Gabarito Lista γ

Fabrizio Melges, Luan de Souza, Ian Seo Takose e Bruno Makoto

Problema 1

- Densidade numérica de monopolos magnéticos na época de sua criação: $n_M(t_{GUT}) \approx 10^{82}\ \text{m}^{-3}$
- Probabilidade atual de existir um monopolo magnético no universo observacional: $p_0 = 10^{-2}$
- Raio atual do universo observacional: $R_0 = 14.25$ Gpc
- Fator pelo qual o Universo se expandiu entre o final da inflação e hoje: $f_{i0} = 5 \times 10^{26}$
- Fator pelo qual o Universo se expandiu durante o período de inflação: f_N

Como estamos considerando um Universo plano, o universo observacional será simplesmente uma esfera de raio R. Sendo V_0 o volume do universo observacional atual, a densidade numérica de monopolos magnéticos atual será simplesmente:

$$n_M(t_0) = \frac{p_0}{V_0} = \frac{3p_0}{4\pi R^3}$$

Em termos de $n_m(t_{GUT})$, $n_M(t_0)$ pode ser escrito como:

$$n_M(t_0) = n_m(t_{GUT}) {f_{i0}}^{-3} {f_N}^{-3}$$

Igualando as duas expressões, obtemos:

$${f_N}^3 = n_m(t_{GUT}) {f_{i0}}^{-3} \frac{4\pi {R_0}^3}{3p_0}$$

$$f_N \approx e^{65}$$

Problema 2

Rearranjando e integrando a equação diferencial dada, obtemos:

$$\int_{E_i}^{E_f} \frac{1}{E}\, dE = \int_{r_i}^{r_f} 1\ dr$$

Portanto:

$$\ln \frac{E_i}{E_f} = kr$$

Mas como a energia de um fóton é dada por $E = \frac{hc}{\lambda}$, temos:

$$\ln \frac{hc}{\lambda_i} \frac{\lambda_f}{hc} = \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_f} = kr$$

Neste caso o redshift será $z + 1 = \frac{\lambda_i}{\lambda_f}$, logo:

$$\ln z + 1 = kr$$

Utilizando a seguinte aproximação

$$\ln (1 + x) \approx x \quad , \text{se } x \ll 1$$

Obtemos:

$$z \approx kr$$

Evidentemente esta hipótese implica em uma relação distancia-redshift que é linear para $z \ll 1$. Utilizando da lei de Hubble ($z = \frac{H_0}{c} r$), temos:

$$k = \frac{H_0}{c}$$

Substituindo:

$$k \approx 2.27 \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$$

Problema 3

A partir do vetor posição e velocidade de um satélite em um dado instante, é possível diretamente calcular o momento angular específico e a energia mecânica específica do satélite:

$$\left|\vec{h}\right| = |\vec{r} \times \vec{v}| \approx 8.08 \times 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\varepsilon = \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{|\vec{r}|} \approx -1.19 \times 10^7 \text{ J}$$

Para calcular a inclinação da órbita, temos que utilizar do fato do vetor do momento angular específico ser constante e perpendicular ao plano da órbita no problema de dois corpos. Assim, a inclinação da órbita será simplesmente o ângulo entre o vetor do momento angular específico e o eixo Z do sistema de coordenadas em questão. Sendo $\vec{k}$ o vetor unitário paralelo ao eixo Z, temos:

$$\vec{h} \cdot \vec{k} = \left|\vec{h}\right| \cos i$$

Verificando que $\vec{h} \cdot \vec{k} > 0$ (para conferir o quadrante), obtemos:

$$i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot \vec{k}}{\left|\vec{h}\right|} \approx 18.9°$$

Problema 4

Primeiramente, vamos calcular a energia mecânica específica do satélite:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{H + R_\oplus} \approx -4.15 \times 10^7 \text{ J} < 0$$

Como $\varepsilon < 0$, sabemos que a órbita é fechada. Para conferir se o objeto irá colidir com a Terra, temos que verificar se o perigeu da "órbita"está dentro da Terra (i.e. $r_p < R_\oplus$). Como $\varepsilon < 0$, temos:

$$a = -\frac{GM_\oplus}{2\varepsilon} \approx 4.8 \times 10^6 \text{ m}$$

Onde a é semi-eixo maior da órbita. A partir de γ, podemos calcular o momento angular específico do objeto:

$$h = (H + R_\oplus)v \ \sin\gamma \approx 5.5 \times 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Para qualquer órbita cônica, a excentricidade orbital será:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{G^2 M^2}}$$

Substituindo:

$$e \approx 0.99$$

Calculando o raio do "perigeu", obtemos:

$$r_p = a(1 - e) \approx 48 \times 10^3 \text{ m} < R_\oplus$$

Portanto o objeto poderia ser um míssil balístico.

Problema 5

c)

i) Pela 3ª Lei de Kepler

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} \Rightarrow m_1+m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \Rightarrow \boxed{m_1+m_2 = 46,3\, M_\odot}$$

b)

i) Sabemos que

$$q = a(1-e), \quad Q = a(1+e) \Rightarrow e = \frac{Q-q}{Q+q}; \quad a = \frac{Q+q}{2}$$

$$l = a(1-e^2)$$

Assim $e = \frac{12-6}{12+6} = \frac{1}{3}$, $a = \frac{12+6}{2} = 9\ \text{U.A}$ $\Big\}$ $l = a(1-e^2) \Rightarrow \underline{l = 8\ \text{UA}}$

ii) Pela equação vis-viva

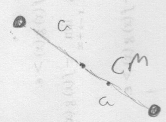
$$V = \sqrt{G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{l} - \frac{1}{a}\right)} \Rightarrow \boxed{V = 75,65\ \text{Km/s}}$$

c)

i) Pela 3ª Lei de Kepler

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{m_1+m_2} \Rightarrow a^3 = P^2(m_1+m_2) \Rightarrow a = 3,15\ \text{UA}$$

ii)



Pelo desenho, $r = 2a$

$$\Rightarrow \boxed{r = 6,3\ \text{UA}}$$

Problema 6

a)

i) Calculando a velocidade da nave em relação a Terra

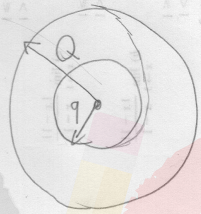
$$V=\sqrt{\frac{GM_\oplus}{R+h}} \Rightarrow \boxed{V_1=7,74\,km/s}$$

ii) Calculando a velocidade da Terra em relação ao Sol

$$V=\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}} \Rightarrow V_2=29,83\,km/s$$

iii) Usando as fórmulas da Transferência de Hohmann

$$\Delta V_1=\sqrt{\frac{GM}{q}}\left(\sqrt{\frac{2Q}{Q+q}}-1\right)=6,70\,km/s$$



$$\Delta V_2=\sqrt{\frac{GM}{Q}}\left(1-\sqrt{\frac{2q}{Q+q}}\right)=5,04\,km/s$$

iv) Calculando o ΔV total

$$\Delta V_{tot}=\Delta V_1+\Delta V_2-V_1 \Rightarrow \boxed{\Delta V_{tot}=4\,km/s}$$

b)

i) Pela fórmula

$$\Delta V=V_e\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) \Rightarrow \frac{m_0}{m_1}=e^{\Delta V/V_e} \Rightarrow \frac{m_1}{m_0}=e^{-\Delta V/V_e} \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_0}=0,135}$$

c)

i) Pela 3ª Lei de Kepler

$$\frac{P^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow P^2=a^3 \Rightarrow (2T)^2=a^3 \Rightarrow T^2=\frac{a^3}{4} \Rightarrow T=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Q+q}{2}\right)^3} \Rightarrow \boxed{T=1,41\,anos}$$

↳ P em anos, a em UA, m em $M_\odot$

↳ Ele percorre metade da elipse

Problema 7

Primeiramente, é muito importante entender o que está acontecendo. O enunciado grande e cheio de historinha só serve para te distrair do objetivo principal do exercício (e contextualizar o problema de uma maneira bacana, mas ninguém liga). Basicamente, temos um lançamento que vai do polo norte ao polo sul.

Já que queremos o tempo de voo, fica evidente que estaremos usando a 2ª Lei de Kepler. No entanto, o cálculo da área não será tão convencional, como é possível perceber pelo enunciado. O segredo aqui é não se intimidar. Apesar de haver uma integral feiassa, tudo que você precisa saber foi dado - queremos encontrar uma área e a fórmula dela foi dada, basta aplicarmos para o nosso caso. Queremos encontrar o $r(\theta)$ dessa elipse. Como você provavelmente já deve saber, para isso, precisamos do semi-eixo maior a e de sua excentricidade e.

Em exercícios assim, uma análise geométrica pode ajudar bastante. Note que o problema é simétrico em relação ao polos, isto é, se estivéssemos lançando do polo sul ao norte com os mesmos parâmetros, teríamos os mesmos resultados. Dessa forma, concluímos que o eixo de simetria da elipse tem que ser perpendicular à linha Polo Norte-Polo Sul. Esquematizando, chegamos em:

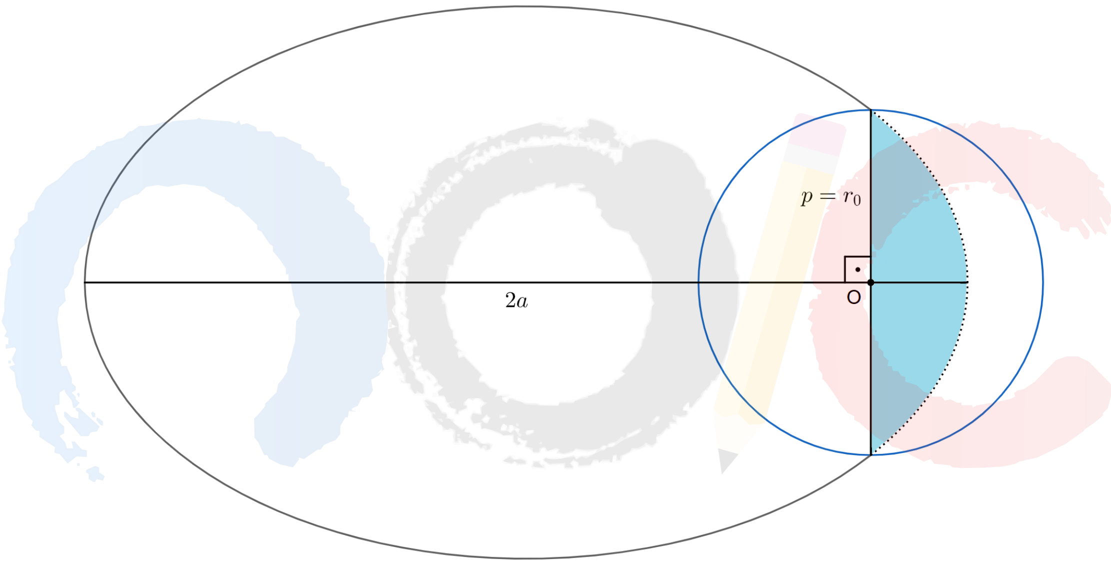


Figura 1: Esquema do lançamento do foguete.

O ponto O é o centro de AquaLuan. Sabemos também que o ponto O deve ser um dos focos da elipse, já que Gabriel estará orbitando o planeta. Dessa forma, concluímos que o raio do planeta é o semi-latus rectum p da órbita. Para uma elipse, sabemos que a distância a um dos focos como uma função do ângulo é dada por $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$.

Assim, vemos que, pela imagem, $p = r_{(\frac{\pi}{2})}$:

$$p = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cancelto{0}{\cos(\frac{\pi}{2})}} \Rightarrow r_0 = a(1-e^2)^{1} \tag{1}$$

[1]Perceba que, por conta disso, podemos escrever a fórmula da elipse simplesmente como $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$

Para encontrar o semi-eixo maior da órbita, só temos que lembrar a energia mecânica de uma órbita elíptica e igualarmos com a energia mecânica inicial do sistema:

$$E_i = E_M \Rightarrow \frac{\cancel{m} v_0^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{r_0} = -\frac{GM\cancel{m}}{2a} \Rightarrow a = r_0 \frac{GM}{2GM - v_0^2 r_0}$$

$$a = r_0 \times \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 7{,}4 \cdot 10^{22}}{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 7{,}4 \cdot 10^{22} - 2200^2 \times 1{,}7 \cdot 10^6} = 3{,}003\, r_0$$

Substituindo na Equação (1), temos:

$$\cancel{r_0} = \cancel{r_0} \frac{GM}{2GM - v_0^2 r_0} (1 - e^2) \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{GM}{2GM - v_0^2 r_0}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3{,}003}} = 0{,}8167$$

Agora que já temos todos os parâmetros da nossa elipse, podemos aplicar a fórmula da área. Mas antes, é necessário pensarmos em quais serão os θ_i e θ_f. Pela Figura 1, é fácil de ver que a área que queremos está compreendida entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Entretanto, a área calculada pela integral dada está entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Que área é essa? Se você olhar novamente pra imagem, é fácil de ver que é a área azul marcada na imagem, a qual é justamente a área que devemos subtrair da área total para encontrar a região que queremos. Para encontrar seu valor, basta aplicarmos a fórmula dada:

$$A = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{r_{(\theta)}^2}{2} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{1 + e\cos\theta} \right)^2 d\theta = \frac{r_0^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + 0{,}8167\cos(\theta))^2}$$

Felizmente, encontramos a mesma integral do exercício. Substituindo, vemos que:

$$A = \frac{r_0^2}{2} \times 1{,}49707 = 0{,}7485\, r_0^2$$

Para calcular a área total, precisaremos do semi-eixo menor b:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + (ae)^2 \Rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$b = 3{,}003\, r_0 \sqrt{1 - 0{,}8167^2} = 1{,}733\, r_0$$

Pela 3ª Lei de Kepler, podemos encontrar o período T como:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}003 \times 1{,}7 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 7{,}4 \cdot 10^{22}}} = 32620\, s$$

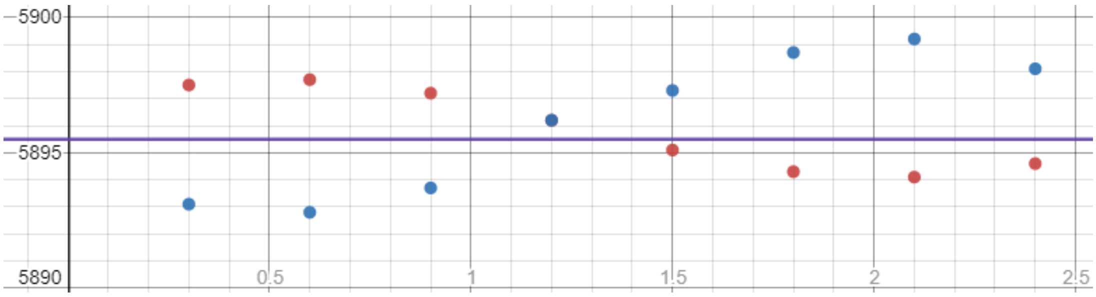
Finalmente, a soma entre o tempo que ele demoraria para percorrer essa região e o tempo de voo tem que ser igual ao período. Assim, se τ for o tempo de voo, temos, pela 2ª Lei de Kepler:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{A}{T - \tau} \Rightarrow \tau = T\left(1 - \frac{A}{\pi ab}\right) \Rightarrow \tau = 32620 \times \left(1 - \frac{0{,}7485\, \cancel{r_0^2}}{\pi \times 3{,}003 \times 1{,}733\, \cancel{r_0^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = 31126\, s \approx 3{,}1 \cdot 10^4\, s}$$

Problema 8

a) A primeira coisa a se notar é como os comprimentos de onda de cada estrela mudam ao longo do tempo. Vendo os valores por cima, já é possível identificar um padrão senoidal, porém, a fins de didática, aqui está um gráfico com os λ de cada estrela (vermelho $\rightarrow$ 1, azul $\rightarrow$ 2) entre $t = 0.3$ e $t = 2.4$. A reta roxa representa o comprimento de onda de repouso, $5895.5A$:



Note que tal comportamento se dá pois as estrelas, que possuem velocidade constante, nem sempre apontam diretamente para nós, então a velocidade radial varia continuamente. Desse modo, pode-se observar que os pontos de máximo e mínimo no gráfico são quando a estrela está se aproximando ou afastando diretamente de nós. Para a estrela 1, $\lambda_{max1} = 5897{,}7A$ e $\lambda_{min1} = 5894{,}1A$. Já para a estrela 2, $\lambda_{max2} = 5899{,}0A$ e $\lambda_{min2} = 5892{,}8A$. Perceba que $\lambda_{max1} - \lambda_0$ é diferente de $\lambda_0 - \lambda_{min1}$ (isso também ocorre para 2), uma vez que, apesar da velocidade do centro de massa do sistema ser pequena, ela não é desprezível na prática. Para não levarmos ela em conta, devemos calcular a média dos redshift máximo e mínimo, assim:

$$v_1 = \frac{c}{2}\left(\frac{\Delta\lambda_{max1}}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda_{min1}}{\lambda_0}\right) = 9{,}2 \cdot 10^4 m/s$$

Perceba que o sinal de menos no termo de λ_{min1} apareceu pois ele é negativo. Uma outra alternativa seria calcular o módulo.

Realizando os mesmos cálculos para a estrela 2, obtemos $v_2 = 1{,}6 \cdot 10^5 m/s$

b) Sabemos que as estrelas orbitam o centro de massa comum, logo:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2}{v_1} = 1{,}7$$

c) Analisando o gráfico, obtemos que o período P do sistema binário (que é o mesmo para as duas estrelas) é cerca de três dias. Agora, como $v_i = \frac{2\pi r_i}{P}$, temos:

$$r_1 = \frac{v_1 P}{2\pi} = 3{,}8 \cdot 10^9 m$$

Já para o corpo 2:

$$r_2 = \frac{v_2 P}{2\pi} = 6{,}5 \cdot 10^9 m$$

Perceba também que a razão $\frac{r_1}{r_2}$ é próxima daquela calculada no item b), como esperado.

Assim, a distância r entre as estrelas é $r = r_1 + r_2 = 1{,}0 \cdot 10^{10} m$

d) Pela terceira lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \Rightarrow m_1 + m_2 = 9{,}6 \cdot 10^{30} kg$$

Calculamos a razão $\frac{m_1}{m_2} = 1{,}72 = r$ no item b), logo:

$$m_2 = \frac{m_1 + m_2}{1 + r} = 3{,}5 \cdot 10^{30} kg$$

e

$$m_1 = r m_2 = 6{,}1 \cdot 10^{30} kg$$

Problema 9

a) Sendo d a distância inicial do asteroide até a Terra, podemos conservar energia entre os instantes inicial e imediatamente antes da colisão:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{d} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R + r}$$

Note que a distância entre os centros dos corpos no instante da colisão é $R + r$, por isso o denominador do termo da energia potencial. Ainda, como $d >> R + r$:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{R + r}} = 2{,}5 \cdot 10^4 m/s$$

b) Como não há nenhuma força externa atuando no sistema Terra + asteroide, o momento angular desse conjunto é conservado. Note também que, por o impacto ser radial, o momento angular inicial do asteroide é nulo. Assim:

$$L_0 = L' \Leftrightarrow I_0 \omega_0 = I' \omega'$$

Onde I_0 é o momento angular da Terra e ω_0 é sua velocidade angular. Como o asteroide é anexado à Terra, eles giram com a mesma velocidade angular ω' e o momento de inércia $I' = I_0 + I_{ast}$, logo:

$$\omega' = \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{I_{ast}}{I_0}}$$

Agora, perceba que o período $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$. Ainda, temos que $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$ e $I_{ast} = mR^2$, onde $m = \frac{4\pi r^3}{3} \rho = 1{,}5 \cdot 10^{15} kg$. Logo:

$$\Delta T = T' - T_0 = 2\pi \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega_0} \right) = T_0 \frac{5m}{2M} = +5{,}67 \cdot 10^{-5} s$$

Por fim, perceba que o período aumentou, o que faz sentido, uma vez que o momento angular é conservado e o momento de inércia do sistema aumenta.

c) Novamente, o momento angular do sistema é conservado. Assim:

$$L_0 = L' \Leftrightarrow I_0\omega_0 + mvR = (I_0 + mR^2)\omega'$$

Logo:

$$\Delta T = 2\pi\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega_0}\right) = 2\pi\left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0\omega_0 + mvR} - \frac{1}{\omega_0}\right) = -2{,}97 \cdot 10^{-3}s$$

Por fim, perceba que o período diminuiu, o que não é evidentemente óbvio sem a realização das contas.

Problema 10

a) Para encontrar o semieixo maior a, basta utilizarmos o fato de que a energia total de uma órbita fechada é $E_{tot} = -\frac{GMm}{2a}$. Assim:

$$K + U = E_{tot} \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}$$

Logo:

$$a = \frac{1}{\frac{2}{R} - \frac{v_0^2}{GM}}$$

O período é dado pela Terceira Lei de Kepler:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

b) Sabemos que, para toda elipse, $r_1 + r_2 = 2a$, onde r_1 e r_2 são as distâncias de um ponto da elipse até os focos primário (S) e secundário (F), respectivamente. Assim, como o ponto P pertence à órbita elíptica e $r_1 = |SP| = R$, temos que $r_2 = 2a - R$. Ou seja, todos os pontos que distam $2a - R$ do ponto P são possíveis focos secundários, que equivale a uma circunferência de raio $FP = 2a - R$

c) Novamente, sabemos que a soma das distâncias de um ponto da elipse até seus focos é $2a$. Assim:

$$|SQ| + |QF| = 2a \Rightarrow |QF| = 2a - |SQ| = 2a - r$$

d) Recapitulando tudo o que vimos até aqui com um desenho: No ΔPQF podemos utilizar a desigualdade triangular para determinar $|PQ|$ máximo:

$$|PQ| \leq |QF| + |FP| \Rightarrow |PQ|_{max} = 4a - R - r$$

Note que o caso em que Q e P estão no periélio e afélio não é necessário: basta que o ângulo de lançamento seja escolhido tal que Q, F e P sejam colineares. Além disso, a escolha do triângulo ΔQSP não funciona pois ela exige que a posição do ponto Q mude para a distância ser máxima, já que os pontos S e P são pré-determinados, e isso não é o que queremos. Estamos procurando um ângulo de lançamento qualquer (que muda somente a posição de F) que seja suficiente para alcançarmos um ponto Q fixo.

e) Como estamos procurando pelo contorno dos pontos tal que $|PQ|$ é máximo, devemos fixar $|PQ| = 4a - R - r$. Agora, olhando para o triângulo ΔSQP vemos algo interessante: a soma $|SQ| + |PQ|$ é fixa, não dependendo de r. Ou seja, para todos os pontos Q o mais afastados possível de P, a condição que a soma das distâncias dos pontos S e P até Q se mantém fixa é cumprida. Isso é a definição de uma elipse de focos S e P e semieixo maior a' tal que $2a' = 4a - R \Rightarrow a' = 2a - \frac{R}{2}$, e também é conhecida como elipse de segurança. Ela delimita a região de pontos que podem ser atingidos para uma velocidade inicial fixa e ângulo de lançamento qualquer, ou seja, desde que nosso estudante fique fora dela, estará seguro.