QUESTÕES LONGAS

1. Uma lua orbita um planeta de maneira que o plano de sua órbita é perpendicular à superfície do planeta no local onde o observador está situado. Após aplicados os fatores de escala necessários, a órbita satisfaz a equação:

$$9\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}-4\right)^2+25\left(-\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=225$$

Considere coordenadas cartesianas, onde x está no plano horizontal e y no zênite do observador. Seja r o raio da lua. Assuma que o período de rotação do planeta é muito maior que o período orbital da lua. Ignore a refração atmosférica.

a. Calcule os semi-eixos maior e menor da elipse.
b. Calcule o ângulo zenital do perigeu.
c. Determine $\tan\frac{\theta}{2}$, onde θ é o ângulo de elevação (altura da tangente superior da lua), quando a lua parece maior para o observador.

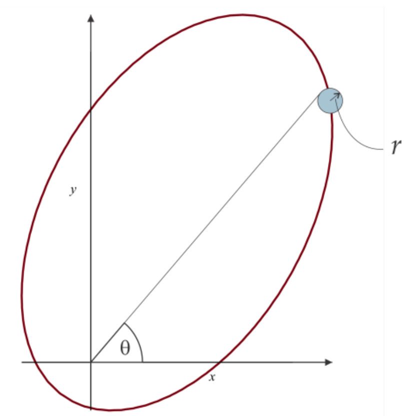

Figura 1

2. Duas estrelas massivas A e B, com massas m_A e m_B, estão separadas por uma distância *d.* Ambas estrelas orbitam o centro de massa do sistema. Suponha que as órbitas são circulares e que estão contidas no plano *X-Y,* cuja origem fica no centro de massa do sistema (Figura 2)

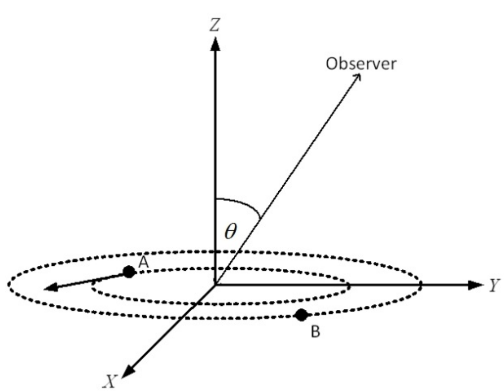

Figura 2

a. Encontre as expressões para as velocidades tangencial e angular da estrela A.

Um observador localizado no plano *Y-Z* (Figura 2) observa as estrelas distantes com um ângulo θ relativo ao eixo *Z*. Ele mede a componente da velocidade da estrela A ao longo da linha de visada e conclui que ela possui a forma $K\ cos(\omega t+\varepsilon)$, onde *K* e ε são constantes positivas.

b. Expresse o valor de $K^3/\omega G$ em termos de m_A, m_B, e θ, onde *G* é a constante da gravitação universal.

Suponha agora que o observador consegue medir a massa da estrela A, e que essa vale $30M_S$, onde M_S é a massa do Sol. Além disso, ele observa que a estrela B emite raios-X, o que o leva a suspeitar que ela possa ser uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Esta conclusão depende do valor de m_B, da seguinte maneira: i) se $m_B < 2M_S$, então B é uma estrela de nêutrons; ii) se $m_B > 2M_S$, então B é um buraco negro.

c. O observador realizou uma medição que forneceu $\frac{K^3}{\omega G}=\frac{1}{250}M_S$. Na prática, o valor de θ geralmente é desconhecido. Para quais valores de θ a estrela B pode ser um buraco negro?

3. Suponha que uma estrela esférica e estática é composta de *N* partículas neutras, e que seu raio é *R* (Figura 3).

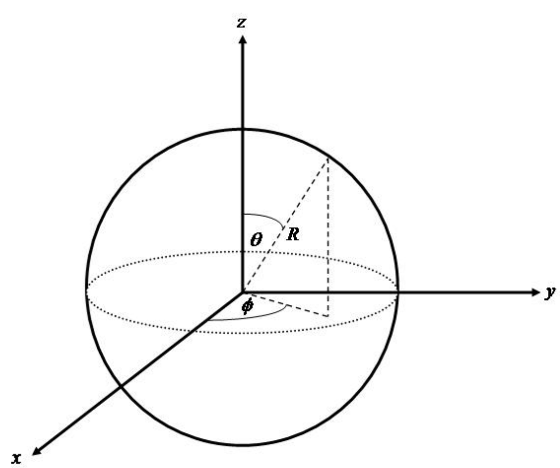

Figura 3

Sejam $\mathbf{0 \leq \theta \leq \pi}$, $\mathbf{0 \leq \phi \leq 2\pi}$, e a seguinte equação de estado é satisfeita

$$\boldsymbol{P\,V = N\,k\,\frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)}} \qquad (1)$$

onde P e V são a pressão no interior da estrela e o volume da estrela, respectivamente, e k é a constante de Boltzmann. $\boldsymbol{T_R}$ e $\boldsymbol{T_0}$ são as temperaturas na superfície $(\boldsymbol{r = R})$ e no centro $(\boldsymbol{r = 0})$, respectivamente. Suponha $\boldsymbol{T_R \leq T_0}$.

a. Simplifique a equação de estado (1) usando $\Delta \boldsymbol{T = T_R - T_0 \approx 0}$. Este caso é chamado de "estrela ideal". (Dica: use a aproximação $\mathbf{ln(1+\boldsymbol{x})} \approx \boldsymbol{x}$ para pequenos valores de x)

Suponha que a estrela passe por um processo quase-estático, no qual ela pode passar por pequenas contrações e expansões, mas sem invalidar a equação de estado (1).

A estrela satisfaz a Primeira Lei da Termodinâmica

$$\boldsymbol{Q = \Delta M c^2 + W} \qquad (2)$$

Onde Q, M, e W são o calor, massa da estrela, e trabalho, respectivamente, c é a velocidade da luz no vácuo, e $\boldsymbol{\Delta M \equiv M_{\mathbf{final}} - M_{\mathbf{inicial}}}$.

No próximo item, iremos assumir $\boldsymbol{T_0}$ constante, enquanto $\boldsymbol{T_R \equiv T}$ é variável.

b. Encontre a capacidade térmica da estrela a volume constante $\boldsymbol{C_v}$ em termos de M, e a capacidade térmica a pressão constante $\boldsymbol{C_p}$ em termos de $\boldsymbol{C_v}$ e T. (Dica: use a aproximação $\boldsymbol{(1+x)^n \approx 1 + nx}$ para pequenos valores de x)

Suponha agora que $\boldsymbol{C_v}$ é constante e que o gás passa por um processo isobárico, de modo que a estrela produz calor e o irradia para o espaço.

c. Encontre o calor produzido pelo processo isobárico, se as temperaturas inicial e final forem $\boldsymbol{T_i}$ e $\boldsymbol{T_f}$, respectivamente.

d. Suponha que um observador está muito distante da estrela. Usando as informações do item c, estime a distância do observador até a estrela.

Para os próximos dois itens, assuma que a estrela é o nosso Sol.

e. Se a luz solar for monocromática, com frequência $\mathbf{5 \times 10^{14}}$ Hz, estime o número de fótons irradiados pelo Sol a cada segundo.

f. Calcule a capacidade térmica $\boldsymbol{C_v}$ do Sol assumindo que sua temperatura superficial varia de 5500 K até 6000 K em um segundo.