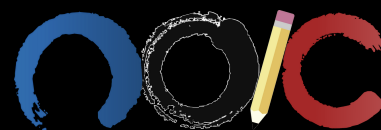


Astronomia Olímpica

Feito por medalhistas nacionais e internacionais

Primeira edição



Esta página foi intencionalmente deixada em branco

Astronomia Olímpica

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2021

Sumário

Doações	1
Guia e Errata	2
Créditos e Contato	4
Tabela de Constantes	8
A Cosmologia	9
A.1 Lei de Hubble-Lemaître	9
A.2 Redshift cosmológico	12
B Paralaxe	14
C Órbitas dos planetas	19
C.1 Planetas interiores e exteriores	19
C.2 Inclinação da órbita	19
C.3 Inclinação do eixo de rotação	21
C.4 Precessão e nutação	22
C.5 Configurações planetárias	24
D Analema	26
D.1 Efeito da variação da declinação do Sol	27
D.2 Efeito da equação do tempo	29
D.3 Efeitos combinados	31
E Relógio de Sol	35
E.1 Relógio de Sol horizontal	35
E.2 Relógio de Sol vertical	38
F Movimento Próprio	41
F.1 Movimento próprio na esfera celeste	43

G Eclipses	52
G.1 Fases da Lua	52
G.2 Eclipses	57
H Ângulo sólido	63
H.1 Ângulo sólido de cones	64
H.2 Conversão	65

Doações

O Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC - é uma iniciativa sem fins lucrativos com a intenção de auxiliar alunos interessados em participar em olimpíadas científicas. A seção de astronomia foi criada em 2017 e, desde então, já proziu guias de estudo, centenas de aulas teóricas, dezenas de simulados e, mais recentemente, um livro! Desse modo, gostaríamos de pedir a ajuda de você, leitor, nesta missão de democratizar o conhecimento.

Este livro foi escrito primariamente para jovens estudantes que sonham em representar o Brasil em uma olimpíada internacional de astronomia. O processo para isso inicia-se na OBA e passa por outras 3 etapas, das quais duas - Barra do Piraí e Vinhedo - são presenciais e envolvem um custo para o aluno (sem contar o deslocamento, cerca de mil reais). Infelizmente, a situação econômica do Brasil faz com que, todos os anos, alunos que se classificaram para essas etapas não consigam ir devido às despesas, assim acabando com o sonho de competir em nome do Brasil ao redor do mundo.

Portanto, com a intenção de remediar esse problema, o NOIC está criando uma campanha para apoiar financeiramente alunos que comprovem a necessidade financeira de arcar com os custos da viagem. No início de 2022 (dando tudo certo, também nos outros anos!), iremos organizar uma prova para selecionar alguns estudantes que estejam nessa condição. Caso você tenha interesse em apoiar a causa, pedimos que acesse o link abaixo para entender o funcionamento do projeto e encontrar o link da vakinha do ano em que você estiver lendo este livro.

Link projeto 

<https://noic.com.br/campanha/>

Guia e Errata

O objetivo primário deste livro é auxiliar estudantes que sonham em representar o Brasil em uma olimpíada internacional de astronomia. O primeiro passo para isso é conhecer o processo:

1. OBA

A Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) é a porta de entrada para o processo que seleciona os alunos que irão participar das seletivas das internacionais. Por ser uma olimpíada de grande escala, seu principal objetivo é promover o interesse entre jovens pela astronomia, física e ciências afins. Estudantes do 9º do ensino fundamental que tirarem mais que 9 e estudantes do ensino médio que tirarem mais que 7 passam para a próxima etapa.

2. Seletivas Online

Cerca de 10.000 alunos são convidados às seletivas online, que consistem de três provas realizadas virtualmente com o intuito de selecionar 150 alunos para a próxima etapa. A nota na OBA não influencia o classificação do aluno, porém há um grande salto de conhecimento entre essas duas fases: enquanto a OBA possui um caráter mais informativo, as seletivas online exigem que o aluno tenha estudado previamente diversos conteúdos fundamentais relacionados a astronomia e física.

3. Barra do Piraí

Todo ano, em meados de Março, cerca de 150 jovens reúnem-se em um hotel fazenda na cidade de Barra do Piraí - RJ para realizar uma bateria de provas que seleciona cerca de 30 alunos para a próxima e última etapa das seletivas. A estadia no hotel envolve um custo da ordem de mil reais - caso você não tenha condições de arcar com este valor, veja a seção de no início do livro.

4. Treinamentos de Vinhedo

A última etapa das seletivas ocorre ao longo do primeiro semestre de cada ano e consiste de duas fases, conhecidas como T1 e T2. Na cidade de Vinhedo - SP, cerca de 30 alunos reúnem-se em um mosteiro para realizar provas e ter aulas com professores renomados no ensino de astronomia no Brasil e no mundo. Nesta etapa, os estudantes são avaliados em provas produzidas por ex-participantes brasileiros de olimpíadas internacionais para selecionar os **10** alunos que irão representar o Brasil ao redor do mundo, 5 na olimpíada internacional (IOAA) e 5 na olimpíada latino-americana (OLAA).

Cada uma dessas etapas é mais seletiva que a anterior e, portanto, exige cada vez mais do aluno. O NOIC possui guias para cada uma delas, que podem ser acessados por meio [deste link](#). Entretanto, todas as provas das seletivas apresentam uma característica em comum: o conteúdo cobrado é essencialmente o mesmo. Ao longo do processo, o principal fator que faz com que as provas de Vinhedo sejam mais difíceis que as seletivas online não é a presença de assuntos mais avançados, e sim um aprofundamento dos mesmos conceitos básicos cobrados inicialmente. A astronomia é a ferramenta, e não a chave de todo o processo. Desse modo, este livro ensina os principais conteúdos para que todo estudante possa desenvolver a base necessária para se classificar para uma olimpíada internacional.

O único pré-requisito para se aventurar pelas próximas páginas é possuir a vontade de aprender - todo o resto é consequência disso. Entretanto, vale ressaltar que, apesar do primeiro capítulo possuir uma seção dedicada a matemática básica, é inevitável que conhecer os fundamentos da linguagem que será utilizada no decorrer deste livro é muito útil para obter o máximo de proveito.

No fim de cada capítulo, há cerca de 10 questões divididas em 3 níveis: iniciante, intermediário e avançado. A primeira divisão foi pensada para uma questão das seletivas online, enquanto a última apresenta o calibre de uma questão de Barra do Piraí. As intermediárias enquadram-se em um meio-termo. Recomendamos que você faça muitos problemas além daqueles presentes neste livro, como os recomendados nos guias de estudo. Além disso, os apêndices são essencialmente capítulos curtos de tópicos que não se enquadravam bem nos demais capítulos. Assim, é fortemente recomendado estudá-los.

Por fim, caso você encontre algum erro (gramatical, algébrico, etc), por favor preencha [este formulário](#) para que a equipe do NOIC possa corrigi-lo em uma futura edição. Para dúvidas adicionais, contate um admin [deste canal](#) do telegram - será um prazer lhe ajudar!

Créditos e Contato

Autores

- Breno de Carvalho Correia
- Bruno Makoto Tanabe de Lima (coordenador)
- Fabrízio Melges Ferro
- Gabriel Consentino B. Chalfun
- Ian Seo Takose
- João Dionísio Ribeiro
- Luan de Souza Silva
- Otávio Casagrande Ferrari

Autores dos capítulos

1. Métodos Matemáticos
 - Teoria: Fabrízio e Ian
 - Probs.: Bruno
 - Revisão: Bruno
2. Mecânica Celeste
 - Teoria: Breno, Bruno e Luan
 - Probs.: João
 - Revisão: Bruno e Gabriel
3. Fotometria
 - Teoria: Gabriel e Otávio
 - Probs.: Gabriel e Otávio
 - Revisão: Bruno
4. Telescópios e Detectores
 - Teoria: Bruno e João
5. Astronomia de Posição
 - Teoria: Otávio
 - Probs.: Otávio
 - Revisão: Bruno
6. Escalas de Tempo
 - Teoria: Bruno
 - Probs.: Bruno
 - Revisão: Otávio
7. Sistemas Binários
 - Teoria: Bruno
 - Probs.: João
 - Revisão: Otávio

Autores dos apêndices

1. Cosmologia

- Teoria: Breno
- Revisão: Bruno

2. Paralaxe

- Teoria: Breno
- Revisão: Bruno

3. Órbitas dos Planetas

- Teoria: Bruno
- Revisão: Otávio

4. Analema

- Teoria: Otávio
- Revisão: Bruno

5. Relógio de Sol

- Teoria: Bruno
- Revisão: Otávio

6. Movimento Próprio

- Teoria: Bruno e Gabriel
- Revisão: Bruno

7. Eclipses

- Teoria: Breno
- Revisão: Bruno

8. Ângulo Sólido

- Teoria: Gabriel
- Revisão: Bruno

Capa

- Imagem de fundo: Olga Witzler Ismael ([Astrobin](#), [Instagram](#))
- Formatação da capa: Breno de Carvalho Correia

Descrição da foto:

(Por Olga W. Ismael) O cometa C/2020 F3 (NEOWISE), o mais brilhante desde a passagem do cometa Halley em 1997, esteve em seu periélio no dia 3 de julho de 2020. Nos horizontes da Serra da Mantiqueira, o cometa Neowise pôde revelar-se com todo o seu esplendor, mesmo através de um equipamento composto por uma DSLR, uma lente simples e um tripé sem acompanhamento celeste. A foto foi tirada no dia 25 de julho, quando o cometa já estava com uma magnitude aparente +5. Os observadores no Hemisfério Norte foram privilegiados com uma visão melhor do cometa, já que ele tinha uma órbita perpendicular ao Equador Celeste, indo de Norte a Sul. Enquanto o cometa começava a ser visível no hemisfério Sul na direção Noroeste, após ter passado por trás do Sol, ele estava mais alto e menos brilhante a cada dia. A Lua crescente vinha se aproximando, cujo brilho dificultou o processo de observação e fotografia do cometa. A olho nu, o Neowise sequer podia ser notado. Porém, com binóculos, o centro do cometa podia ser visto como uma mancha cinza e difusa. Assim,

no dia 25 de julho, com o céu totalmente aberto, a clássica temperatura seca e ríspida do inverno do Sul de Minas Gerais e 2 horas de caminhada até a montanha com vista mais próxima e plana do horizonte, 120 frames de 10 segundos foram fotografados minutos após o pôr do Sol e, posteriormente, processados com técnicas sofisticadas. Sua cauda azul, composta por gás e íons, foi difícil de ser observada no hemisfério sul. Porém, a cauda dourada pôde ser facilmente avistada com bastante sinal presente na imagem. Esta fotografia é um registro de uma das efemeridades da natureza. Infelizmente, a próxima passagem do cometa Neowise será daqui a 6800 anos.

Data da foto: 25/07/2020

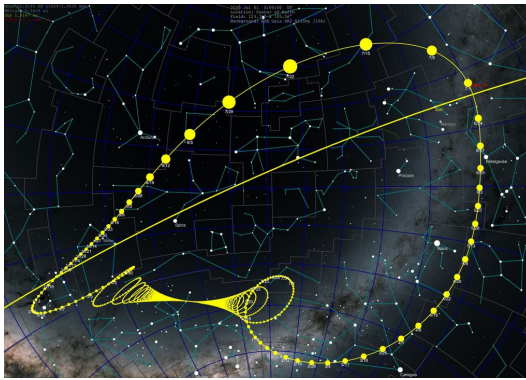


Figura 1: Ilustração da trajetória do cometa na esfera celeste

Licença da foto:

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Contato

Telegram 

<https://t.me/joinchat/4vexIHcjE04NDU5/>

Instagram 

@projetonoi

Site 

<http://noic.com.br/>

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com a Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Mag. aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta (\mathcal{M}_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Mag. limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Apêndice A

Cosmologia

Desde os primórdios da existência humana, a origem de tudo foi tratada um grande mistério. Nesse âmbito, a cosmologia procura compreender o universo desde o seu “nascimento” até um futuro distante a partir de modelos físicos e matemáticos. Com a passagens dos séculos, a humanidade foi aprimorando as técnicas utilizadas para tal análise até, mais recentemente, Einstein desenvolver sua teoria da relatividade geral, a qual é utilizada até hoje no estudo da cosmologia.

Descobertas físicas e astronômicas foram fundamentais para, em conjunto, darem luz a características do nosso universo. A seguir, iremos estudar alguns dos fundamentos desse estudo.

A.1 Lei de Hubble-Lemaître

A Lei de Hubble-Lemaître afirma que o universo está expandindo para longe de nós com uma velocidade proporcional à distância de um ponto no universo até a Terra. Apesar de tal descoberta geralmente ser associada ao astrônomo Edwin Hubble, Lemaître havia deduzido a partir das equações da relatividade geral cerca de dois anos antes de Hubble, este que foi o primeiro a comprová-la empiricamente. Vamos lembrar das duas principais chaves que possibilitaram que Hubble determinasse as velocidades radiais e as distâncias de galáxias.

A primeira chave foi a relação período-luminosidade encontrada pela astrônoma Henrietta Leavitt em 1912. Essa relação fornecia um valor para a luminosidade de certas estrelas variáveis, conhecidas como cefeidas, em função de seus períodos de variação de brilho, que podiam ser observados da Terra. Medindo o fluxo de tais estrelas, seria possível encontrar a distância delas até nós. Desse modo, Hubble calculou a distância de certas galáxias até a Terra através das cefeidas contidas nelas.

A outra chave foi o trabalho de Vesto Slipher, que foi um dos pioneiros a utilizar o redshift de galáxias para calcular suas velocidades radiais.

Com essas ferramentas em mãos, a ideia de Hubble foi de procurar uma relação entre as velocidades radiais e as distâncias de galáxias. Plotando os valores encontrados no gráfico da figura A.1, ele observou uma relação **linear** entre v_r e d para inúmeras galáxias, que ficou conhecida como Lei de Hubble-Lemaître. Ele publicou a sua descoberta em 1929.

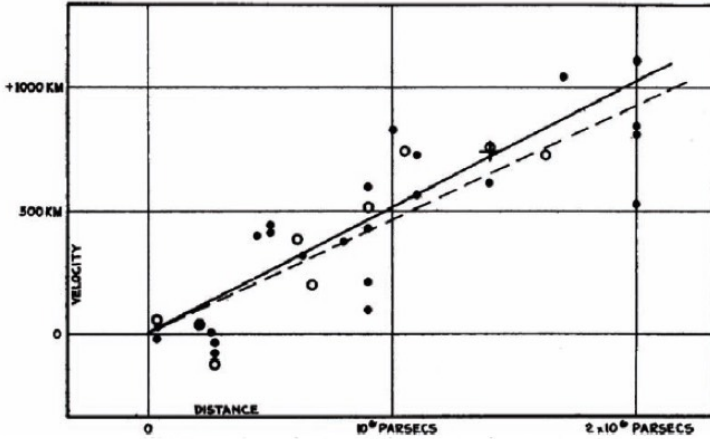


Figura A.1: Gráfico Velocidade de Recessão (km/s) vs Distância (pc)

Hubble representou a linearidade de v_r e d através da equação:

$$v_r = H_0 d$$

onde

- v_r : velocidade radial de recessão, normalmente em km s^{-1} ;
- H_0 : constante de Hubble. Seu valor atual¹ é cerca de $67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (dimensão de inverso do tempo);
- d : distância à galáxia, normalmente em Mpc.

Vale lembrar que nem todas as galáxias obedem a Lei de Hubble-Lemaître. Para galáxias próximas da Via Láctea, a atração gravitacional influencia a velocidade de afastamento delas. Por exemplo, a velocidade radial de Andrômeda vista da Terra é cerca de -300 km/s , ou seja, ela está se aproximando de nós.

¹A constante de Hubble varia com o tempo. i.e. não é constante.

Estamos no centro do universo?

Um equívoco gerado pela superficial compreensão da Lei de Hubble-Lemaître é que, por consequência do afastamento das galáxias de nós, a Terra estaria no centro do universo. No entanto, o próprio caráter matemático dessa lei mostra que esse não é o caso, como iremos demonstrar. A imagem a seguir ilustra a Terra e outras duas galáxias A e B .

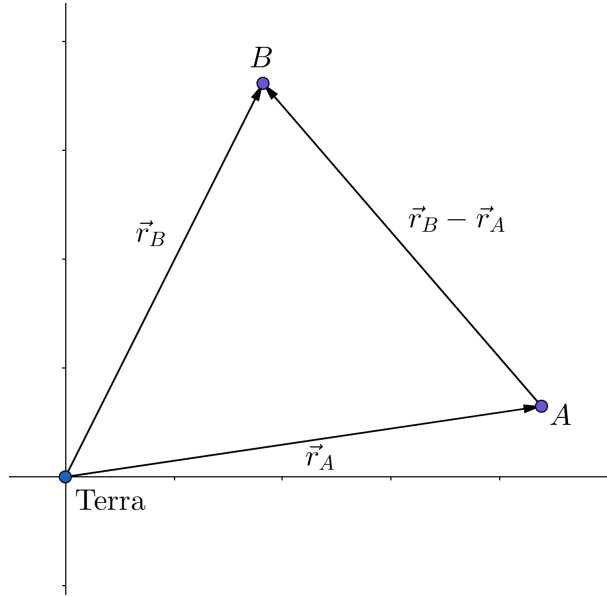


Figura A.2: A Terra e duas outras galáxias

Em relação à Terra, as velocidades de afastamento das galáxia A e B são, respectivamente:

$$\vec{v}_A = H_0 \vec{r}_A \quad \text{e} \quad \vec{v}_B = H_0 \vec{r}_B$$

Com isso, podemos calcular a velocidade radial \vec{v} de B quando vista de A . Assim, no referencial de A , temos:

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Substituindo os valores de \vec{v}_A e \vec{v}_B :

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}_B - H_0 \vec{r}_A = H_0 (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Mas como o módulo de $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ é a distância entre A e B , temos que um observador em A também veria B se afastando com uma velocidade proporcional à distância entre essas galáxias. Desse modo, pode-se perceber que a Lei de

Hubble-Lemaître é **universal**, ou seja, funciona para qualquer observador. Isso prova que não existe um referencial especial, i.e. não existe um “centro do universo”.

Tempo de Hubble

A partir da Lei de Hubble-Lemaître, podemos encontrar uma **estimativa** para a idade do universo. Considerando que o universo é uma esfera que surgiu no Big-Bang ($t = 0$) e, desde então, vem expandindo com uma velocidade **constante** de acordo com a constante de Hubble atual, temos a seguinte situação:

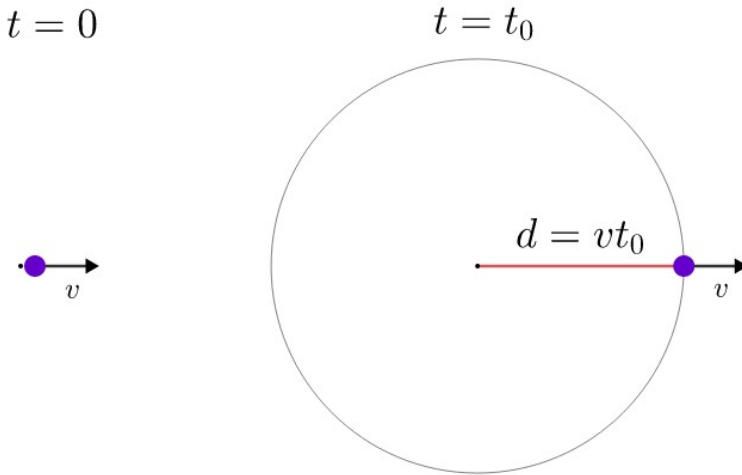


Figura A.3: Estimando a idade do universo

Onde t_0 seria a idade atual do universo. Como assumimos que a velocidade v é constante, o raio do universo é $d = vt_0$. Entretanto, pela Lei de Hubble-Lemaître, temos que $v = H_0d$. Juntando esses resultados:

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{d}{H_0d} = \boxed{\frac{1}{H_0}}$$

Utilizando $67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, obtemos $t_0 \approx 14,4$ bilhões de anos, o que é bem próximo do valor calculado mais recente encontrado de 13,8 bilhões de anos.

A.2 Redshift cosmológico

Existem três principais causas de redshift:

- Dois corpos com velocidade radial entre si não-nula. Esse é o caso que vemos no nosso dia a dia, como em carros de fórmula 1.

- Campos gravitacionais. O redshift relacionado a essa causa é conhecido como redshift gravitacional.
- Expansão do universo. O redshift relacionado a essa causa é conhecido como redshift cosmológico.

Para o redshift cosmológico, basta relacionarmos a Lei de Hubble-Lemaître com a expressão comum do efeito doppler, seja este relativístico ou não. Desse modo:

Redshift cosmológico não-relativístico

A expressão não-relativística do efeito doppler nos diz que:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

Pela Lei de Hubble-Lemaître, $v_r = H_0 d$, logo:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{H_0 d}{c}$$

Redshift cosmológico relativístico

A expressão relativística do efeito doppler pode ser escrita em duas formas principais. A primeira delas dá o redshift para uma velocidade radial v_r :

$$z = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1$$

Já a segunda² dá v_r para um dado redshift z :

$$v_r = c \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1}$$

Pela Lei de Hubble-Lemaître, elas podem ser reescritas como:

$$z = \sqrt{\frac{c + H_0 d}{c - H_0 d}} - 1$$

e

$$d = \frac{c}{H_0} \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1}$$

²As expressões são fundamentalmente idênticas, basta realizar uma manipulação algébrica para convertê-las, assim como vimos no terceiro capítulo.

Apêndice B

Paralaxe

A paralaxe é a diferença na posição aparente de um objeto fixo quando observado por dois observadores em lugares distintos. Um experimento bem simples que ilustra esse conceito pode ser realizado de acordo com a imagem abaixo. Apesar da mão estar fixa, o observador, que é o olho aberto, está mudando de posição, fazendo com que a imagem da mão apresente posições aparentes distintas.



Figura B.1: Paralaxe

Essa variação da posição relativa de objetos fixos graças à mudança da posição do observador é especialmente útil para determinarmos distâncias, assim como ilustrado pelo exemplo abaixo.

Exemplo 1:

Em um terreno plano, um estudante quer determinar a altura de uma montanha sem precisar escalá-la. Inicialmente, ele mede que o ângulo entre o topo da montanha e o solo é θ_0 . Após andar Δx na direção da montanha, o valor desse ângulo vira θ_f . Assim, calcule a altura da montanha, assim como a distância inicial do aluno até ela.

Solução

Podemos representar essa situação no seguinte desenho:

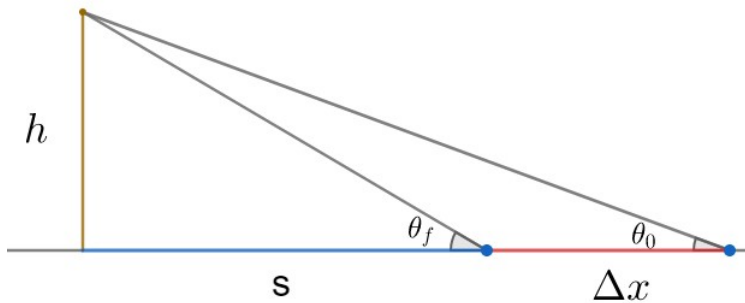


Figura B.2: Exemplo 1

Pela imagem, temos as seguintes relações:

$$\tan \theta_0 = \frac{h}{s + \Delta x}$$

e

$$\tan \theta_f = \frac{h}{s}$$

Podemos manipular essas equações para encontrarmos h :

$$h = \tan \theta_0 (\Delta x + s)$$

Como $s = \frac{h}{\tan \theta_f}$, temos:

$$h = \tan \theta_0 \left(\Delta x + \frac{h}{\tan \theta_f} \right)$$

Reescrevendo:

$$h = \Delta x \frac{\tan \theta_0 \tan \theta_f}{\tan \theta_f - \tan \theta_0}$$

Agora, podemos achar a distância $d = s + \Delta x$ que o aluno estava da montanha no início. Perceba que $\tan \theta_0 = \frac{h}{d}$, logo:

$$d = \Delta x \left(\frac{\tan \theta_f}{\tan \theta_f - \tan \theta_0} \right)$$

Dando um passo além, podemos determinar a distância de estrelas até a Terra através da paralaxe. Considerando a órbita da Terra em torno do Sol como circular, a posição aparente da estrela varia de acordo com a translação da Terra. A imagem abaixo ilustra tal variação.

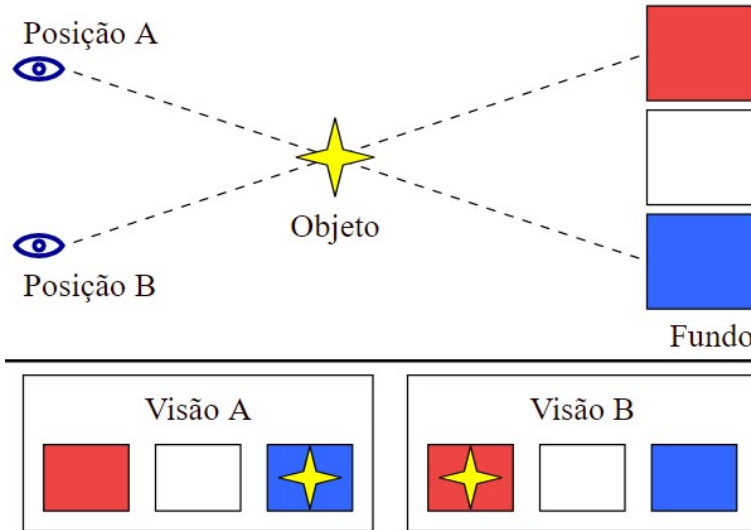


Figura B.3: Paralaxe de um astro

Assim, ao longo de um ano, a posição da estrela observada por nós irá oscilar em torno de dois pontos “limites” que ocorrem quando o ângulo entre a estrela e o Sol vistos da Terra é 90° . Assim, o **ângulo de paralaxe** p é definido como metade do deslocamento angular da estrela.

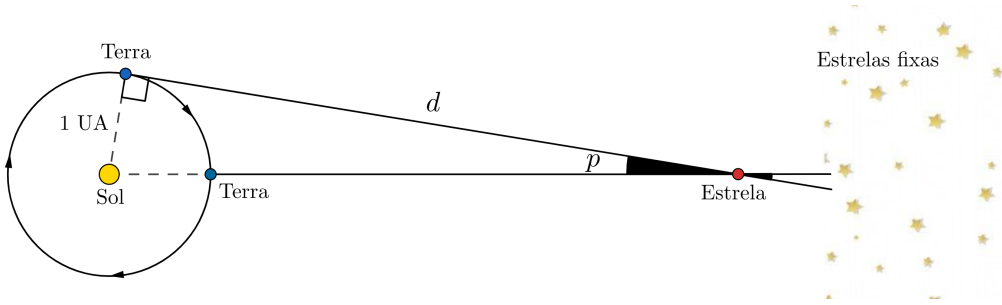


Figura B.4: Paralaxe heliocêntrica

De acordo com a figura, temos:

$$\tan p = \frac{1 \text{ UA}}{d}$$

Ademais, como $d \gg 1 \text{ UA}$ para todas as estrelas além do Sol, $p \ll 1$. Desse modo, podemos aproximar $\tan p \approx p$ [rad]. Assim:

$$p \text{ [rad]} = \frac{1 \text{ UA}}{d \text{ [UA]}}$$

Entretanto, é comum utilizarmos a unidade **parsec** para medirmos a distância até as estrelas. Um parsec, 1 pc , é **definido** pela distância de uma estrela de paralaxe $1''$, tanto que seu nome origina da palavra *parallax second*. Assim:

$$1'' = \frac{1 \text{ UA}}{1 \text{ pc}}$$

Como $3600'' = 1^\circ$ e $180^\circ = \pi \text{ rad}$, temos:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{1''} \cdot \frac{3600''}{1^\circ} \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

O radiano não possui dimensão, logo:

$$1 \text{ pc} = \frac{3600 \cdot 180}{\pi} \text{ UA} \approx 206265 \text{ UA}$$

Sabemos que $1 \text{ rad} = \frac{3600 \cdot 180}{\pi}$ segundos de arco. Sendo $k = \frac{3600 \cdot 180}{\pi}$, temos:

$$p \text{ [rad]} = \frac{1}{k} p''$$

e

$$d \text{ [UA]} = k d \text{ [pc]}$$

Ou seja:

$$p [\text{rad}] = \frac{1 \text{ UA}}{d [\text{UA}]} \Leftrightarrow \frac{1}{k} p ["] = \frac{1 \text{ UA}}{k d [\text{pc}]}$$

Reescrevendo:

$$p ["] = \frac{1 \text{ UA}}{d [\text{pc}]}$$

Mas, pela definição de parsec:

$$1'' = \frac{1 \text{ UA}}{1 \text{ pc}}$$

Dividindo essas equações:

$$\boxed{\frac{p ["]}{1''} = \frac{1 \text{ pc}}{d [\text{pc}]}}$$

Que é a equação fundamental para encontrar a distância até um astro como função de sua paralaxe. Ainda, é comum medir p pela unidade $mas = 10^{-3}$ segundos de arco, em que mas significa milissegundo de arco.

Exemplo 2

Após meses de observação, a astrônoma Millenia calculou o deslocamento angular aparente máximo da estrela Polaris (α UMa) no céu, encontrando 14,3 mas . Assim, calcule a distância desse astro até a Terra, em parsecs.

Solução

Já que o ângulo de paralaxe é a metade do deslocamento angular aparente máximo da estrela, $p = 7,15 \text{ mas} = 7,15 \cdot 10^{-3} \text{ arcsecs}$.

Logo:

$$d [\text{pc}] = \frac{1''}{0,00715''} \text{pc} = 140,0 \text{ pc}$$

Vale ressaltar que, mesmo com a tecnologia dos dias atuais, é significativamente difícil medir a paralaxe de estrelas que distam mais de 100 pc de nós. Desse modo, alternativas como o módulo de distância costumam ser mais utilizadas.

Apêndice C

Órbitas dos planetas

Neste apêndice, vamos estudar algumas características importantes das órbitas de planetas. Iremos analisar o sistema solar, porém todos os conceitos se aplicam para qualquer sistema.

C.1 Planetas interiores e exteriores

Um conceito importante na astronomia é o de planeta inferior e exterior. Utilizando a Terra como referência, definimos um planeta como **inferior** se seu raio orbital for **menor** que o da Terra. Por outro lado, caso o raio orbital de um planeta seja **maior** que o da Terra, ele é chamado de **exterior**. Desse modo, temos:

- Planetas interiores: Mercúrio e Vênus;
- Planetas exteriores: Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

C.2 Inclinação da órbita

Uma característica interessante do Sistema Solar é que as órbitas de todos os seus planetas estão essencialmente alinhadas¹. Isso significa que, independente do local de observação na Terra, iremos ver todos os planetas praticamente alinhados, assim como pode ser observado nas duas imagens abaixo².

¹Por mais que isso seja um fato interessante, isso não é uma coincidência nem uma exclusividade, é apenas um resultado da formação do Sistema Solar, que naturalmente é semelhante a outros sistemas planetários.

²A órbita da Lua em torno da Terra também é bem alinhada com tal plano.

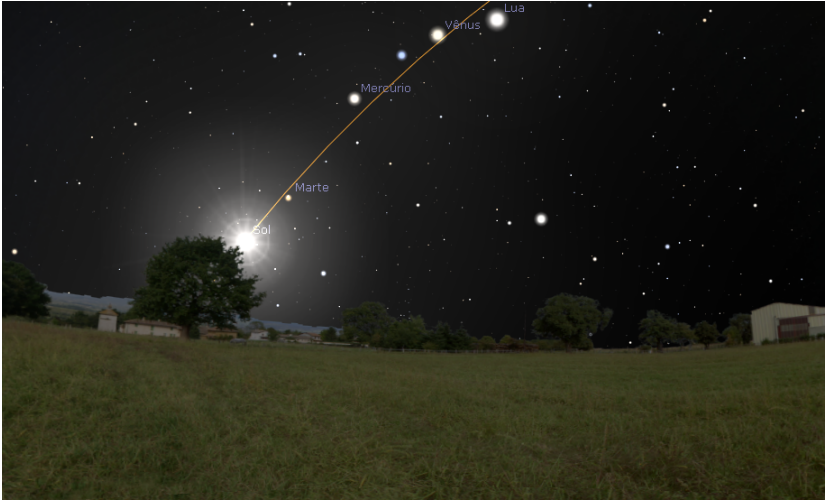


Figura C.1: Inclinação da órbita



Figura C.2: Inclinação da órbita

Utilizando como referência o plano da órbita da Terra em torno do Sol (plano da Eclíptica), podemos definir a inclinação da órbita de um planeta como o ângulo entre o plano da órbita do planeta e o plano da Eclíptica. No

caso, o arco laranja nas imagens acima representa a Eclíptica na esfera celeste. A imagem abaixo ilustra as inclinações das órbitas de cada planeta - como esperado, todos os valores são próximos de 0.

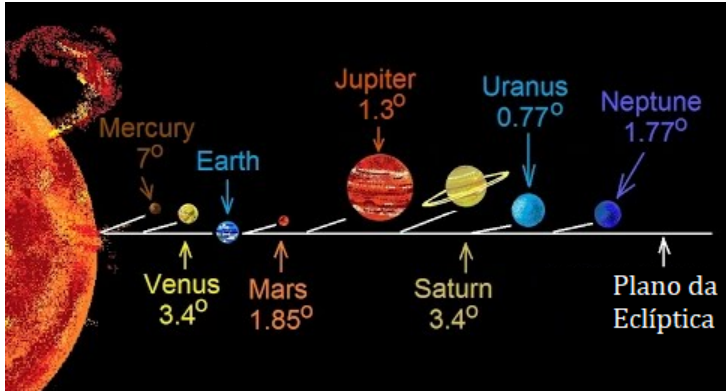


Figura C.3: Inclinação da órbita

C.3 Inclinação do eixo de rotação

A inclinação do eixo de rotação de um planeta (representado pelas letras ϵ ou i) mede o ângulo entre o seu equador e a eclíptica, assim como pode ser observado na imagem abaixo para a Terra.

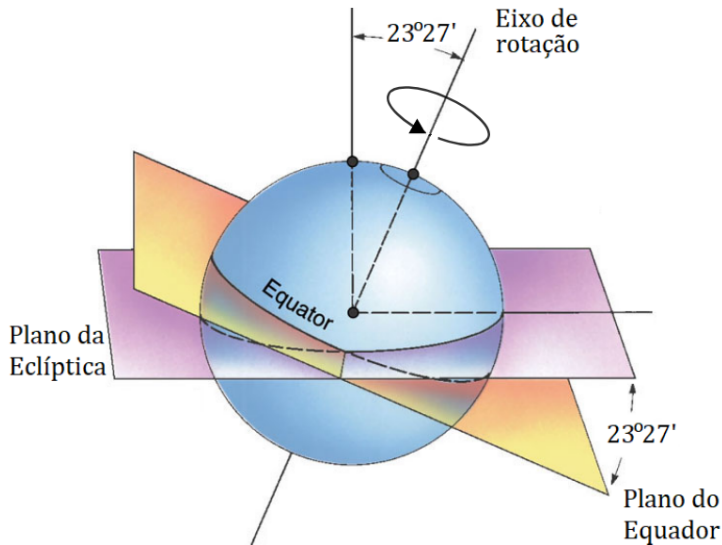


Figura C.4: Inclinação do eixo de rotação

Note que os planetas com inclinação $\varepsilon < 90^\circ$ giram no sentido anti-horário quando vistos de cima, já planetas com $\varepsilon > 90^\circ$ giram no sentido contrário, assim como representado na seguinte imagem:

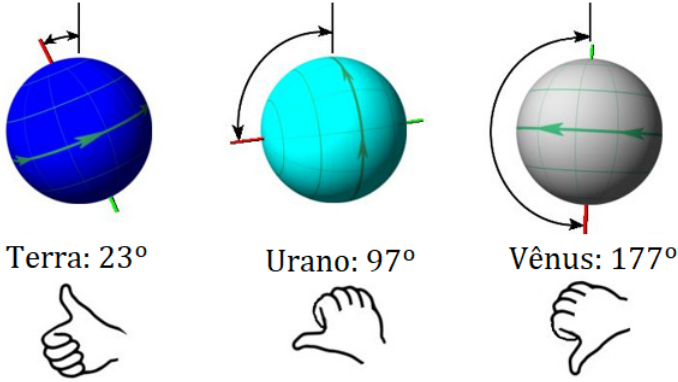


Figura C.5: Inclinação do eixo de rotação

Por fim, a imagem abaixo mostra as inclinações dos eixos de rotação de cada planeta.

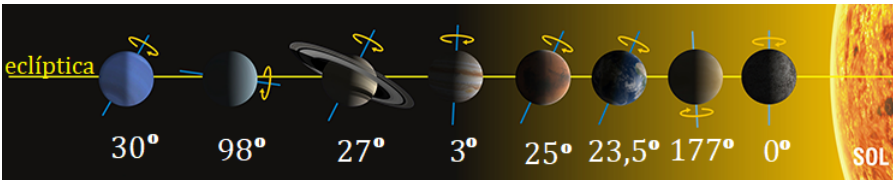


Figura C.6: Inclinação do eixo de rotação

C.4 Precessão e nutação

A precessão e a nutação são dois tipos de movimentos que estão presentes em todos os corpos que giram em torno de si, como um peão ou a Terra (rotação). A precessão é caracterizada pela rotação do próprio eixo de rotação do corpo em torno de um segundo eixo. No caso da Terra, seu eixo de rotação é a própria reta que liga os polos norte e sul. Por outro lado, o eixo de rotação associado à precessão é a **reta que liga os os polos eclípticos**. A imagem abaixo ilustra isso.

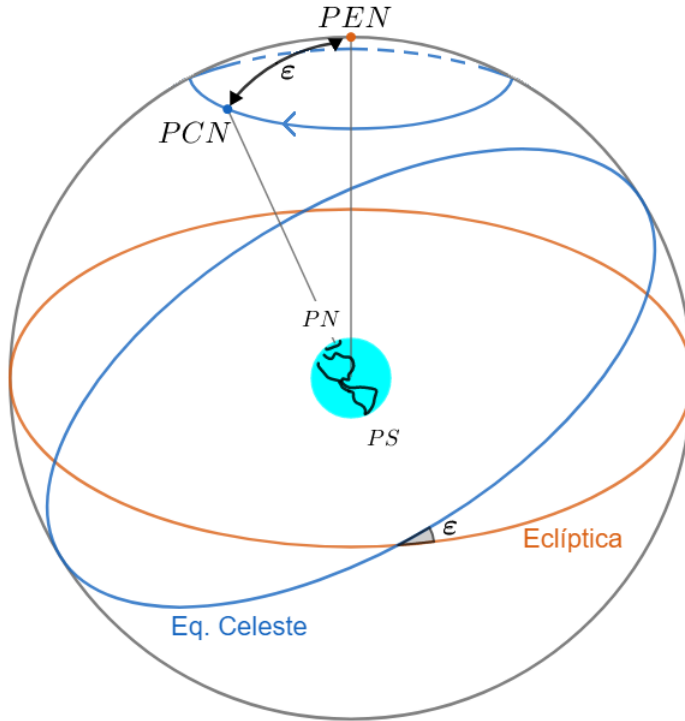


Figura C.7: Precessão da Terra

Desse modo, a precessão possui duas consequências principais:

- A posição do *PCN* no céu muda ao longo do tempo³ (atualmente, ele está próximo de Polaris). Isso faz com que as coordenadas equatoriais dos astros também variem;
- As coordenadas eclípticas dos astros não são afetadas pela precessão. Por outro lado, as coordenadas eclípticas do *PCN* e do ponto vernal são.

A nutação é caracterizada por uma pequena oscilação do *PCN* em torno do círculo de precessão com um período de 18,6 anos, assim como representado pela imagem:

³O período de precessão da Terra é cerca de 26000 anos.

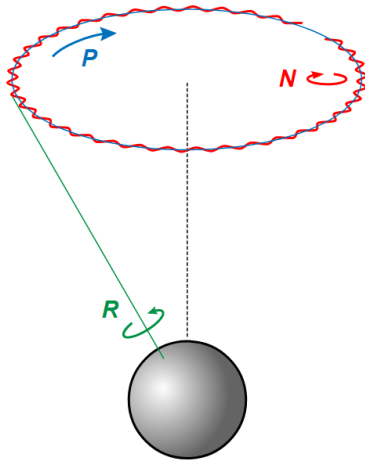


Figura C.8: Nutação da Terra

C.5 Configurações planetárias

Caso um observador fosse colocado “acima” (no Polo Norte Eclíptico) do sistema solar, ele eventualmente veria os planetas em algumas posições especiais entre si. Tais posições recebem o nome de **configurações planetárias**. Utilizando a Terra como referência, elas são:

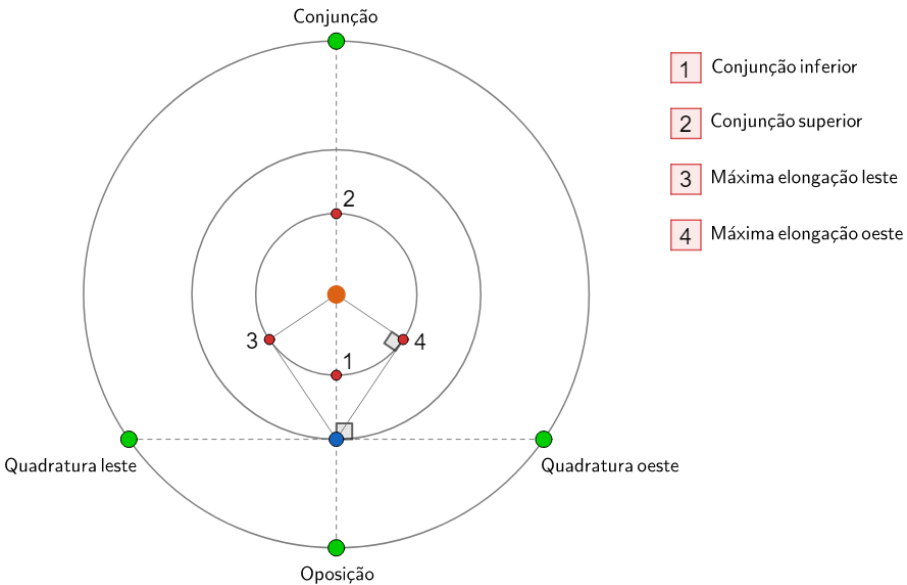


Figura C.9: Configurações Planetárias

Além disso, definimos a **elongação** como o ângulo entre um planeta e o Sol quando vistos da Terra. Perceba que a elongação de planetas exteriores pode ser qualquer ângulo entre 0° (conjunção) e 180° (oposição). Por outro lado, a elongação de planetas interiores nunca ultrapassa um valor α_{max} chamado de elongação máxima. Vamos calcular esse valor em função do raio orbital R_i do planeta. Temos a seguinte imagem:

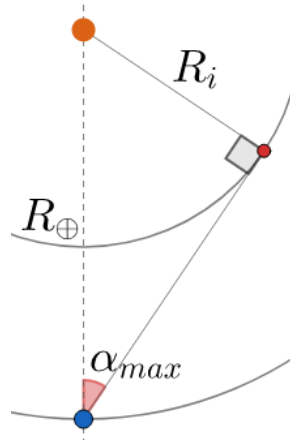


Figura C.10: Elongação máxima

Perceba⁴:

$$\text{sen } \alpha_{max} = \frac{R_i}{R_{\oplus}} \Rightarrow \alpha_{max} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{R_i}{1\text{UA}} \right)$$

Para Mercúrio:

$$R_M = 0,387\text{UA} \Rightarrow \alpha_{max-M} = 22,8^\circ$$

Já para Vênus:

$$R_V = 0,723\text{UA} \Rightarrow \alpha_{max-V} = 46,3^\circ$$

Desse modo, note que Vênus e Mercúrio **sempre** estarão próximos ao Sol no céu, assim como pode ser observado na figura C.2.

⁴Estamos desprezando a excentricidade e a inclinação das órbitas dos planetas.

Apêndice D

Analema

Um fenômeno muito curioso acontece quando tiramos diversas fotos do Sol ao longo de um ano em um horário e local definidos. Sobrepondo as imagens, o Sol não aparece sempre na mesma posição no céu, e sim, ele forma uma figura muito peculiar conhecida como **analema**.

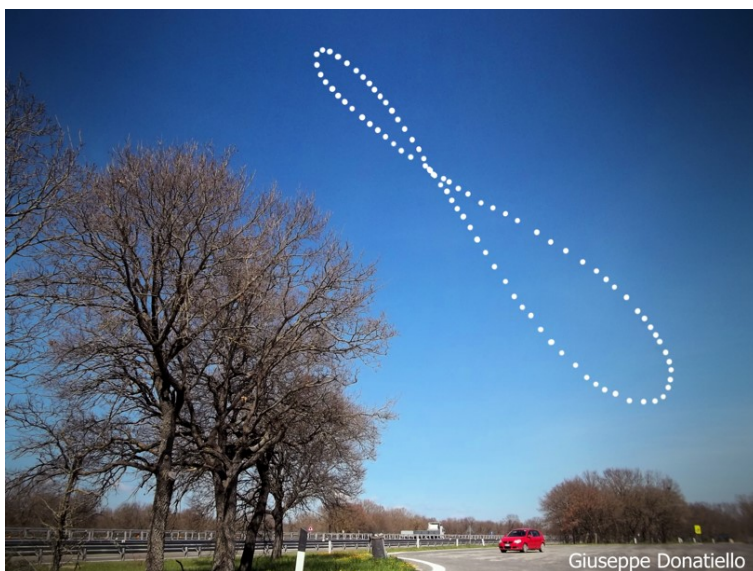


Figura D.1: Analema

Essa figura é resultado da combinação de dois fatores independentes: a **obliquidade da eclíptica** e a **excentricidade da órbita da Terra**. Para entendermos o porquê do formato do analema, precisamos compreender como essas características da órbita terrestre interferem no movimento anual do Sol.

Nesse âmbito, é conveniente analisarmos dois eixos do analema: um perpendicular e outro paralelo ao equador celeste.

A variação da posição do Sol ao longo do eixo perpendicular ao equador celeste ocorre exclusivamente pela variação da declinação do Sol ao longo do ano, que é um resultado da obliquidade da eclíptica.

Já a variação da posição do Sol ao longo do eixo paralelo ao equador celeste ocorre exclusivamente pelo efeito da equação do tempo, que é resultado tanto da obliquidade da eclíptica quanto da excentricidade da órbita da Terra.

Dessa maneira, vamos analisar com calma cada um desses efeitos individualmente para então estudarmos a combinação de ambos.

D.1 Efeito da variação da declinação do Sol

Como comentado no capítulo 5, o Sol percorre sua trajetória anual sobre a eclíptica, que é a projeção da órbita da Terra no equador celeste, assim como ilustrado pela imagem abaixo.

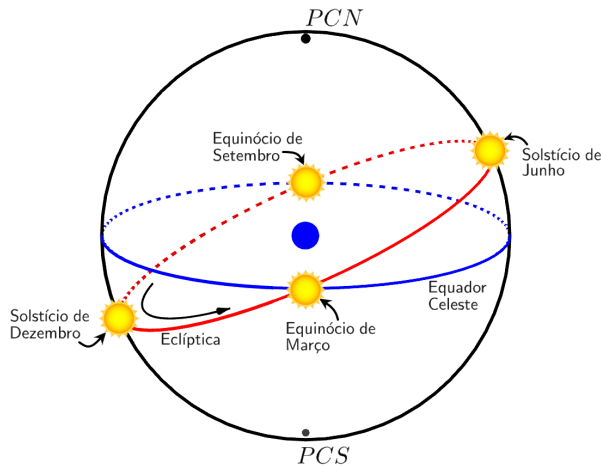


Figura D.2: Trajetória anual do Sol

A inclinação de ε entre a eclíptica e o equador celeste faz com que a declinação do Sol δ_{\odot} varie anualmente entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$, ou seja, como $\varepsilon = 23^{\circ}27'$, a declinação possui o seguinte intervalo: $-23^{\circ}27' \leq \delta_{\odot} \leq +23^{\circ}27'$.

Utilizando trigonometria esférica, é possível encontrar equações que descrevem a declinação do Sol como função do tempo. Fazendo isso, obtemos algo como:



Figura D.3: Declinação do Sol em função do tempo.

Essa mudança da declinação do Sol ao longo de um ano pode ser percebida por observadores na Terra. Temos que o Sol irá oscilar ao longo do eixo perpendicular ao equador celeste, com declinação indo de $-23^{\circ}27'$ até $23^{\circ}27'$. As seguintes imagens representam essa variação:

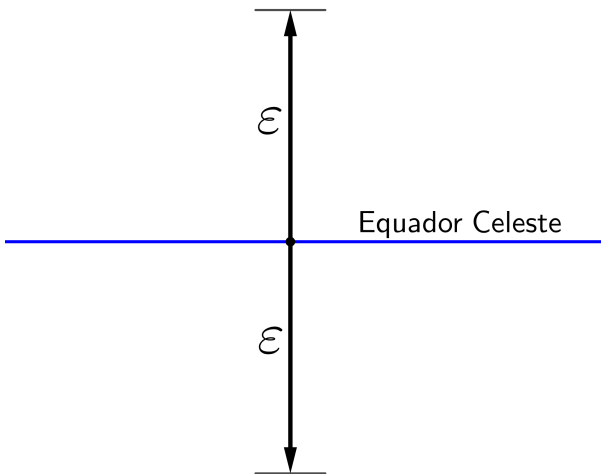


Figura D.4: Planificação da variação anual da posição do Sol ao longo do eixo perpendicular ao equador celeste

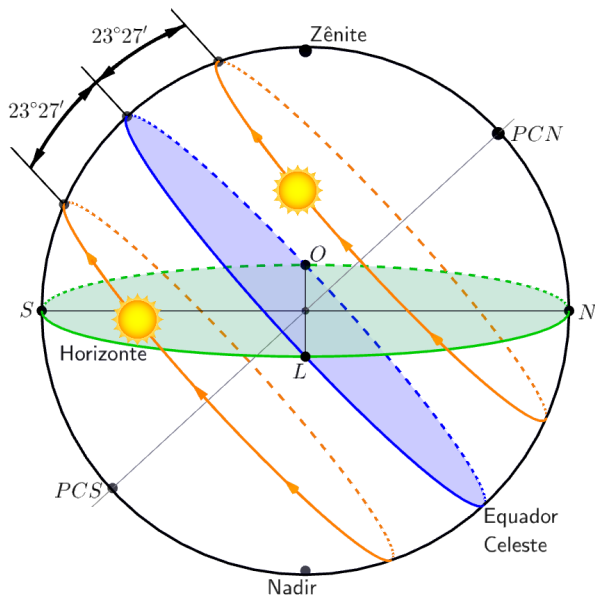


Figura D.5: Mudança da declinação do Sol ao longo de um ano

Se não fosse pelo efeito que iremos estudar a seguir, o analema seria simplesmente uma reta. Agora, vamos entender como se dá o movimento do Sol no eixo paralelo ao equador celeste.

D.2 Efeito da equação do tempo

Como comentado no capítulo 6, o tempo solar verdadeiro (que é baseado no ângulo horário do Sol verdadeiro) difere do tempo solar médio (que é baseado no ângulo horário do Sol médio) ao longo do ano de acordo com a equação do tempo.

A equação do tempo é um resultado tanto da excentricidade da Terra quanto da obliquidade da eclíptica. Os gráficos abaixo representam o efeito de cada um desses fatores individualmente e o resultado da combinação deles.

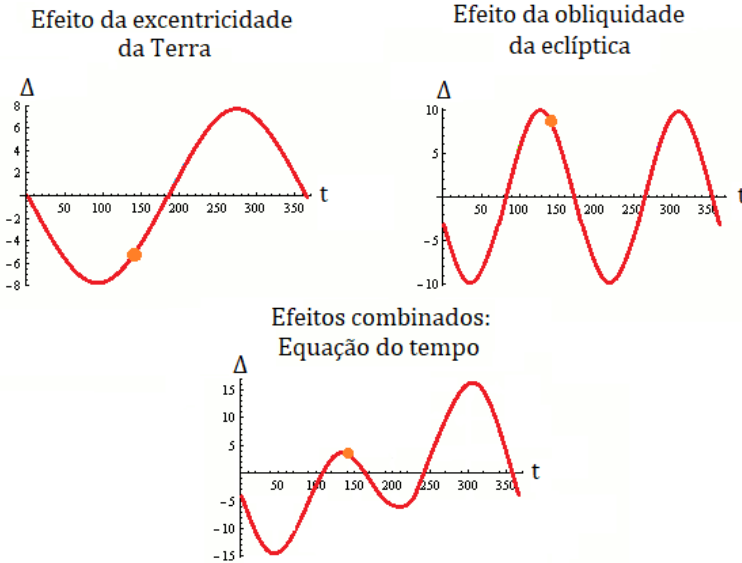


Figura D.6: Equação do tempo

Como o conceito de analema é tirar fotos sempre no mesmo horário, devemos perceber que esse horário refere-se ao tempo solar médio (pois é nele que o tempo civil é baseado). Dessa maneira, como o tempo solar verdadeiro difere do tempo solar médio ao longo do ano, o Sol possuirá um ângulo horário diferente a cada foto e, portanto, estará “atrasado” ou “adiantado” em relação ao Sol médio, dependendo da época do ano.

Perceba pelo gráfico dos efeitos combinados na figura D.6 que a equação do tempo possui um valor máximo e um valor mínimo. O valor mínimo ocorre um por volta de 11–12 de Fevereiro e representa o Sol verdadeiro 14min6s a leste do Sol médio. Já o valor máximo ocorre por volta de 31 de Outubro – 1 de Novembro e representa o Sol verdadeiro 16min33s à oeste do Sol médio. Portanto, note que há uma assimetria na “amplitude” da equação do tempo.

Dito isso, podemos concluir que, com o passar do ano, um observador verá o Sol variando sua posição ao longo do eixo paralelo ao equador celeste, indo de ET_{\min} a leste do Sol médio até ET_{\max} a oeste do Sol médio.

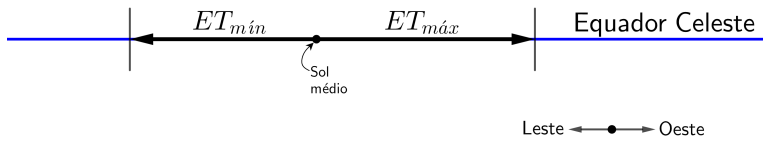


Figura D.7: Planificação da variação anual da posição do Sol ao longo do eixo paralelo ao equador celeste



Figura D.8: Eixo paralelo ao equador celeste

D.3 Efeitos combinados

Agora que entendemos os efeitos da variação da posição do Sol em cada eixo, podemos finalmente compreender o formato do analema. Plotando em um gráfico, obtemos:

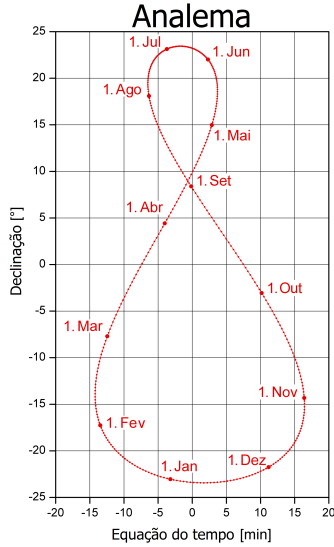


Figura D.9: Gráfico declinação versus equação do tempo de um analema.

Note que a variação da declinação é maior do que a variação da equação do tempo, fazendo com o analema fique mais “esticado” no eixo perpendicular ao equador celeste. Além disso, lembre-se que, como vimos pela figura D.4, o equador celeste é a mediatriz do segmento que liga o ponto de maior declinação do Sol ao ponto de menor declinação. Vale lembrar que essas extremidades representam os solstícios. A imagem abaixo ilustra a assimetria do analema com mais clareza:

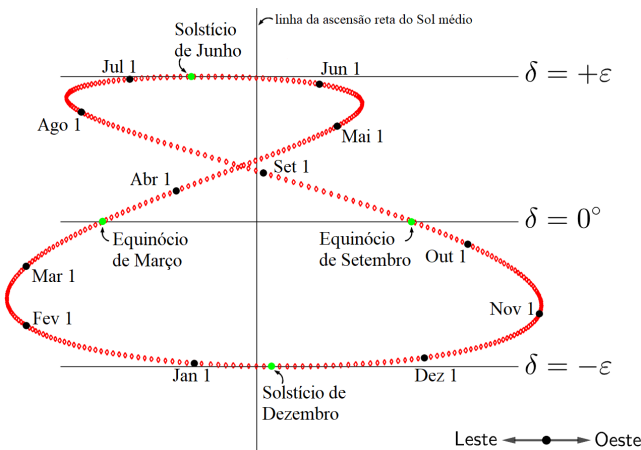


Figura D.10: Assimetria perceptível em ambos os eixos do analema.

Na imagem acima, além da assimetria do analema, é mais fácil notar que a declinação do Sol varia de $-\varepsilon$ até $+\varepsilon$ e que os equinócios ($\delta_{\odot} = 0$) ocorrem onde a figura do analema intersecta o equador celeste, sendo que o Equinócio de Março ocorre mais a leste do que o equinócio de Setembro.

Vale ressaltar que a “barriga” menor do analema ocorre inteiramente no hemisfério celeste Norte, logo sua extremidade está situada no solstício de Junho (quando $\delta_{\odot} = +\varepsilon$).

Portanto, agora que conhecemos melhor o analema, podemos analisar a imagem do início desse apêndice e desenhar algumas retas e pontos relevantes:

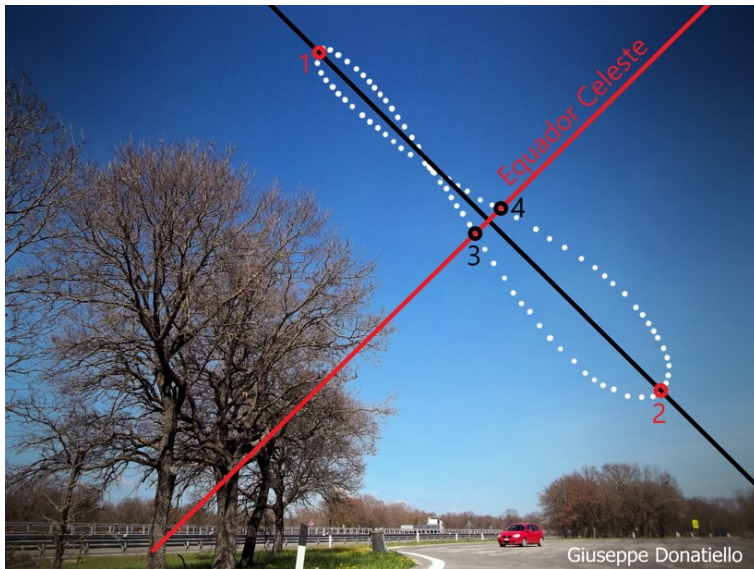


Figura D.11: Retas e pontos relevantes do analema

A primeira coisa a se fazer é traçar uma reta que passe pelas extremidades (pontos 1 e 2) do analema. Como vimos, essa reta representa o eixo da variação da declinação, ou seja, o eixo perpendicular ao equador celeste.

A partir dessa reta, podemos traçar o equador celeste traçando a mediatriz do segmento que liga os pontos 1 e 2.

Com as extremidades do analema (pontos 1 e 2) e as intersecções do equador celeste com o analema (pontos 3 e 4), conseguimos marcar a posição do Sol nos solstícios e equinócios. Para identificarmos qual é cada solstício, basta lembrar que a extremidade da “barriga” menor do analema é o solstício de Junho, fazendo com que a extremidade da “barriga” maior ocorra no solstício de

Dezembro.

Agora, a identificação dos equinócios é um pouco mais complicada. Primeiramente, devemos perceber que o analema está localizado no hemisfério oriental (isto é, possui azimute $0^\circ < A < 180^\circ$), pois a “barriga” menor está voltada para cima (ou seja, observador está no hemisfério Norte) e está voltada para a esquerda, indicando que o ponto cardeal Norte está logo à esquerda da imagem. Dessa forma, pela rosa dos ventos, o ponto em que o equador celeste toca o horizonte na imagem é o ponto cardeal Leste. Assim, devemos lembrar que, como ilustrado na figura [D.10](#), o Equinócio que ocorre mais a leste é o Equinócio de Março e o Equinócio que ocorre mais a oeste é o Equinócio de Setembro.

Portanto, na imagem acima, temos:

- Ponto 1: Solstício de Junho
- Ponto 2: Solstício de Dezembro
- Ponto 3: Equinócio de Março
- Ponto 4: Equinócio de Setembro

Com isso, analisamos completamente as características do analema.

Apêndice E

Relógio de Sol

Um relógio de Sol consiste em duas peças principais: um gnômon e um mostrador. A posição da sombra do gnômon possibilita a identificação do tempo solar verdadeiro local ($T_{\odot VL}$), que não necessariamente é o horário que vemos em nossos relógios¹. Neste apêndice, iremos ver dois tipos de relógio de Sol: o horizontal e o vertical.

E.1 Relógio de Sol horizontal

Como o próprio nome diz, um relógio de Sol horizontal (ou “de chão”) é fixado ao chão, assim como ilustrado na imagem abaixo. Sua principal característica é:

- O gnômon aponta para o polo visível ($HN \rightarrow PCN$ / $HS \rightarrow PCS$)

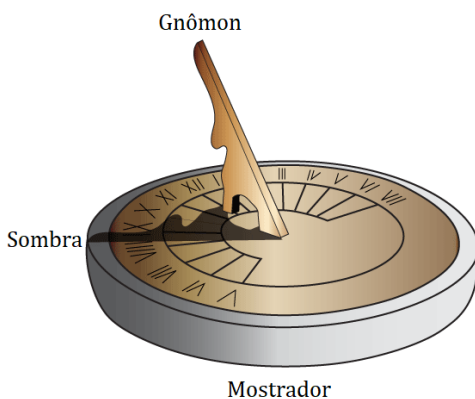


Figura E.1: Relógio de Sol horizontal. Ele está marcando 8:30 da manhã

¹No capítulo 6, falamos disso com mais calma.

Desse modo, o ângulo entre o gnômon e o mostrador é a própria latitude do local de observação. Agora, vamos aprender a determinar o hemisfério em que um relógio de Sol está. A imagem abaixo ilustra um relógio de Sol no **hemisfério norte**.

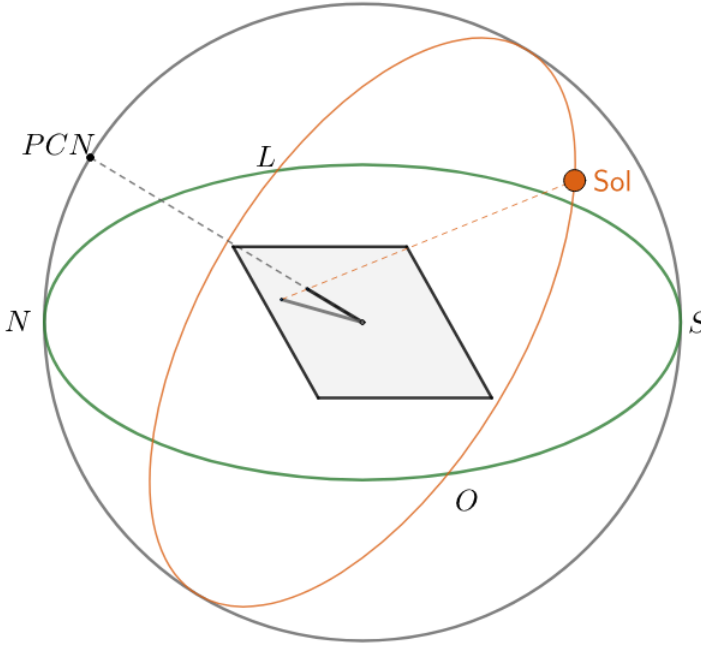


Figura E.2: Relógio de Sol horizontal no HN durante o equinócio

Desprezando a equação do tempo e a influência dos fusos, podemos observar duas características que devem estar presentes em **todo** relógio de Sol horizontal, independentemente de seu hemisfério:

- Quando o Sol está nascendo ($\approx 6:00$, leste), a sombra do Gnômon aponta para oeste. Isso implica que as primeiras horas da manhã estão na direção do oeste;
- Quando o Sol está se pondo ($\approx 18:00$, oeste), a sombra do Gnômon aponta para leste. Isso quer dizer que as últimas horas de Sol estão na direção do leste.

Desse modo, é possível encontrarmos as posições dos pontos cardeais leste e oeste somente olhando para as posições dos horários próximos de 6:00 e 18:00. Com isso, podemos determinar a posição de todos os pontos cardeais. Como o gnômon aponta para o polo visível, caso o ponto cardinal na direção do gnômon seja o **norte**, o relógio está no **HN**. Por outro lado, caso o gnômon aponte para o **sul**, o relógio está no **HS**.

Exemplo 1:

Em que hemisfério está o relógio horizontal da figura E.1?

Solução

Olhando para o relógio, podemos encontrar as posições dos horários 6:00 (à esquerda do gnômon) e 18:00 (à direita do gnômon). Desse modo, é possível determinar as posições aproximadas do leste e oeste, assim como representado na imagem abaixo.

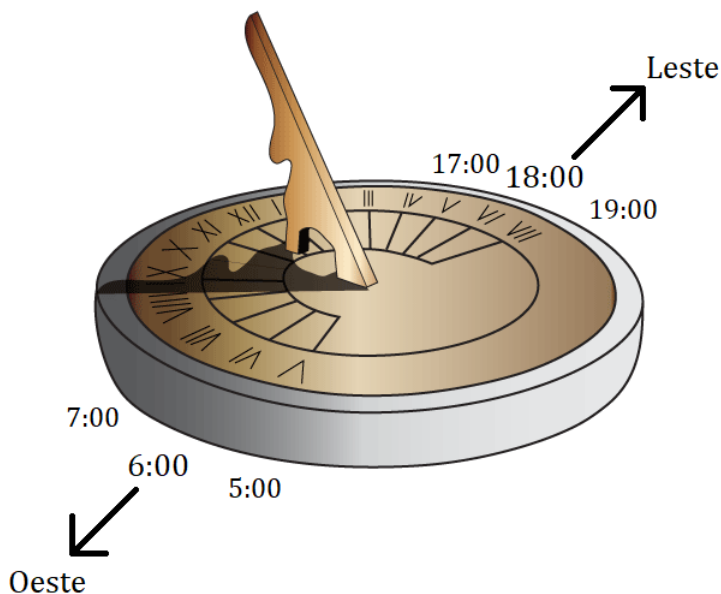


Figura E.3: Exemplo 1

Com isso, pode-se perceber que o gnômon está apontando para o ponto cardinal norte, ou seja, o relógio está no **hemisfério norte**.

E.2 Relógio de Sol vertical

Um relógio de Sol vertical (ou “de parede”) é fixado em uma parede alinhada com a direção leste – oeste e de forma com que a sombra do gnômon fique sobre o mostrador vertical, assim como ilustrado na imagem abaixo. Sua principal característica é:

- O gnômon aponta para o polo oculto ($HN \rightarrow PCS / HS \rightarrow PCN$)

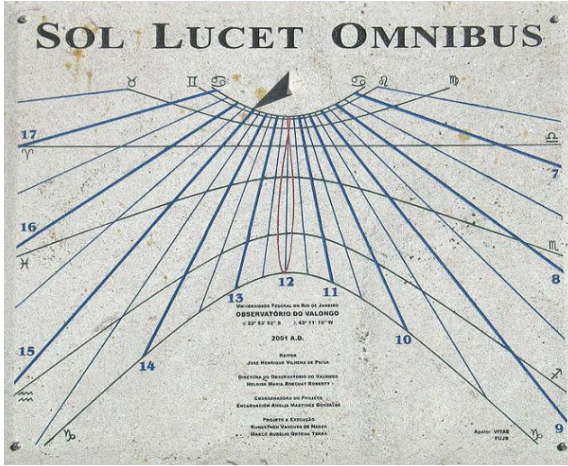


Figura E.4: Relógio de Sol vertical. Ele está marcando 15:00

Assim, o ângulo entre o gnômon e a parede em que está o relógio é $\theta = 90^\circ - \varphi$, como está representado na figura E.5. De maneira análoga ao que fizemos no caso do relógio horizontal, podemos determinar o seu hemisfério. A imagem E.6 ilustra um relógio de Sol no **hemisfério norte**.

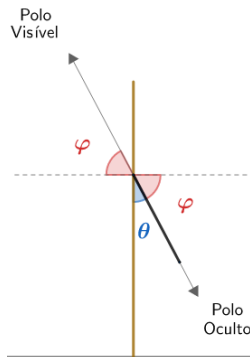


Figura E.5: Visão lateral de um relógio de Sol vertical

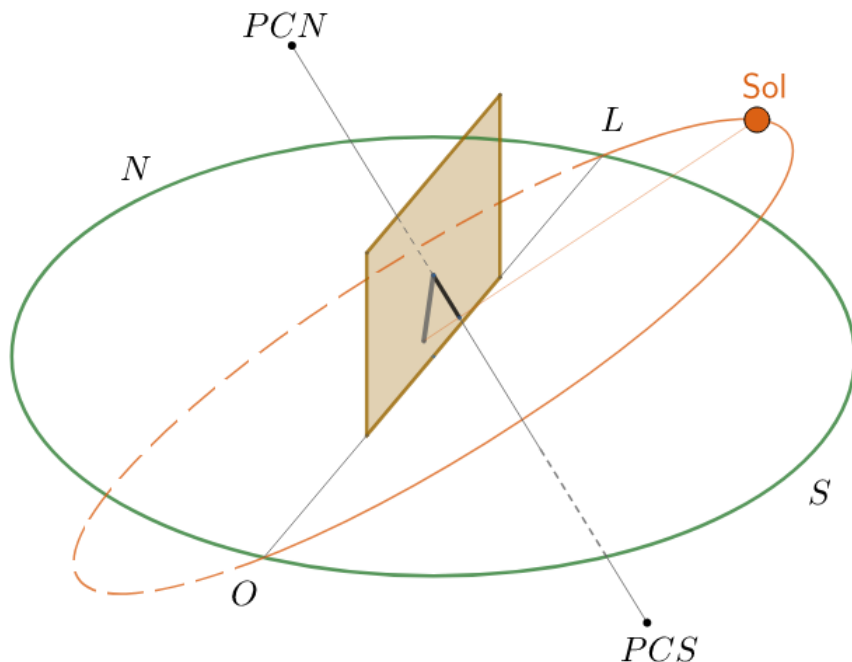


Figura E.6: Relógio de Sol vertical no HN durante o equinócio

Desse modo, podemos fazer as seguintes afirmações a respeito de **qualquer** relógio de Sol vertical, independentemente de seu hemisfério²:

- Quando o Sol está nascendo ($\approx 6:00$, leste), a sombra do Gnômon aponta para oeste. Isso implica que as primeiras horas da manhã estão na direção do oeste;
- Quando o Sol está se pondo ($\approx 18:00$, oeste), a sombra do Gnômon aponta para leste. Isso quer dizer que as últimas horas de Sol estão na direção do leste.

Assim, podemos determinar o hemisfério do relógio de maneira análoga ao que fizemos com o relógio horizontal - basta lembrar que o gnômon aponta para o polo oculto. Por fim, vale reforçar que a parede de um relógio do Sol vertical deve estar alinhada com a direção leste – oeste.

²São as mesmas do relógio de Sol horizontal.

Exemplo 2:

Em que hemisfério está o relógio vertical da figura E.4?

Solução

Podemos determinar as posições aproximadas do leste e oeste, assim como representado na seguinte imagem:

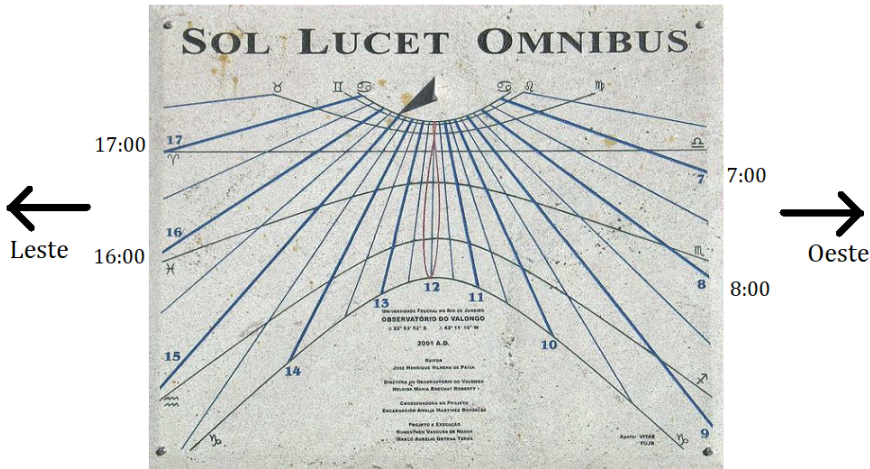


Figura E.7: Exemplo 2

Assim, note que a parede está virada para o norte, i.e. o PCN é o polo oculto. Desse modo, o polo visível é o PCS e, portanto, o relógio está no hemisfério sul.

Apêndice F

Movimento Próprio

Ao contrário do senso comum, as estrelas não estão fixas no céu, e sim se movimentando com velocidades altíssimas, podendo chegar a centenas de km/s, pelo espaço sideral. Entretanto, por elas estarem muito distantes da Terra, é necessário esperar muito tempo para que essas velocidades resultem as alterações significativas de suas posições quando observadas por nós. Essa variação das posições dos astros é chamada de **movimento próprio**.

Dessa forma, o que realmente acontece é algo parecido com:

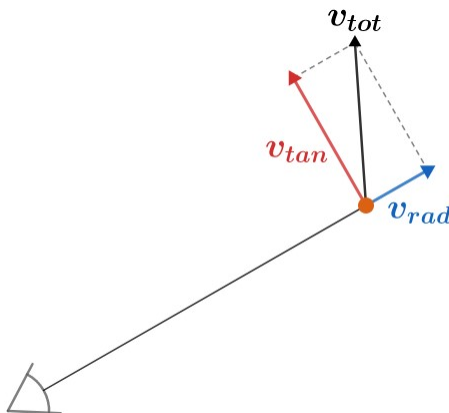


Figura F.1: Velocidades de um astro com relação à Terra

Agora, vamos analisar cada uma das componentes da velocidade total do astro, a radial e a tangencial.

Velocidade Radial

A velocidade radial v_{rad} nos diz o quão rápido o objeto se aproxima ou se afasta de nós. Caso ele esteja se **afastando**, então ele tem uma velocidade radial **positiva**. Por outro lado, caso o objeto esteja se **aproximando** de nós, ele possui uma velocidade radial **negativa**.

Perceba que a velocidade radial não resulta em variações da posição do astro quando visto da Terra, e sim, em mudanças de sua distância até nós.

O método mais comum de se calcular a velocidade radial de um astro é pelo redshift, assim como vimos no terceiro capítulo.

Velocidade Tangencial

A velocidade tangencial v_{tan} é a componente da velocidade de um astro relacionada à mudança de sua posição quando vista da Terra, e portanto é a causa do movimento próprio.

Vamos relacionar o movimento próprio μ de um astro, que é a variação temporal de sua posição no céu, com a velocidade tangencial e a distância de um astro. Após um pequeno intervalo de tempo Δt , temos:

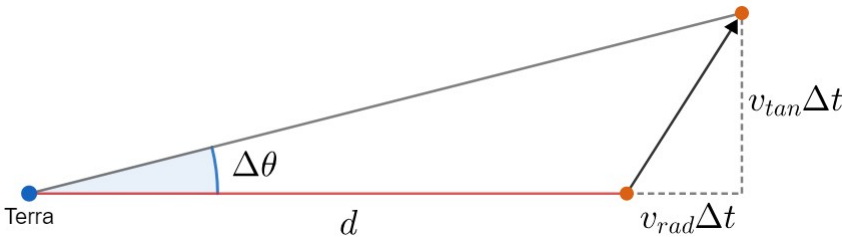


Figura F.2: Relação entre μ , v_{tan} e d

Temos:

$$\tan \Delta\theta = \frac{v_{tan}\Delta t}{d + v_{rad}\Delta t}$$

Como estamos tratando de pequenos intervalos de tempo e grandes distâncias, temos que $\Delta\theta \ll 1$, i.e. $\tan \Delta\theta \approx \Delta\theta$, e $d + v_{rad}\Delta t \approx d$. Assim:

$$\Delta\theta \approx \frac{v_{tan}\Delta t}{d}$$

Como $\mu = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, temos:

$$\boxed{\mu = \frac{v_{tan}}{d}}$$

F.1 Movimento próprio na esfera celeste



Figura F.3: A imagem à esquerda e à direita representam as mesmas regiões do céu separadas por 20000 anos. O formato da cruz e a posição de α Cen (marcada) variam significativamente

Agora, vamos estudar a variação das coordenadas equatoriais de um astro devido ao seu movimento próprio. Em uma situação real, podemos medir com certa precisão a variação da declinação e da ascensão reta de uma estrela qualquer, como representado na tabela F.4. Apesar de ser intuitivo pensar que podemos encontrar μ somente aplicando um pitágoras entre as taxas de variação de α e δ , veremos que essa análise está incorreta.

Coordenadas de Vega			Coordenadas de Altair		
Ano	Ascensão Reta	Declinação	Ano	Ascensão Reta	Declinação
2011	18h36m56,43s	38°47'5,0"	2011	19h50m47,41s	8°52'10,3"
2001	18h36m56,35s	38°47'1,6"	2001	19h50m47,04s	8°52'6,4"
1991	18h36m56,27s	38°46'58,2"	1991	19h50m46,67s	8°52'02,5"
1981	18h36m56,19s	38°46'54,8"	1981	19h50m46,30s	8°51'58,6"
1971	18h36m56,11s	38°46'51,4"	1971	19h50m45,93s	8°51'54,7"

Figura F.4: Variação das coordenadas de Vega e Altair nas últimas décadas

Seja $\Delta\theta$ a variação da posição de uma estrela quando vista da Terra. As variações $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ associadas a esse ângulo podem ser observadas na seguinte imagem:

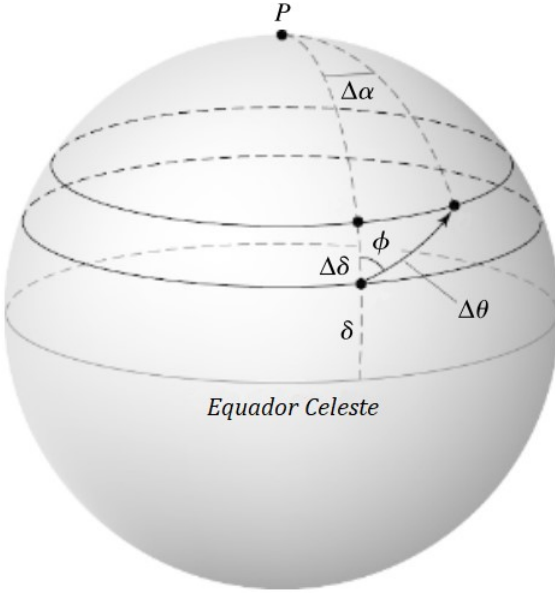


Figura F.5: Variação das coordenadas de Vega e Altair nas últimas décadas

Desse modo, perceba que podemos¹ aplicar um Teorema de Pitágoras no triângulo da figura F.6.

$$(\Delta\theta)^2 = (\Delta\delta)^2 + (\Delta x)^2$$

Dividindo ambos os lados por $(\Delta t)^2$:

$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\delta}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$$

Sendo $\mu = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $\mu_\delta = \frac{\Delta\delta}{\Delta t}$ e $\mu_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, temos:

$$\mu^2 = \mu_\delta^2 + \mu_x^2$$

¹Isso só é válido para pequenas variações de coordenadas. O correto seria utilizar leis da trigonometria esférica, porém tal análise não costuma ser exigida em provas.

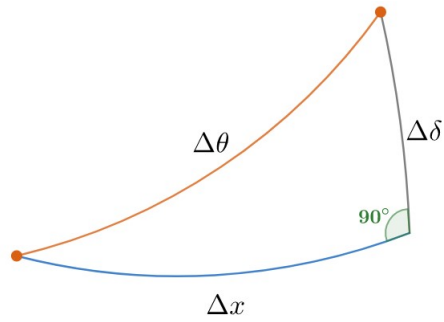


Figura F.6: Triângulo não esférico com as variações das coordenadas

Agora, vamos relacionar Δx com $\Delta\alpha$. Podemos representar o ângulo $\Delta\alpha$ da figura F.5 de quatro maneiras análogas:

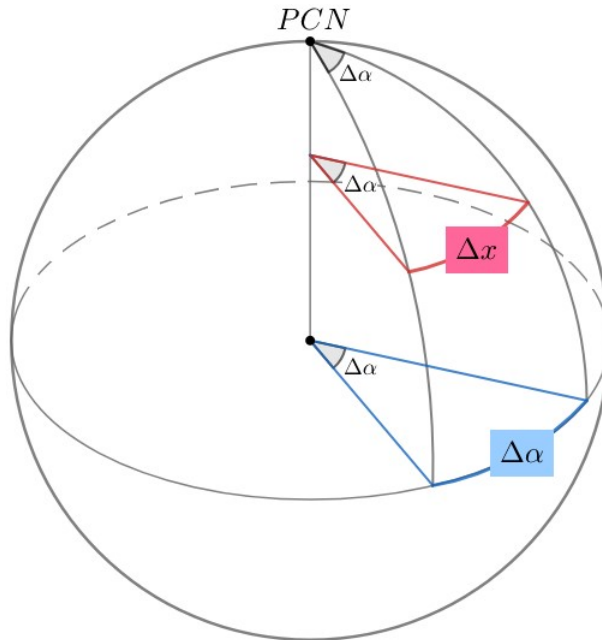


Figura F.7: Relacionando Δx e $\Delta\alpha$

Sendo R o raio da esfera celeste e r o raio da pequena circunferência vermelha, temos:

$$\Delta x = r\Delta\alpha$$

e

$$\Delta\alpha = R\Delta\alpha$$

As unidades dessas equações estão incorretas, o que é normal quando dizemos que a esfera celeste possui um raio R bem definido. Entretanto, como veremos a seguir, essa aparente incoerência irá desaparecer. Sendo δ a declinação do astro, podemos relacionar r e R pela imagem:

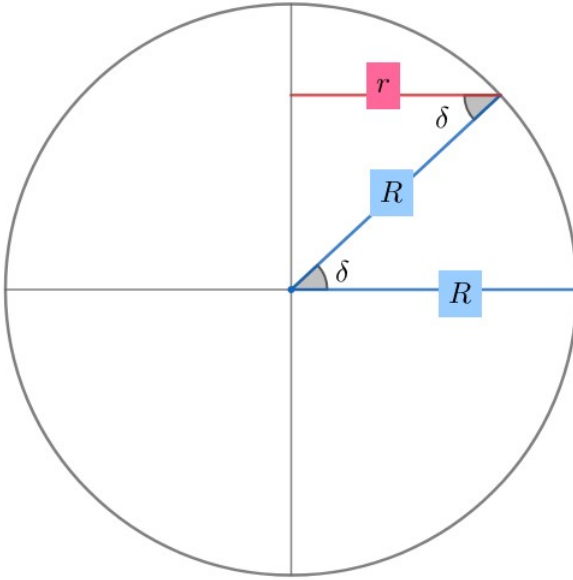


Figura F.8: Relacionando r e R

Perceba:

$$\cos \delta = \frac{r}{R}$$

Agora, dividindo as duas equações de antes:

$$\frac{\Delta x}{\Delta\alpha} = \frac{r}{R} = \cos \delta$$

Ou seja:

$$\boxed{\Delta x = \Delta\alpha \cos \delta}$$

Por fim, sendo $\mu_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, podemos chegar no resultado final:

$$\boxed{\mu^2 = \mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2}$$

O termo do cosseno pode ser interpretado de uma outra maneira. Vamos supor que um observador no hemisfério norte esteja observando o movimento diário das estrelas no céu. Um astro de $\delta = 0$, i.e. que esteja no horizonte do observador, e outro de $\delta = 80^\circ$, irão ambos dar um volta completa em torno do eixo de rotação da Terra após cerca de 24h^2 . Entretanto, o astro de maior declinação percorrerá um círculo muito menor que aquele do astro no horizonte. Como ambos os astros possuem declinações constantes, o tamanho do círculo menor será $\cos 80^\circ = 0,17$ vezes o tamanho do círculo percorrido pelo outro astro. Isso pode ser observado na seguinte figura:

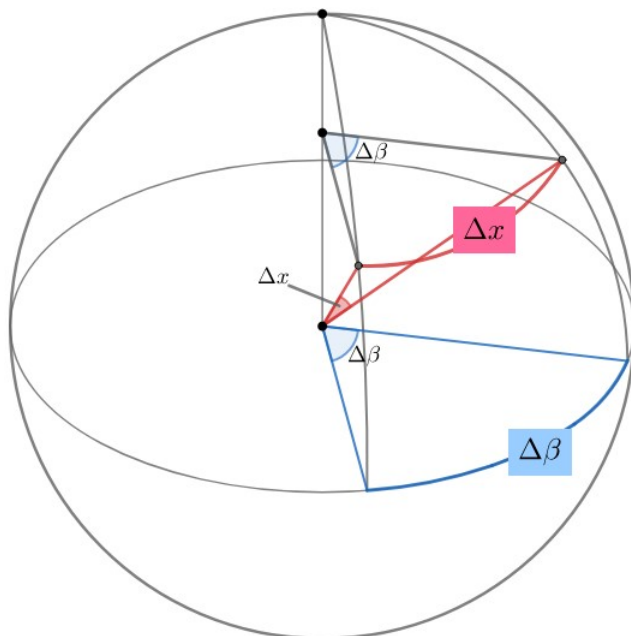


Figura F.9: Relacionando Δx e $\Delta\beta$ (somente quando esses valores são pequenos.)

Assim como provamos acima, temos:

$$\Delta x = \Delta\beta \cos \delta$$

²O correto seria um dia sideral, que foi estudado no capítulo 6.

Exemplo 1

Uma estrela possui velocidade radial v_r de 150 km/s e velocidade tangencial v_t de 100 km/s. Qual o ângulo β que o deslocamento espacial da estrela faz com a linha de visada?

Solução

Basta montar o seguinte esquema:

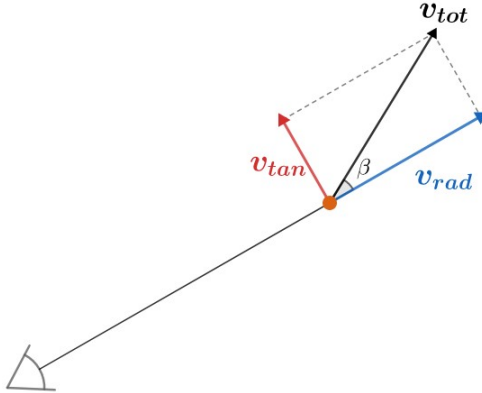


Figura F.10: Esquema das velocidades espaciais da estrela.

Assim, o ângulo procurado será

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_r}{v_t}\right) = \arctan(1,5) \approx \boxed{56,3^\circ}$$

Exemplo 2

Calcule o movimento próprio (em "/ano) de Altair na tabela F.4.

Solução

O movimento próprio em declinação μ_δ pode ser encontrado percebendo que a declinação aumentou 15,6" em 40 anos:

$$\mu_\delta = \frac{15,6''}{40 \text{ anos}} = 0,39''/\text{ano}$$

Já a ascensão reta aumentou 22,2" nesse mesmo período. Assim:

$$\mu_\alpha = \frac{22,2''}{40 \text{ anos}} = 0,555''/\text{ano}$$

A ascensão reta diminui 0,37s a cada 10 anos. Isso equivale a $0,37 \cdot 15 = 5,55''$ em 10 anos e logo $\mu_\alpha = 0,555''/\text{ano}$.

Com isso, basta utilizarmos a relação $\mu^2 = \mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2$. A declinação a ser utilizada não é bem definida³, logo devemos utilizar o valor médio ($8^\circ 52' 02,5''$) para minimizar o erro. Desse modo, chegamos em $\mu = 0,673''/\text{ano}$.

Exemplo 3:

A Estrela de Barnard é a estrela com maior movimento próprio já descoberta. Temos os seguintes dados referentes a ela: paralaxe de 547 *mas*, velocidade radial -110 km/s, movimento próprio 10,43''/ano e magnitude 9,50. Assim, determine se em algum momento do universo será possível observar esse astro a olho nu. Considere que a sua velocidade permanece constante e que a magnitude limite do olho humano é 6.

Solução

A distância d até a estrela pode ser calculada pela paralaxe:

$$d[\text{pc}] = \frac{1}{547 \text{ mas}} = 1,828 \text{ pc}$$

Podemos converter esse valor para $d = 5,64 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

A velocidade tangencial pode ser calculada a partir do movimento próprio. Primeiramente, temos:

$$\mu = 10,43''/\text{ano} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ rad/s}$$

Logo:

$$v_{tan} = \mu d = 90,4 \text{ km/s}$$

Agora, perceba que a situação de máximo brilho de Barnard ocorrerá quando ela estiver o mais próxima possível da Terra. Desse modo, basta calcularmos sua magnitude nesse ponto. Temos a seguinte imagem:

³Isso porque estamos realizando aproximações que as variações das coordenadas são pequenas.

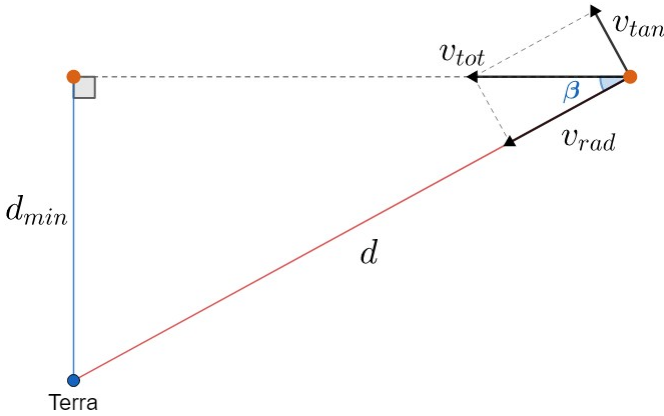


Figura F.11: Esquema da trajetória da estrela de Barnard ao longo do tempo até ficar a uma distância mínima d_{min} da Terra

Vamos encontrar o ângulo β :

$$\beta = \arctan \frac{v_{tan}}{|v_{rad}|} = \arctan \left(\frac{90,4}{110} \right) = 39,4^\circ$$

Assim, podemos encontrar d_{min} :

$$d_{min} = d \cdot \text{sen } \beta = 3,58 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

Para encontrarmos a magnitude nessa distância mínima, basta utilizarmos a Equação de Pogson. Como a luminosidade de Barnard permanece constante:

$$9,50 - m = -2,5 \log \left(\frac{\frac{L_{bar}}{4\pi d^2}}{\frac{L_{bar}}{4\pi d_{min}^2}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{d_{min}^2}{d^2} \right) = -2,5 \log (0,403)$$

$$\implies m = 9,50 - 0,99 = \boxed{8,51}$$

Como o limite de magnitude do olho humano é +6, **nunca será possível enxergar a estrela de Barnard a olho nu**, considerando apenas seu movimento próprio.

Exemplo 4

Um estudante tenta medir o campo de visão da ocular de seu telescópio usando a rotação da Terra. Para tal, o observador aponta o telescópio para

Vega, desliga o motor de acompanhamento e mede o tempo que Vega leva para cruzar o diâmetro do campo de visão obtendo o valor $\Delta t = 5,3$ min. Qual o campo de visão deste telescópio em minutos de arco?

Dados:

- Vega: $\alpha = 18,5$ h e $\delta = +39^\circ$
- Dia sideral: $D_{sid} = 23^h 56^m$

Solução

A situação pode ser ilustrada pela figura F.9. Nesse caso, o campo de visão do telescópio é o próprio ângulo Δx , enquanto o ângulo $\Delta \beta$ é a variação da amplitude de Vega durante o intervalo de tempo Δt . Como Vega dá uma volta completa em um dia sideral, temos:

$$\Delta \beta = 2\pi \frac{\Delta t}{D_{sid}}$$

Agora, sabemos que $\Delta x = \Delta \beta \cos \delta$, logo:

$$\Delta x = 2\pi \frac{\Delta t}{D_{sid}} \cos \delta$$

Realizando os cálculos, obtemos $\Delta x = 0,018$ rad = $62'$

Apêndice G

Eclipses

A palavra grega *eclípsis* significa “desaparecimento”. Na astronomia, o corpo ocultado é do Sol ou a Lua quando vistos da Terra, caracterizando um eclipse solar ou lunar, respectivamente. Neste apêndice, iremos compreender os fatores associados a esses espetáculos astronômicos.



Figura G.1: Eclipse solar

G.1 Fases da Lua

As fases da Lua são resultados das configurações entre a Terra, a Lua e o Sol. Desse modo, de acordo com a relação encontrada no capítulo 6, uma fase da Lua repete-se a cada cerca de 29,5 dias, que é o intervalo conhecido como um mês sinódico ou luação.

Agora, vamos nomear as fases da Lua. Temos a seguinte figura:

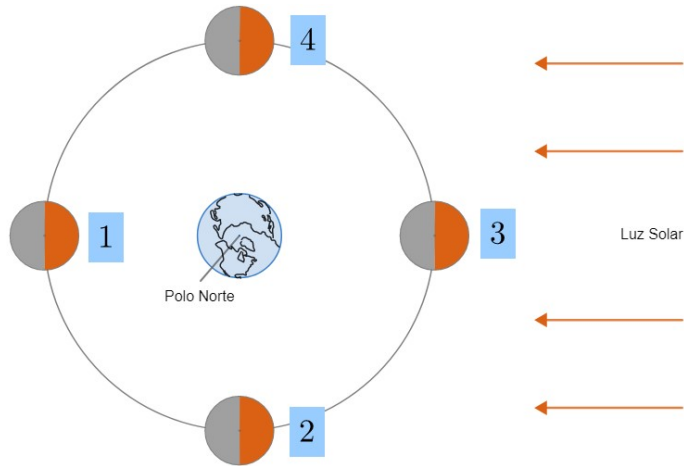


Figura G.2: Fases da Lua

Uma característica **muito** importante com relação às fases da Lua é que uma configuração fixa entre a Terra, a Lua e o Sol é observada de maneiras diferentes dependendo do hemisfério, assim como ilustrado na figura abaixo para a fase 4:

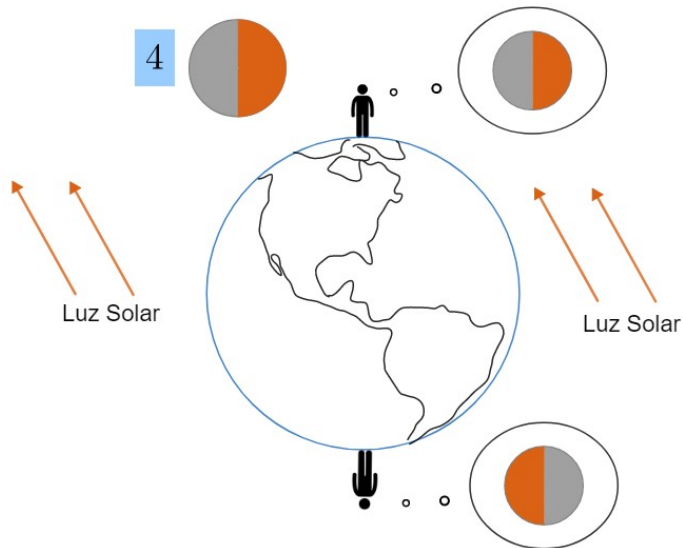


Figura G.3: “Inversão” da Lua

Assim, quando vistas do hemisfério **norte**, as fases da Lua são:

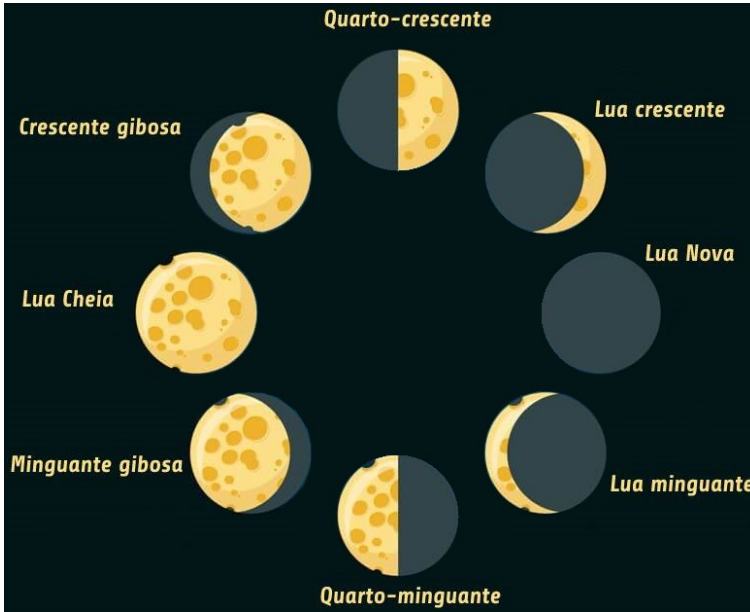


Figura G.4: Fases da Lua no HN

Ou seja, na imagem [G.2](#):

1. Lua cheia
2. Lua quarto minguante
3. Lua nova
4. Lua quarto crescente

Com isso, podemos determinar os horários de nascer o ocaso da Lua em cada uma de suas fases. Como o mês sinódico é muito maior que um dia, podemos desprezá-lo para tal objetivo. De maneira parecida, iremos desprezar a translação da Terra. Primeiramente, vamos encontrar o horário de nascer da Lua cheia.

Sabemos que a Terra gira de acordo com a regra da mão direita em torno de seu eixo, ou seja:

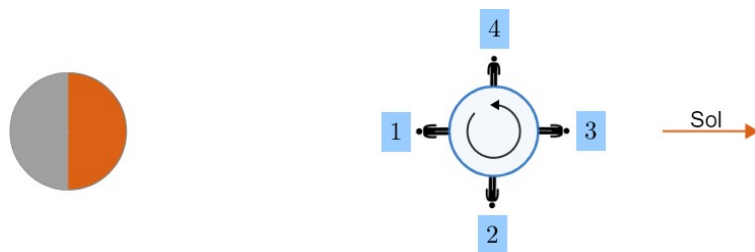


Figura G.5: Encontrando horários de nascer e ocaso da Lua

Vamos analisar essa imagem. Em 3, o Sol está a pino, i.e. são cerca de 12:00, mas a Lua não está visível. Já em 4, já é possível observar a Lua. Como a Terra deu um quarto de volta entre 3 e 4, passaram-se 6h desde o meio-dia, logo são cerca de 18:00. Isso significa que a Lua cheia nasce **aproximadamente**¹ às 18:00. De maneira análoga, ela culmina às 00:00 (ponto 1) e se põe às 6:00 (ponto 2). Realizando um procedimento análogo para as demais fases da Lua:

Fase da Lua	Horário do nascer	Horário do ocaso
Cheia	18:00	6:00
Quarto minguante	00:00	12:00
Nova	6:00	18:00
Quarto crescente	12:00	00:00

Faces visível e oculta

Uma importante característica da órbita da Lua é que ela é **síncrona**, i.e. seus períodos de rotação e translação são idênticos. A principal consequência disso é que sempre vemos a mesma face da Lua, assim como representado pela imagem abaixo.

¹Esse valor refere-se ao tempo solar verdadeiro local, que não necessariamente é igual ao tempo civil, porém costuma ser próximo.

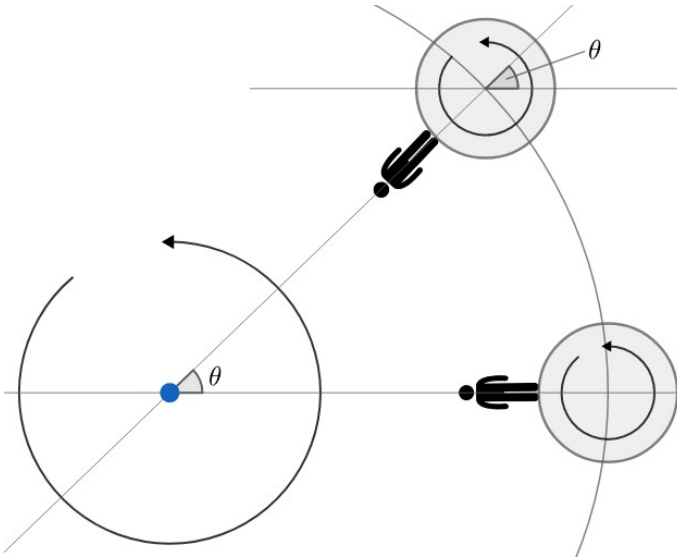


Figura G.6: Órbita síncrona da Lua

Na verdade, devido a um efeito chamado de **libração**, podemos enxergar um pouco mais que um hemisfério lunar. Esse efeito consiste de um pequeno balanceio da Lua, que pode ser visualizado por gifs na internet².

Por fim, vale ressaltar que a imagem da Lua muda de acordo com a posição do observador na Terra. De modo geral, mudanças de um hemisfério para o outro fazem com que ela fique invertida³, assim como representado pela imagem:



Figura G.7: Mudança da imagem da Lua dependendo do hemisfério.

²É difícil representá-lo por imagens.

³Tal inversão não é perfeita, pois seria necessário selecionar latitudes e longitudes específicas.

G.2 Eclipses

Como vimos no capítulo 5, a inclinação da órbita lunar em relação à eclíptica é cerca de $5,14^\circ$. Por essa razão, não é em toda fase nova ou cheia da Lua que há um eclipse. Para isso acontecer, é necessário um certo grau de alinhamento entre a Terra, a Lua e o Sol. Agora, vamos estudar melhor cada tipo de eclipse.

Eclipse solar

Quando há um alinhamento entre os três corpos celestes em questão, temos que ou a Terra ou a Lua pode ser o corpo entre os dois outros. Assim, um eclipse solar ocorre quando a Lua fica entre o Sol e a Terra. O efeito dos raios solares é produzir duas regiões de sombra: a umbra e a penumbra. A imagem abaixo representa essa situação.

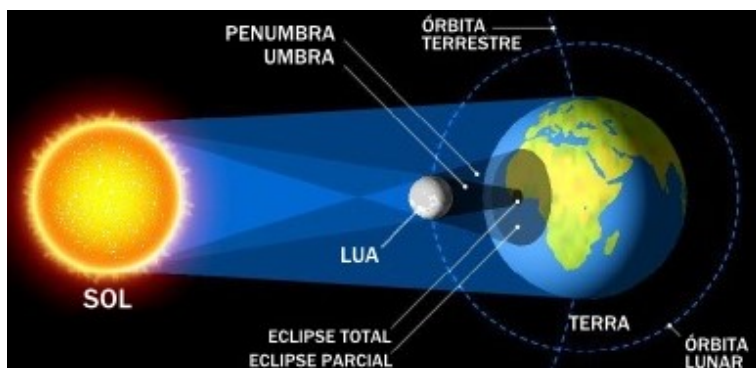


Figura G.8: Eclipse Solar

Na região do planeta mais escura, contida na **umbra**, ocorre um **eclipse solar total**, já que a Lua está totalmente em frente ao Sol. Por outro lado, na região da **penumbra**, um **eclipse solar anular ou parcial** é observado. A imagem abaixo, representa essas situações. Há ainda um terceiro caso conhecido como **eclipse solar anular** que será estudado a seguir.



Figura G.9: Tipos de eclipses solares

Eclipse solar anular

Dependendo da distância entre a Lua e a Terra, a projeção do cone de sombra na superfície terrestre pode ou não condicionar um eclipse solar total. Quando essa necessidade não é atendida, um eclipse solar anular é observado. A imagem abaixo ilustra a condição limite para um eclipse solar total.

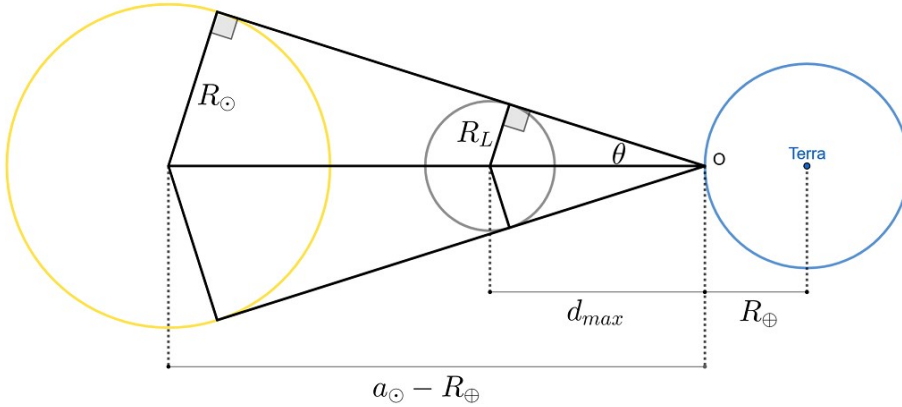


Figura G.10: Condição limite para um ponto na Terra observar um eclipse solar total

Agora, vamos calcular o valor máximo da distância Terra-Lua para que seja possível observar um eclipse solar total. Vale ressaltar que d_{max} vai da superfície da Terra até o centro da Lua, então a distância Terra-Lua é $d_{max} + R_{\oplus}$ nessa situação.

De acordo com a figura, temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{R_L}{d_{max}} = \frac{R_{\odot}}{a_{\odot} - R_{\oplus}}$$

Ou seja:

$$d_{max} = (a_{\odot} - R_{\oplus}) \frac{R_L}{R_{\odot}}$$

Realizando a conta, obtemos $d_{max} + R_{\oplus} = 3,8 \cdot 10^8$ m. Assim, caso a distância Terra-Lua eventualmente seja maior que esse valor, veremos um eclipse solar anular. Como a distância entre esses corpos quando a Lua está em seu afélio é $d_{af} \approx 4,1 \cdot 10^8$ m, temos que $d_{max} + R_{\oplus} < d_{af}$. Desse modo, é possível observarmos eclipses solares anulares.

Vale ressaltar que, em todo eclipse solar, a Lua está na fase nova.

Eclipse lunar

Enquanto o eclipse solar ocorria quando a Lua ocultava o Sol, eclipses lunares acontecem quando a Lua passa pela sombra da Terra. Novamente, é necessário haver um certo grau de alinhamento entre esses corpos. A imagem abaixo ilustra essa situação.

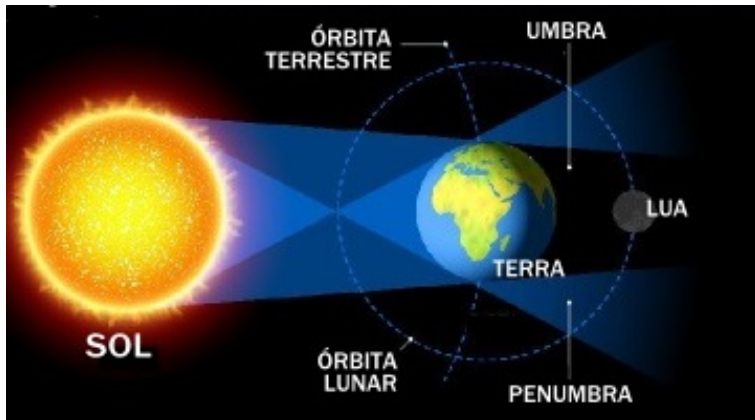


Figura G.11: Eclipse Lunar

Há 3 tipos de eclipses lunares: **total**, **parcial** e **penumbral**. Eles são caracterizados por:

- Eclipse lunar total: Lua completamente imersa na umbra
- Eclipse lunar parcial: Lua com partes tanto na umbra quanto na penumbra
- Eclipse lunar penumbral: Lua imersa na penumbra sem nenhuma parte na umbra

A imagem abaixo ilustra esses conceitos.

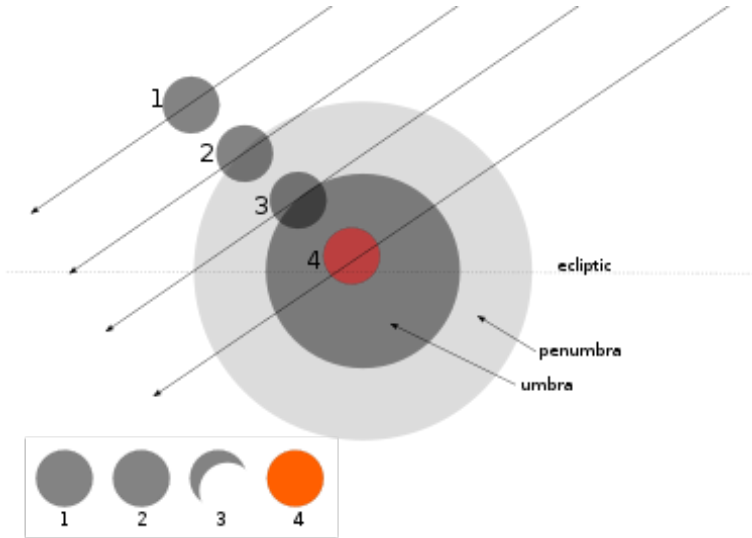


Figura G.12: Em 1, não há eclipse; em 2, há um **eclipse lunar penumbral**, mas parcial; em 3, há um **eclipse lunar parcial** e em 4, há o **eclipse lunar total**

Vale ressaltar que a Lua fica avermelhada durante um eclipse solar total. Nessa situação, toda a luz solar que incide na superfície lunar passou pela atmosfera terrestre, sofrendo tanto refração quanto dispersão de Rayleigh. Entretanto, a luz vermelha é menos sujeita a esses fatores que a luz azul, fazendo com que somente ela chegue na Lua. Ainda, eclipses lunares ocorrem quando a Lua está em sua fase cheia.

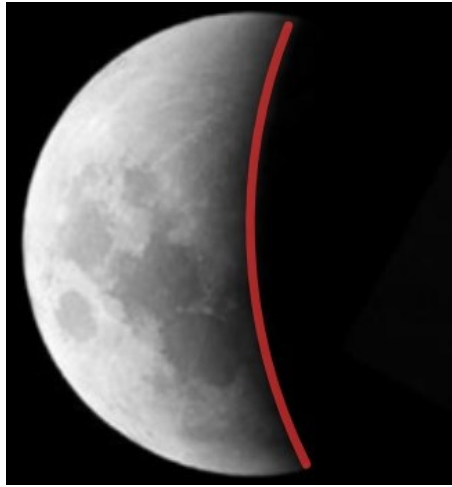
Exemplo 1

A fotomontagem a seguir traz duas imagens da Lua. Qual(is) dela(s) foram tiradas durante eclipses?



Solução

De acordo com a imagem G.4, não existe nenhuma fase da Lua que representa o posicionamento da concavidade da Lua da direita, que está destacado na imagem abaixo.



Desse modo, pode-se perceber que a imagem da direita representa um eclipse lunar, enquanto a da esquerda representa a Lua em sua fase crescente quando vista do HS.

Eclipses lunares anulares

De maneira análoga ao que fizemos para conferir a possibilidade de existirem eclipses solares anulares, podemos determinar a existência de eclipses lunares anulares, que ocorrem quando nenhum ponto da Lua está na umbra. No caso limite:

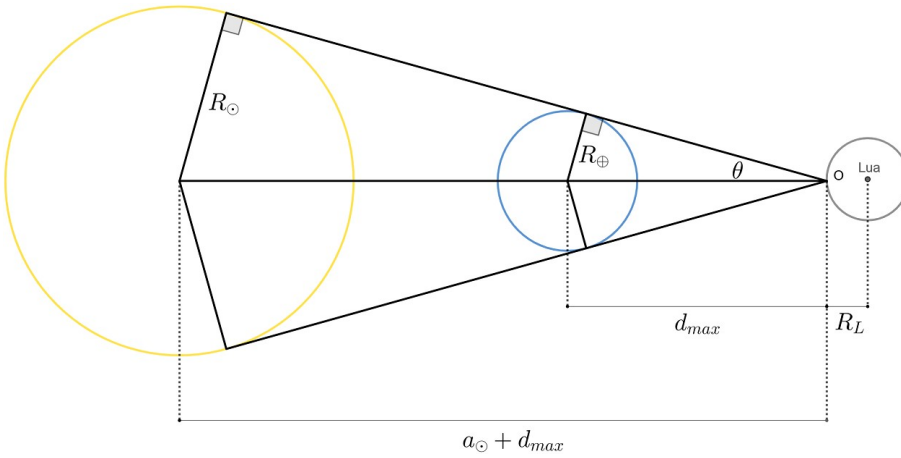


Figura G.13: Condição limite para a existência de eclipses lunares anulares

Pela figura, temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{R_{\oplus}}{d_{max}} = \frac{R_{\odot}}{a_{\odot} + d_{max}}$$

Reescrevendo:

$$d_{max} = a_{\odot} \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot} - R_{\oplus}}$$

Realizando os cálculos, obtemos $d_{max} = 1,39 \cdot 10^9$ m. Como a distância $d_{max} + R_L > d_{af}$, a Lua nunca fica longe o suficiente para possibilitar a existência desse eclipse. Desse modo, é impossível ocorrer um eclipse lunar anular.

Apêndice H

Ângulo sólido

O ângulo sólido trata-se do equivalente tridimensional do ângulo plano. Enquanto este relaciona comprimentos em uma circunferência, o ângulo sólido fornece uma relação para a área de regiões em esferas.

Enquanto ângulos planos são medidos em radianos, em que 2π rad equivalem a uma circunferência completa, a unidade de medida de ângulo sólido é o **esferorradiano**, cujo símbolo é o sr. A imagem abaixo ilustra esses conceitos.

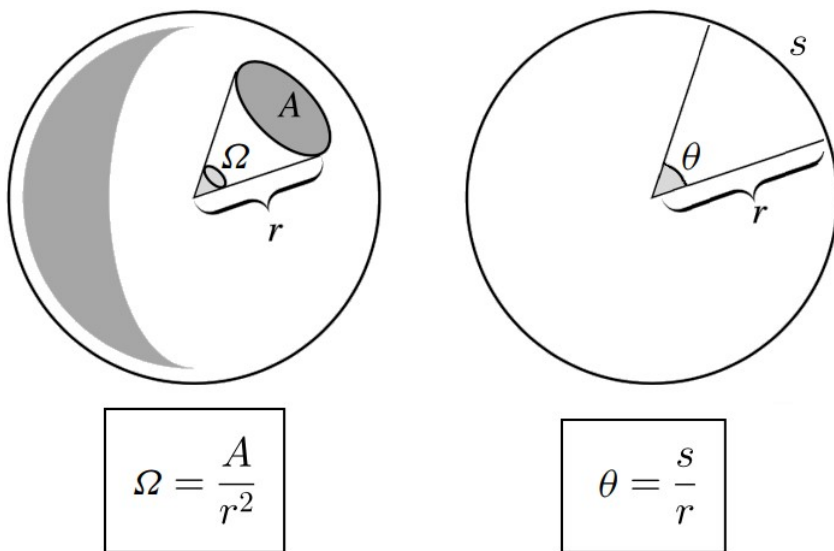


Figura H.1: Comparação entre o ângulo sólido e o ângulo plano

Assim como 2π rad equivalem a uma circunferência completa, podemos encontrar o valor em esferorradianos de uma esfera. Sabemos que a maior área

possível na superfície de uma esfera de raio r é $A_{esf} = 4\pi r^2$. Assim, o ângulo sólido Ω_{max} associado a essa área é:

$$\Omega_{max} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ sr}$$

H.1 Ângulo sólido de cones

A aplicação mais relevante do ângulo sólido na astronomia está relacionada ao cone. Em uma esfera de raio r , inserimos um cone de abertura 2θ , assim como ilustrado abaixo.

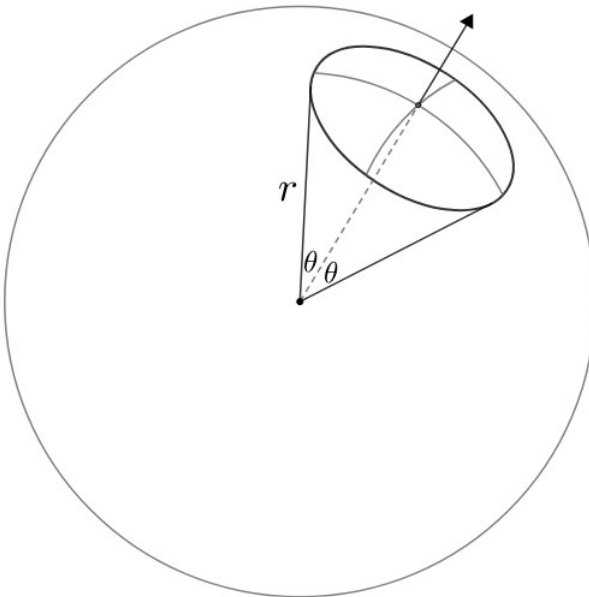


Figura H.2: Ângulo sólido de cone

A dedução do ângulo sólido associado a esse cone ultrapassa o escopo deste livro, porém seu valor é:

$$\Omega(\theta) = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Como esperado, $\Omega(\pi) = 4\pi \text{ sr}$, que equivale ao ângulo sólido de uma esfera completa.

Essa expressão é especialmente útil quando o ângulo θ é pequeno, i.e. $\theta \ll 1$. Nesse caso, podemos aproximar $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, ou seja:

$$\Omega_{peq} \approx 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)$$

Reescrevendo:

$$\boxed{\Omega_{peq} \approx \pi\theta^2}$$

Essa equação pode ser interpretada de outra maneira. Para $\theta \ll 1$, a área A associada a um objeto de raio ρ é:

$$A \approx \pi\rho^2$$

Pela definição de ângulo sólido, $\Omega = \frac{A}{r^2}$, logo:

$$\Omega_{peq} \approx \frac{\pi\rho^2}{r^2}$$

Mas, para $\theta \ll 1$, $\theta \approx \frac{\rho}{r}$, logo:

$$\Omega_{peq} \approx \pi\theta^2$$

Como esperado.

H.2 Conversão

É comum medirmos ângulos sólidos de objetos do céu em unidades além do sr. Por exemplo, caso o ângulo sólido de um objeto no céu seja muito pequeno, é mais conveniente utilizar o arcsec². Outras unidades possíveis para o ângulo sólido são o rad² e os graus quadrados. Vamos aprender a converter entre elas.

Por **definição**, 1 sr = 1 rad². Como π rad = 180°, temos:

$$1 \text{ sr} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^2 \text{ graus quadrados}$$

Como 1° = 3600 arcsec, temos:

$$1 \text{ sr} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3600}{1} \right)^2 \text{ arcsec}^2 \approx 4,25 \cdot 10^{10} \text{ arcsec}^2$$

Exemplo 1

Calcule o ângulo sólido compreendido pelo Brasil sabendo que ele possui 8.516.000 km² de área. Considere a Terra como uma esfera perfeita de raio 6371 km.

Solução

Podemos usar a definição de ângulo sólido:

$$\Omega_{BR} = \frac{A_{BR}}{R_{\oplus}^2} = \frac{8516000}{(6371)^2} = 0,2099 \text{ sr}$$

Também seria possível fazer uma simples regra de três:

$$\frac{4\pi R^2}{A_{BR}} = \frac{4\pi}{\Omega_{BR}}$$

Que resultaria no mesmo resultado.

Exemplo 2

M74, mais conhecida como Phantom Galaxy, é uma galáxia espiral de formato quase circular na constelação de Peixes. Sabendo que seu diâmetro angular vale $10'$, calcule seu ângulo sólido e sua “área física”, sabendo que ela se encontra a uma distância de 9 Mpc.

Solução

O raio angular de M74 vale metade de seu diâmetro angular, i.e. $5'$. Assim, podemos calcular seu ângulo sólido em arcsec²:

$$\Omega = \pi (5' \cdot 60)^2 \approx 282743 \text{ arcsec}^2$$

Como $1 \text{ sr} = \left(\frac{180 \cdot 3600}{\pi}\right)^2 \text{ arcsec}^2$:

$$\Omega = 282743 \text{ arcsec}^2 \cdot \left(\frac{\pi}{180 \cdot 3600 \text{ arcsec}}\right)^2 \text{ sr} = 6,65 \cdot 10^{-6} \text{ sr}$$

Assim, sua área física será:

$$A = \Omega R^2 = 6,65 \cdot 10^{-6} \cdot (9 \cdot 206265 \cdot 10^6 \cdot 1,496 \cdot 10^{11})^2 \approx \boxed{5,13 \cdot 10^{41} \text{ m}^2}$$

Onde o raio R da esfera é a própria distância de M74 até nós.
