, mas tem o 2”.
E eu com isso??? Tem grandeza? Tem dimensão? NÃO, então não nos interessa.
Logo, a unidade de $\hbar$ será a mesma de h .

Agora, vamos analisar o que realmente precisamos, que serão as unidades de t, G, M, h e c.

“E o 5120π?” NÃO TEM UNIDADE DE MEDIDA NESSE INFERNOOOOOOO.

Beleza, então vamos por partes.

$$\left[h\right] = J \,.\, s = \frac{kg \,.\, m^2 \,.\, s}{s^2} = \frac{kg \,.\, m^2}{s}$$ e usando as letrinhas sobre as quais

dissemos antes, ficaria $\left[h\right] = M \,.\, L^2 \,.\, T^{-1}$

$$\left[G\right] = \frac{N \,.\, m^2}{kg^2} = \frac{\frac{kg \,.\, m \,.\, m^2}{s^2}}{kg^2} = \frac{kg \,.\, m^3}{s^2 \,.\, kg^2} = \frac{m^3}{s^2 \,.\, kg} = L^3 \,.\, T^{-2} M^{-1}$$

$$[c] = \frac{m}{s} = L \,.\, T^{-1}$$

$$[M] = kg = M$$

$$[t] = s = T$$

E agora joga geral na fórmula.

$$[t] = \frac{[G]^x[M]^y}{[h][c]^z} \longrightarrow T = \frac{(L^3M^{-1}T^{-2})^x M^y}{ML^2T^{-1}\left(LT^{-1}\right)^z} \longrightarrow$$

$$M^0L^0T^1 = \frac{L^{3x}}{L^2L^z} \cdot \frac{M^y}{M^xM} \cdot \frac{TT^z}{T^{2x}} \longrightarrow M^0L^0T^1 = L^{3x-2-z} \cdot M^{y-x-1} \cdot T^{1+z-2x}$$

Agora colocaremos tudo isso em um sistema de equações, por praticidade mesmo:

$$\begin{cases} M^0 = M^{y-x-1} \\ L^0 = L^{3x-2-z} \\ T^1 = T^{1+z-2x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = y - x - 1 \\ 0 = 3x - 2 - z \\ 1 = 1 + z - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x = 1 \\ 3x - z = 2 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 1 & \text{(I)} \\ 3x - z = 2 & \text{(II)} \\ z - 2x = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

$(II) + (III)$:
$3x - z + z - 2x = 2 + 0$
$x = 2$

(I):
$y - 2 = 1$
$y = 1 + 2$
$y = 3$

(III):
$z - 2.2 = 0$
$z = 4$

Agora que já encontramos x, y e z, faremos o que o exercício nos pediu, que foi multiplica-los.

$x \,.\, y \,.\, z = 2.3\,.\,4 = 24$ → Alternativa C ☺️