



GABARITO COMENTADO
SIMULADO PROVA TEÓRICA
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

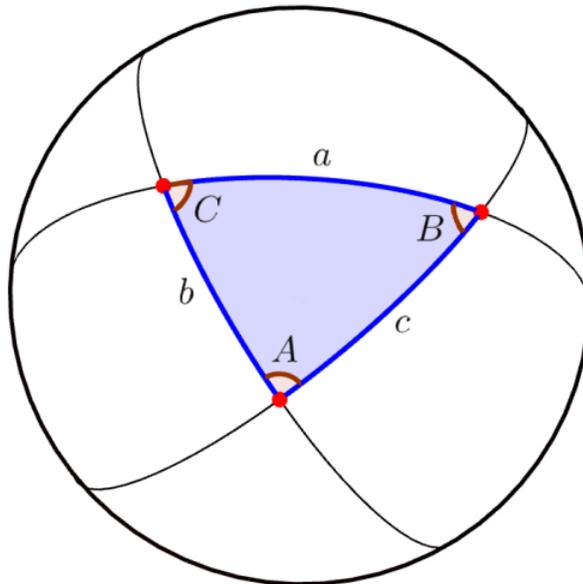
1. A duração da prova é de **quatro** (4 horas).
2. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
 - Questões Curtas - **4 questões**
 - Questões Médias - **4 questões**
 - Questões Longas - **2 questões**
3. Autores:
 - Q1: Ian Seo Takose
 - Q2: Otávio Ferrari
 - Q3: Gabriel Chalfun
 - Q4: Gabriela Martins
 - Q5: Gabriela Martins
 - Q6: Gabriel Chalfun
 - Q7: Bruno Makoto
 - Q8: Ian Seo Takose
 - Q9: Otávio Ferrari e Bruno Makoto
 - Q10: Bruno Makoto
4. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2;
5. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
6. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Como esta prova é um simulado, procure fazer uma solução parecida com aquela que você faria na prova verdadeira.
7. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues e nem serão corrigidas.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Formulário

- Para um triângulo esférico:



Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos Cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos Quatro-Elementos:

$$\cot(a) \text{sen}(b) = \cot(A) \text{sen}(C) + \cos(b) \cos(C)$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Hubble:

$$v_{rad} = H_0 d$$

- Equação polar da elipse:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

- Efeito doppler clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Questões Curtas

1. (15 pontos) Durante a IOAA, a equipe brasileira decidiu fazer um passeio na cidade de Vassouras ($\phi = 22^{\circ}24'14'' S$ e $\lambda = 43^{\circ}39'45'' W$), mas Otávio preferiu ficar no hotel dormindo ☹. Quando estavam passando por um dos pontos turísticos da cidade, a Igreja Matriz de Nossa Senhora da Conceição, eles notaram um figura parecida com o rosto de seu amigo culminando no alto da igreja. Surpresos, decidiram tirar uma foto para homenageá-lo. A partir dela (Figura 1), estime a declinação da cabeça de Otávio (indicada por *otavião*) no momento da foto.

Dados:

- O morro com os alunos possui uma inclinação de 10° .
- O tamanho físico da letra “i”, representada pelo jovem de bermuda bege, é de aproximadamente $2m$ e ele está a uma distância de $8m$ da câmera.
- Para tirar a foto, eles colocaram a câmera no chão, de forma que ela estava paralela ao solo.
- O corpo dos estudantes, assim como a igreja, estava na direção da gravidade.
- A igreja está na direção Sul.



Figura 1: Linda foto da equipe brasileira.

Solução:

A ideia do exercício é descobrir o tamanho angular da igreja, pois, com isso, é fácil de calcular a altura de *otavião* e então concluir o exercício. A pergunta que fica é: como fazer isso?

Primeiramente, é importante analisar os dados que a questão forneceu; com a altura do jovem (o grande Gabriel Hemétrio) e sua respectiva distância à câmera deveríamos conseguir calcular seu diâmetro angular, mas como isso nos ajuda?

Perceba que, uma vez que tivermos seu tamanho angular, conseguiremos a escala da imagem, isto é, se pegarmos a razão entre o ângulo encontrado e o tamanho físico na foto, saberemos quantos graus correspondem a 1 centímetro na foto. Portanto, poderemos encontrar a altura de *otavião*!

Para calcular o diâmetro angular do jovem, veja que o esquema fica:

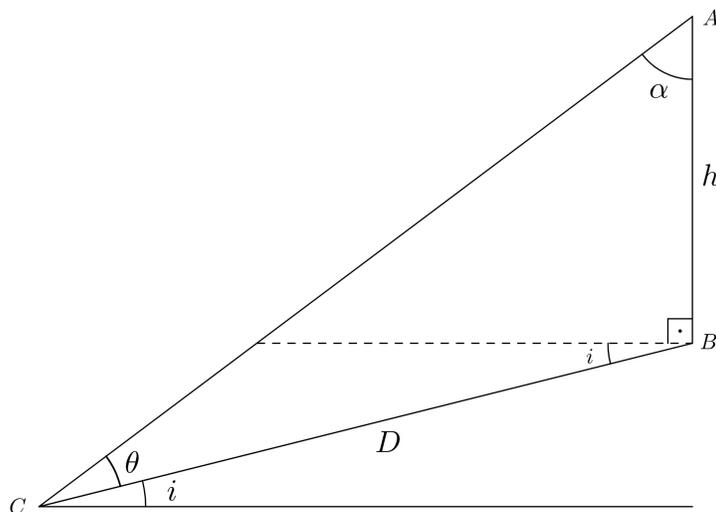


Figura 2: Esquemática do problema.

Na figura, \overline{BC} é o morro, e \overline{AB} a extensão de Gabriel; seu tamanho angular é simplesmente o ângulo $\theta = m(\hat{ACB})$ e definimos $i = 10^\circ$ como a inclinação do local.

Perceba que com os ângulos que temos, não conseguimos aplicar uma Lei dos Senos direta, por isso, criamos a variável $\alpha = 180^\circ - (\theta + (90^\circ + i))$ para ser o ângulo que falta em nosso triângulo. Portanto, pela Lei dos Senos:

$$\frac{D}{\text{sen } \alpha} = \frac{h}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \frac{D}{\text{sen } (\theta + 90^\circ + i)} = \frac{h}{\text{sen } \theta},$$

onde usamos que $\text{sen } (180^\circ - x) = \text{sen } x$. Além disso, perceba que $\text{sen } (90^\circ + x) = \text{cos } x$, logo podemos escrever:

$$\frac{D}{\text{cos } (\theta + i)} = \frac{h}{\text{sen } \theta}$$

Passando o cosseno multiplicando, o h dividindo e abrindo o cosseno:

$$\frac{D}{h} = \frac{\text{cos } \theta \text{ cos } i}{\text{sen } \theta} - \frac{\text{sen } \theta \text{ sen } i}{\text{sen } \theta} = \frac{\text{cos } i}{\text{tan } \theta} - \text{sen } i,$$

onde utilizamos que $\text{tan } \theta = \text{sen } \theta / \text{cos } \theta$. Finalmente, isolando θ :

$$\frac{\text{cos } i}{\text{tan } \theta} = \frac{D}{h} + \text{sen } i \Rightarrow \theta = \text{tan}^{-1} \left(\frac{\text{cos } i}{\frac{D}{h} + \text{sen } i} \right)$$

$$\Rightarrow \theta = 13,3^\circ$$

Agora, basta fazermos a regra de três já mencionada. Medindo na régua, encontramos que a altura do jovem é $10,5\text{cm}$ e da igreja $9,1\text{cm}$. Lembrando que esses valores dependem do zoom do seu computador, mas um conselho é sempre tentar deixar o maior possível para maximizar a precisão das suas contas. Vale ressaltar também que é muito importante que você não mude o zoom do seu computador entre as duas medidas (meio óbvio, mas uma vez quase me ferrei por ter dado zoom out sem querer kkkrying). Assim, o tamanho angular H da igreja é:

$$H = \frac{9,1}{10,5} \cdot 13,3^\circ = 11,5^\circ$$

Um último cuidado antes de fazermos a análise de passagem meridiana é que a altura de *otavião* não é H , pois estamos vendo a situação inclinados de $i = 10^\circ$. A Figura 3 traz a ilustração disso.

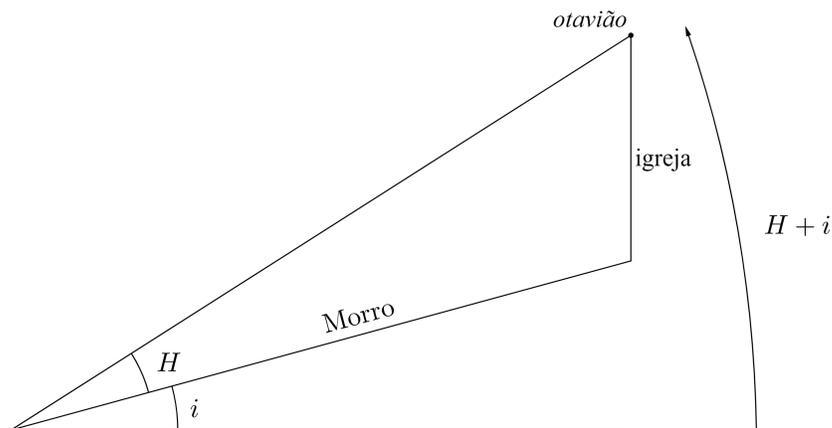


Figura 3: Perceba que, na verdade, a altura de *otavião* é $H + i$.

De posse de todas essas informações, conseguimos enfim concluir o exercício. Já que *otavião* está culminando, temos (note que $H + i = 21,5^\circ < \phi$):

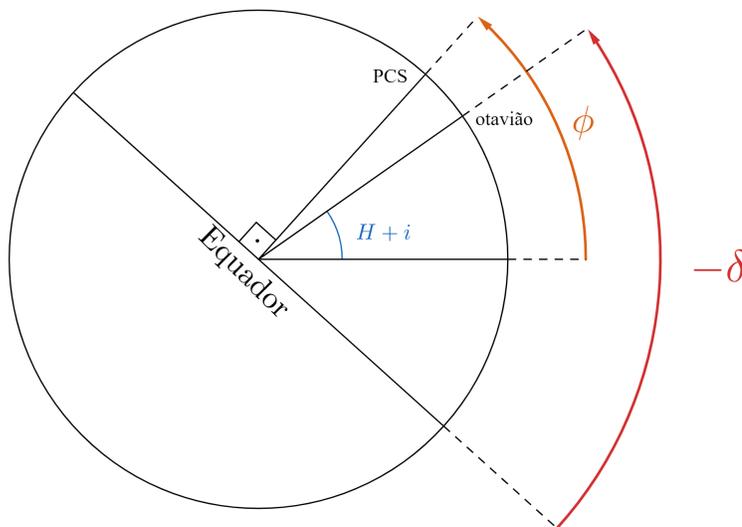


Figura 4: Representação meridiana da situação. Lembre que a igreja está na direção Sul. Note que escrevemos $-\delta$, pois marcamos-o na direção Sul, então ele é negativo.

Assim, finalmente concluímos que,

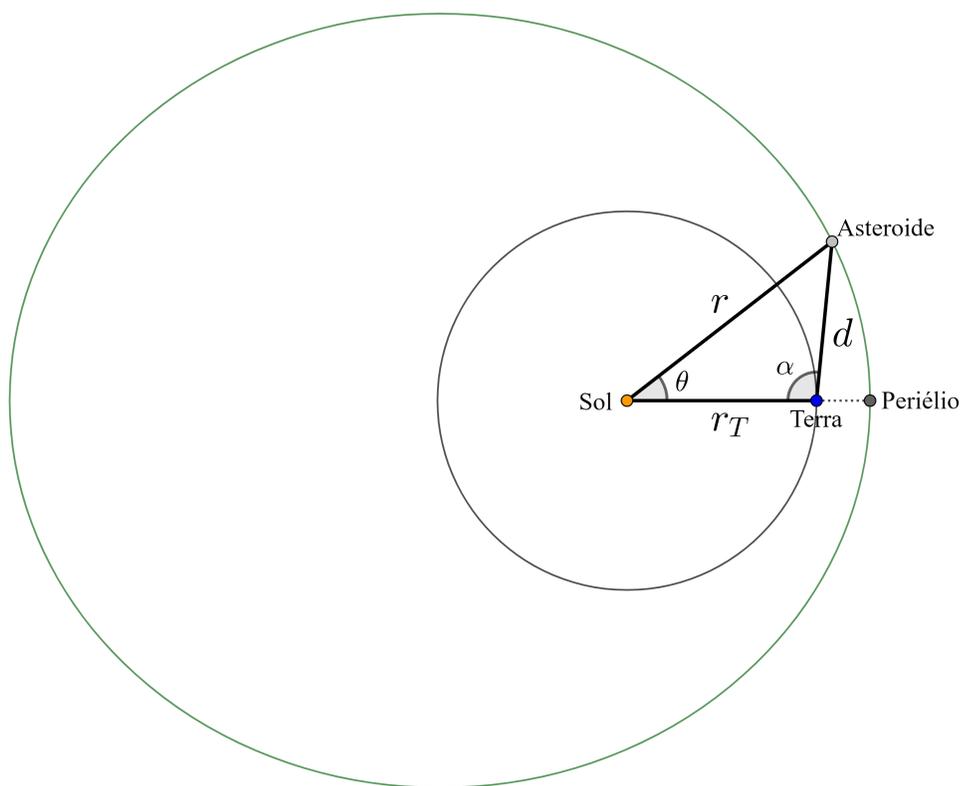
$$\begin{aligned} \phi - (H + i) + (-\delta) &= 90^\circ \Rightarrow \delta = 90^\circ - \phi + (H + i) \\ &\Rightarrow \boxed{\delta = -89^\circ 06' 09'' \approx -90^\circ} \end{aligned}$$

OBS: apesar da resolução ser extensa, uma vez com a ideia em mente, essa questão saía bem rápida, só era preciso tomar cuidado em alguns pontos e ter uma facilidade com desenvolver equações trigonométricas. Caso a parte de Trigonometria ainda não esteja tão enraizada em sua mente, é interessante ver (ou rever) o capítulo de Trigonometria na seção de Métodos Matemáticos no [livrão](#).

2. (15 pontos) Considere um asteroide com órbita elíptica contida no plano da eclíptica cujo semieixo maior é $a = 2,27$ UA. No dia em que a Terra está entre o Sol e o **ponto do periélio** da órbita desse asteroide, mede-se que a distância Terra-asteroide é $d = 0,84$ UA e que, visto a partir da Terra, sua separação angular com o Sol é $\alpha = 95,6^\circ$. Considerando a órbita terrestre como circular, calcule a excentricidade e da órbita do asteroide.

Solução:

Temos a situação descrita no enunciado representada na figura abaixo:



Pela lei dos cossenos, a distância do asteroide ao Sol é:

$$r = \sqrt{d^2 + r_T^2 - 2dr_T \cos \alpha} \Rightarrow r \approx 1,37 \text{ UA}$$

Pela lei dos senos, conseguimos encontrar a anomalia verdadeira do asteroide no momento da observação:

$$\frac{\text{sen } \theta}{d} = \frac{\text{sen } \alpha}{r} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{d}{r} \text{sen } \alpha \Rightarrow \theta \approx 37,7^\circ$$

Por fim, pela equação polar da elipse, sabemos que:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$r + er \cos \theta = a - ae^2 \Rightarrow a \cdot e^2 + r \cos \theta \cdot e + (r - a) = 0$$

Pela fórmula de bháskara, podemos encontrar que a excentricidade é:

$$e = \frac{-r \cos \theta \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \theta - 4a(r - a)}}{2a}$$

Resultando nas soluções $e \approx -0,91$ e $e \approx 0,43$. Obviamente a excentricidade não pode ser negativa, então conclui-se que:

$$e \approx 0,43$$

3. (15 pontos) Os cientistas do hemisfério norte do planeta Klar-A acharam registros de uma era glacial que ocorreu há 4000 anos, resultado da união entre o apoastro e o solstício de inverno, que coincidiram na época. Eles sabem que o periastro precessiona no sentido anti-horário com um período de 60000 anos e que o ponto vernal se desloca ao longo da “eclíptica” em $32,4''$ por ano no sentido horário, devido à precessão dos equinócios.

Considerando que a excentricidade orbital de Klar-A é constante, determine o tempo (em anos) até a próxima era glacial no hemisfério norte do planeta.

Solução:

Em primeiro lugar, o ponto vernal (nodo ascendente entre o plano orbital e o equador celeste de Klar-A) está se deslocando $32,4''$ por ano em virtude do movimento do equador celeste em torno do plano eclíptico (uma excelente visualização pode ser vista [aqui](#)), que se dá numa velocidade angular uniforme.

De maneira equivalente, se definirmos o ponto v como o ponto “de inverno”, isto é, lugar onde o “Sol” se encontra no inverno, ele deve se comportar exatamente igual ao ponto vernal, ou seja possuir a mesma velocidade angular na eclíptica. Perceba que se não fosse o caso, o ponto vernal se aproximaria do ponto “de inverno” com o tempo, fazendo com que, eventualmente, eles estivessem no mesmo lugar, resultando em uma época de Primavera e Inverno ao mesmo tempo, o que é impossível.

Analogamente, o apoastro, que denotaremos como ξ , deve se comportar da mesma forma que o periastro, visto que eles têm que ser sempre opostos em relação à estrela. Note também que, como eles são pontos característicos da órbita, eles obrigatoriamente estão contidos nela, isto é, ambos giram com velocidade angular ao longo da eclíptica.

Assim, para lidarmos com os dois movimentos (precessão dos equinócios + precessão do periastro), temos que apenas fazer uma análise cinemática simples, na qual v gira no sentido horário e ξ no sentido anti-horário. Dessa forma, podemos fazer o esquema da Figura 5:

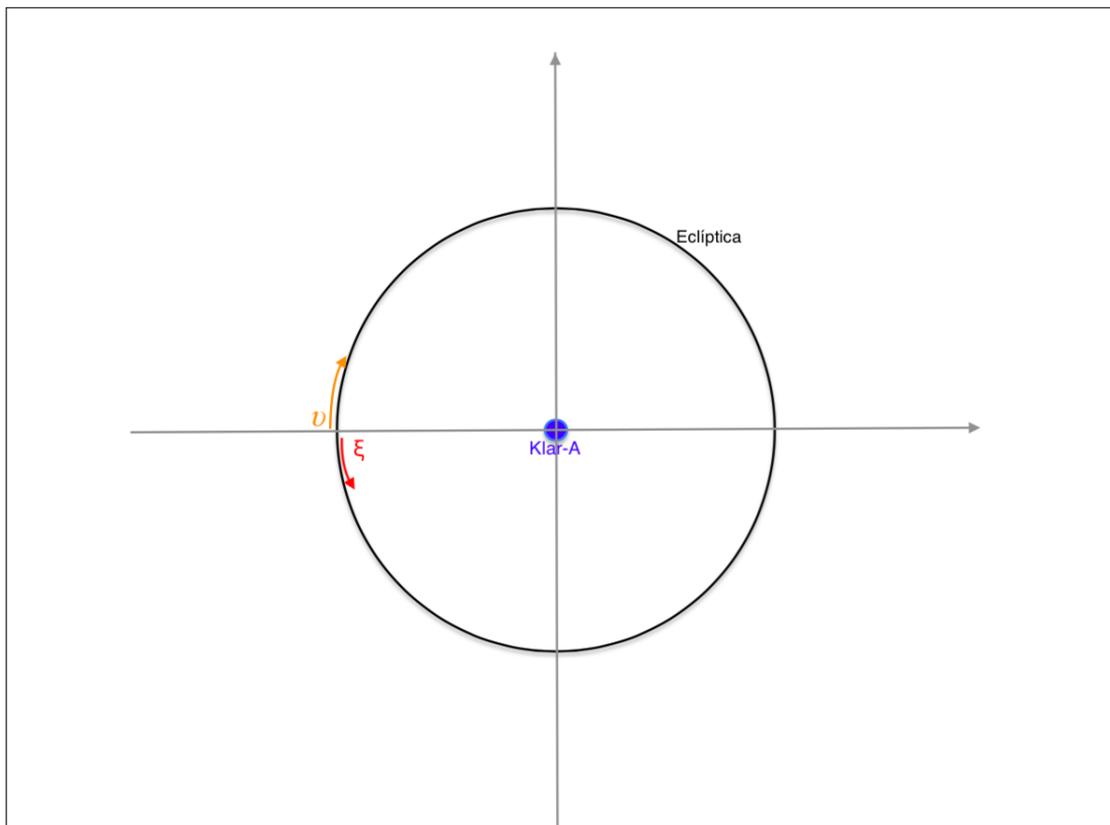


Figura 5: Esquema do movimento do ponto de solstício de inverno no HN v e o ponto correspondente à direção do apoastro ξ . A figura mostra o momento em que estes pontos estão juntos (na mesma direção) e, portanto, quando a era glacial no HN ocorre.

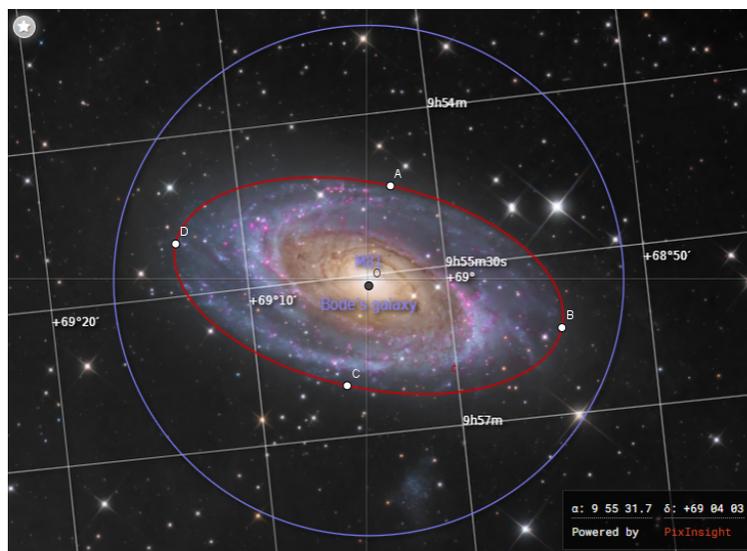
Queremos achar quando esses pontos estarão em conjunção novamente, mas isso pode ser feito tranquilamente por proporção: Em um ano v se desloca $32,4''$ e ξ se desloca $360/60000 = 0,006^\circ = 21,6''$. Dessa forma esses pontos se afastam $32,4'' + 21,6'' = 54''$ um do outro em um ano. O encontro ocorrerá quando o afastamento angular for 360° . Assim sendo, o período entre duas eras glaciais é:

$$T_{glacial} = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{54} = 24000 \text{ anos}$$

Como a última era glacial foi há 4000 anos, a próxima ocorrerá em **20000 anos**.

4. (15 pontos) A tabela a seguir traz as coordenadas dos pontos A, B, C e D, apresentados na Figura 6, que caracterizam a elipse de centro O descrita pela galáxia M81. Sabendo que Wissam Ayoub utilizou um CCD de pixels com lado $7 \mu\text{m}$ e um telescópio $f/8$ de 250mm de diâmetro, determine a quantidade de pixels ocupada pela imagem.

Ponto	Declinação	Ascensão Reta
A	$+69^\circ 02' 09''$	09h 54m 41.4s
B	$+68^\circ 54' 23''$	09h 56m 08.8s
C	$+69^\circ 05' 35''$	09h 56m 30.3s
D	$+69^\circ 13' 28''$	09h 54m 58.8s



Créditos: Wissam Ayoub.

Figura 6: M81

Solução:

Utilizando a lei dos cossenos, temos que

$$AC = \cos^{-1}(\sin \delta_A \sin \delta_C + \cos \delta_A \cos \delta_C \cos(\alpha_A - \alpha_C)) \Rightarrow AC \approx 0^{\circ}10'19''$$

$$BD = \cos^{-1}(\sin \delta_B \sin \delta_D + \cos \delta_B \cos \delta_D \cos(\alpha_B - \alpha_D)) \Rightarrow BD \approx 0^{\circ}20'5''$$

Segundo o enunciado, $R = 8$ e $D = 250mm$, portanto podemos calcular a distância focal f :

$$R = \frac{f}{D} \Rightarrow f = 2000mm = 2m$$

Conseqüentemente, a escala de placa p considerando pixels de lado $l = 7\mu m$ é dada por

$$p = \frac{206265}{f}l \Rightarrow p \approx 0,72''/pixel$$

Assumindo que o semi-eixo menor da elipse formada no CDD, em pixels, é b e o semi-eixo maior é a , podemos escrever que

$$b = \frac{AC}{p} \Rightarrow b \approx 429 pixels$$

$$a = \frac{BD}{p} \Rightarrow a \approx 834 pixels$$

Dessa forma, a área formada pela imagem é

$$S = \pi ab \Rightarrow S \approx 1,12 \cdot 10^6 pixels^2$$

Como cada pixel tem área de $1 pixel^2$, a galáxia ocupa $1,12 \cdot 10^6$ pixels.

Questões Médias

5. **(25 pontos)** Linhaça é uma astrônoma amadora. Com seu telescópio de $D_p = 70\text{ mm}$ de diâmetro no espelho primário e $D_s = 20\text{ mm}$ de diâmetro no espelho secundário, ela mede uma energia $E = 1,20 \cdot 10^{-13}\text{ J}$ em um tempo $\Delta t = 15\text{ s}$ de exposição centrada em $\lambda = 2500\text{ nm}$ e com $\Delta\lambda = 60\text{ nm}$ para a estrela Gergelim. Ela também obtém o espectro dessa estrela, onde constatou que ela possui temperatura efetiva $T = 4500\text{ K}$, e a paralaxe da estrela, que vale $p = 1,2 \cdot 10^{-3}$ segundos de arco.

(a) **(5 pontos)** Para que seja possível aplicar a lei de Rayleigh-Jeans, é necessário que os comprimentos de onda em questão sejam “grandes”, assim como ilustrado na figura 7. Mostre que comprimentos de onda vistos por Linhaça são “grandes”.

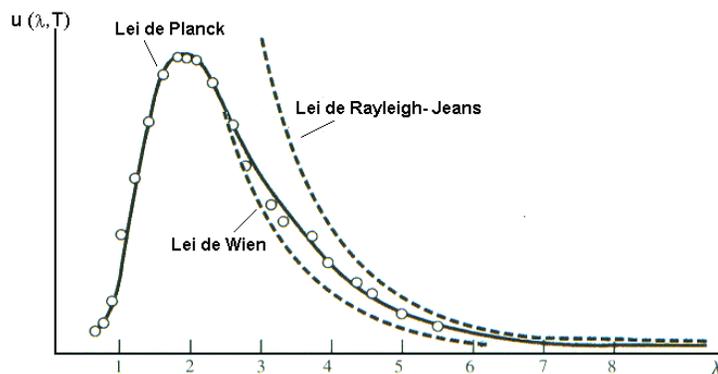


Figura 7: Lei de Rayleigh-Jeans e Lei de Wien vs Lei de Planck

- (b) **(15 pontos)** Calcule o ângulo sólido compreendido por essa estrela.
- (c) **(3 pontos)** Determine o raio da estrela em raios solares.
- (d) **(2 pontos)** Observando a Figura 8, encontre no diagrama HR a região em que Gergelim está localizada (Sequência Principal, Supergigantes, Gigantes ou Anãs brancas).

Dados:

A lei de Rayleigh-Jeans para grandes comprimentos de onda é dada por:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2k_B c T}{\lambda^4}$$

Onde B_λ é a radiância espectral de um corpo negro, i.e. $[B_\lambda] = \text{Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}$. Ela é o fluxo em uma determinada banda dividida pelo ângulo sólido de um astro e o intervalo de comprimentos de onda em questão.

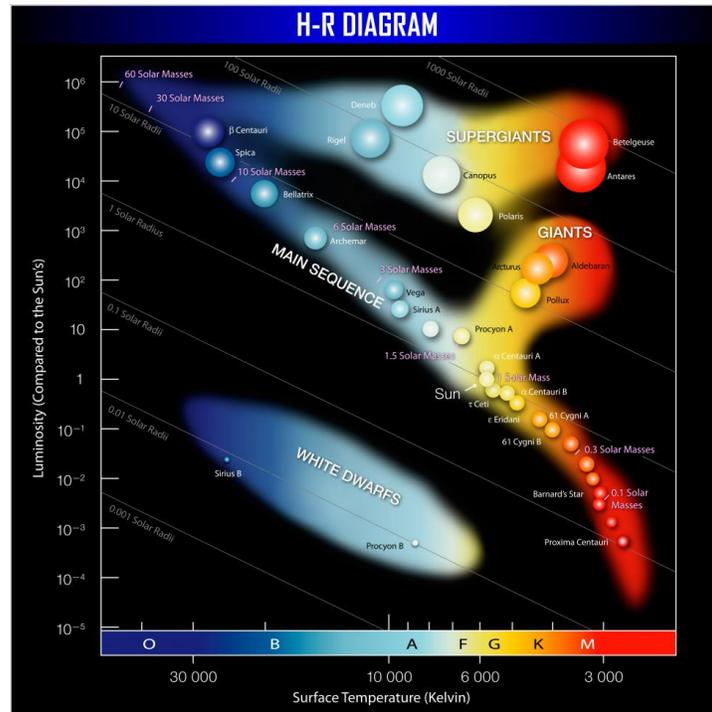


Figura 8: Diagrama HR

Solução:

a) Analisando o gráfico vemos que a Lei de Rayleigh-Jeans é uma boa aproximação apenas para comprimentos de onda bem maiores que o do pico de emissão λ_{max} .

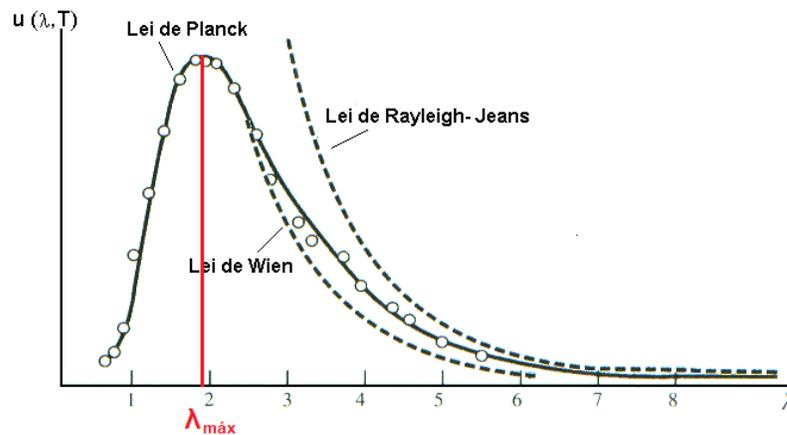


Figura 9: Pico de emissão

Calculando λ_{max} para a estrela obtemos

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \Rightarrow \lambda_{max} \approx 640 \text{ nm}$$

$$\lambda_{max} < \lambda$$

Portanto, utilizar a Lei de Rayleigh-Jeans é uma boa aproximação nesse exercício já que o comprimento de onda da observação é “grandes”.

b) A questão nos dá a seguinte definição de radiância espectral B_λ

$$B_\lambda = \frac{F}{\Omega \Delta \lambda}$$

Onde o Ω é o ângulo sólido da estrela e F o fluxo, que por sua vez é dado por

$$F = \frac{E}{A \Delta t}$$

Substituindo na equação para B_λ

$$B_\lambda = \frac{E}{\Omega \Delta \lambda A \Delta t}$$

A área A não é apenas a área do espelho primário pois o secundário oculta parte dele. Dessa forma, precisamos subtrair a área do espelho secundário da área do espelho primário

$$A = \pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{D_s}{2} \right)^2$$

$$A \approx 3,5 \cdot 10^{-3} m^2$$

Utilizando a Lei de Rayleigh-Jeans que foi dada calculamos B_λ

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2k_B c T}{\lambda^4}$$

$$B_\lambda \approx 9,5 \cdot 10^{11}$$

Substituindo os valores encontrados e dados no enunciado na definição de radiância espectral temos

$$\Omega = \frac{E}{B_\lambda \Delta \lambda A \Delta t}$$

$$\Omega \approx 3,9 \cdot 10^{-17} sr$$

c) Usando a aproximação para ângulos pequenos

$$\Omega \approx \pi \left(\frac{R}{d} \right)^2$$

Onde R é o raio da estrela e d a distância entre ela e a Terra. Como sabemos a paralaxe, a distância é dada por

$$d = \frac{1}{p} \Rightarrow d \approx 830 pc$$

Portanto,

$$R = d \sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}$$

$$R \approx 130R_{\odot}$$

d) Com a temperatura dada no enunciado e com o valor do raio, encontramos a posição da estrela no diagrama HR na região das **supergigantes**.

6. **(30 pontos)** Nesta questão, iremos demonstrar alguns importantes resultados acerca de ângulos de fase e elipses. Considere todas as órbitas em questão circulares e coplanares. O **ângulo de fase** de um planeta é o ângulo entre a Terra e o Sol medido a partir do planeta. Em outras palavras, o ângulo Terra-Planeta-Sol.

Dado: o raio da órbita de Marte é 1,52 UA.

- (a) **(2 pontos)** Encontre o ângulo de fase de Marte quando sua elongação (i.e. o ângulo Sol-Terra-Marte) vale 30° .
- (b) **(5 pontos)** Determine o maior ângulo de fase possível para Marte. Qual o valor de sua elongação nessa situação? **Dica:** não é necessário utilizar cálculo diferencial.

Uma das definições de uma elipse diz que ela pode ser obtida multiplicando todas as coordenadas y de uma circunferência por um valor constante k , assim como ilustrado no figura 10.

- (c) **(8 pontos)** Partindo dessa propriedade, demonstre que um círculo visto de perfil é uma elipse.
- (d) **(15 pontos)** Encontre uma expressão que dê a porcentagem da face iluminada ϕ de um planeta em função de seu ângulo de fase θ . Note que $\phi = 1$ é equivalente a uma “Marte Cheia”, como uma Lua Cheia.

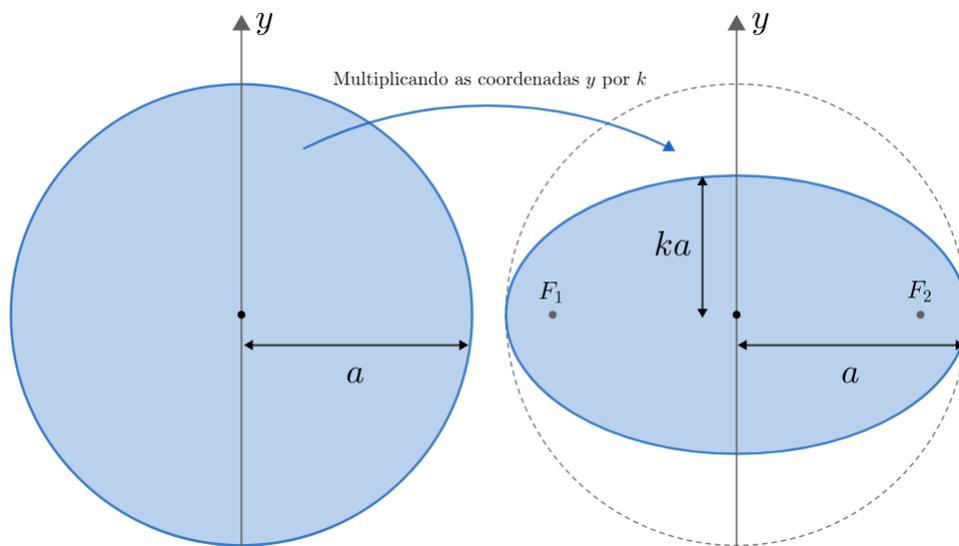


Figura 10: Ilustração da transformação entre círculo e elipse.

Solução:

a) Temos a seguinte situação:

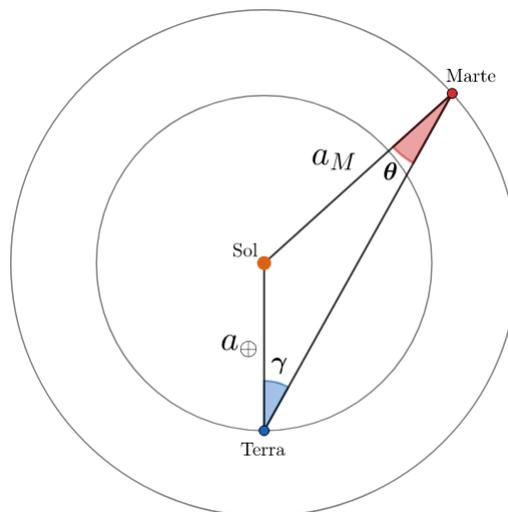


Figura 11: Órbitas da Terra e Marte em torno do Sol.

Aplicando uma lei dos senos no triângulo Sol-Terra-Marte, temos:

$$\frac{a_{\oplus}}{\text{sen } \theta} = \frac{a_M}{\text{sen } \gamma}$$

Onde $\gamma = 30^\circ$ é a elongação de Marte. Reescrevendo, podemos encontrar o ângulo de fase θ :

$$\theta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{a_{\oplus} \text{sen } \gamma}{a_M} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 19,2^\circ}$$

Como a elongação dada pelo enunciado possui somente um algarismo significativo, nossa resposta final deve ser 20° .

b) Queremos encontrar o valor de γ que maximiza θ . Já vimos que $\text{sen } \theta = \text{sen } \gamma \frac{a_{\oplus}}{a_M}$, e como a função $\text{sen}(x)$ é crescente para $0 < x < 90^\circ$ (que é o caso de θ), queremos maximizar $\text{sen } \theta$. Note que isso equivale a maximizar $\text{sen } \gamma$, e como o máximo da função seno é 1:

$$\text{sen } \gamma = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = 90^\circ}$$

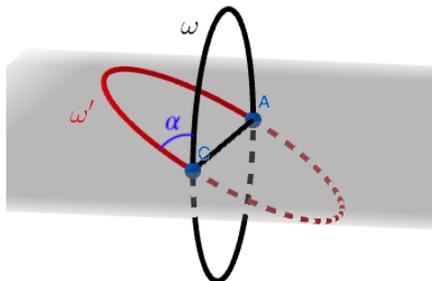
Que é a posição de quadratura! Assim, podemos facilmente encontrar θ por:

$$\theta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{a_{\oplus}}{a_M} \right)$$

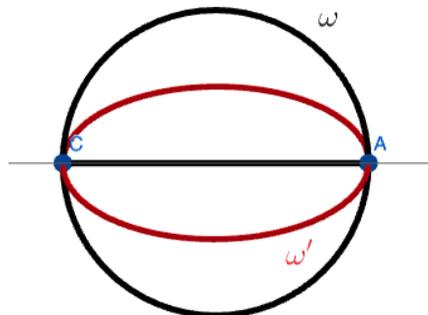
$$\Rightarrow \boxed{\theta = 41,1^\circ}$$

Novamente, de acordo com as regras dos algarismos significativos, nossa resposta final é 40° .

c) Uma circunferência vista de perfil nada mais é do que uma circunferência rotacionada sobre algum diâmetro em alguma angulação α :

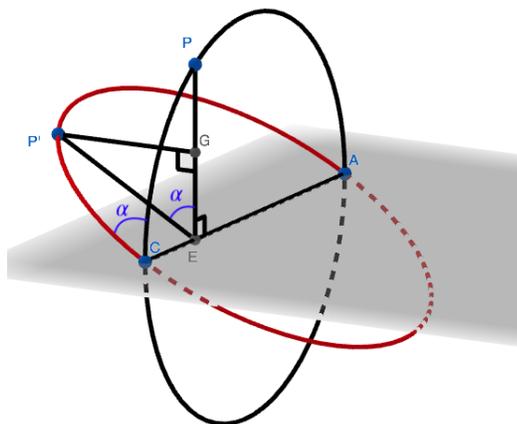


(a) Rotação da circunferência ω sobre o diâmetro \overline{CA} em α graus



(b) Visão frontal da situação.

Pegamos então um ponto P qualquer em ω e o seu correspondente P' em ω' e as devidas projeções ortogonais E (de P) e G (de P') sobre \overline{CA} e $\overline{P'E}$, respectivamente:



Vendo a Figura (b), fica claro que temos que provar que $\overline{GE} = \overline{PE} \cdot k$ (k constante) para demonstrar que ω' frontalmente é uma elipse (propriedade do enunciado). Felizmente, isso fica claro quando observamos o triângulo retângulo $P'GE$. Nele, temos $GE = PE \cdot \cos \alpha$. Já que P é um ponto arbitrário pertencente a ω , podemos concluir que o mesmo acontece com **todos pontos** da circunferência. Desse modo, $k = \cos \alpha$ e demonstramos o que queríamos.

d) Fazendo um esquema fora de escala da situação:

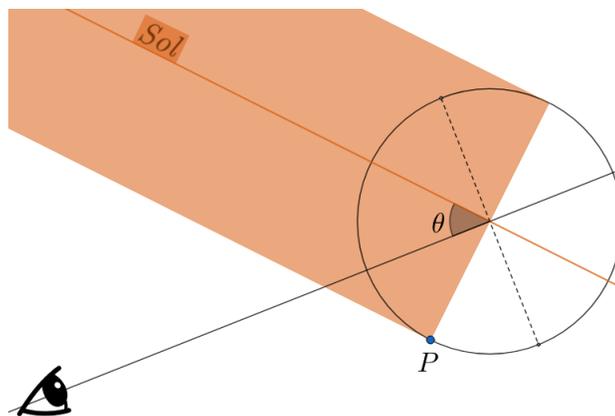


Figura 13: Marte sendo iluminada pelo Sol e vista pela Terra

Vale lembrar que os raios de luz vindos do Sol que iluminam Marte são paralelos entre si, já que a distância Sol-Marte é muito maior que o tamanho de Marte. Assim, a visão do observador terrestre é algo próximo de:

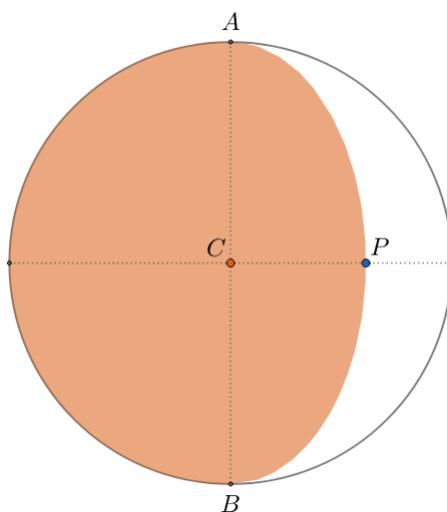


Figura 14: Visão do observador terrestre

Note que a região delimitada pelos pontos A , B e P é, de acordo com o que vimos no último item, uma (semi)elipse. Assim, sendo R_M o raio de Marte, a porcentagem de área iluminada ϕ é:

$$\phi = \frac{\frac{\pi R_M^2}{2} + A_{ABP}}{\pi R_M^2}$$

Para encontrarmos A_{ABP} , precisamos encontrar os semieixo maior e menor da elipse. Evidentemente, o semieixo maior é o próprio raio de Marte. Agora, para encontrarmos o semieixo menor CP , precisamos analisar a seguinte imagem:

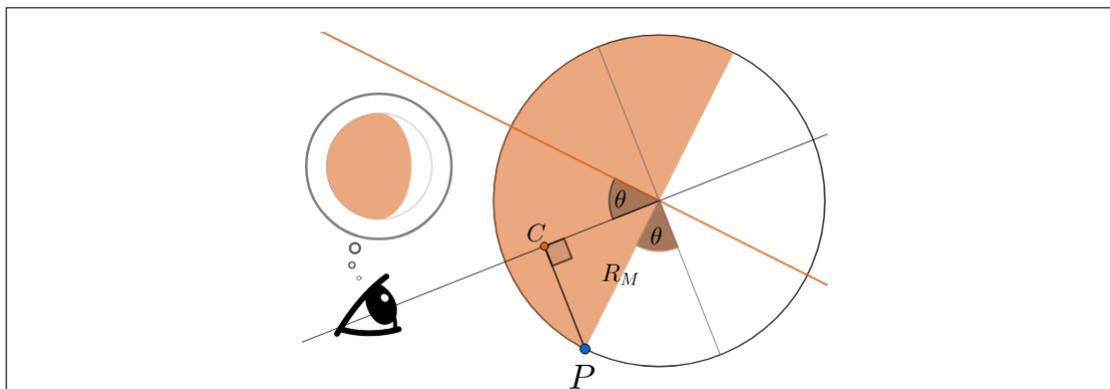


Figura 15: Achando A_{ABP}

Note:

$$\text{sen}(90^\circ - \theta) = \frac{CP}{R_M}$$

Como $\text{sen}(90^\circ - x) = \cos x$, temos que $CP = R_M \cos \theta$. Assim, a área A_{ABP} é:

$$A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \pi(R_M)(R_M \cos \theta)$$

Juntando tudo:

$$\phi = \frac{\frac{\pi R_M^2}{2} + \frac{\pi R_M^2 \cos \theta}{2}}{\pi R_M^2}$$

Felizmente, podemos cortar o raio de Marte e encontrar:

$$\phi = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

7. (30 pontos) O efeito Rossiter-McLaughlin descreve a variação do redshift de um astro quando um outro objeto passa em frente a sua face visível, assim como ilustrado na imagem a seguir.

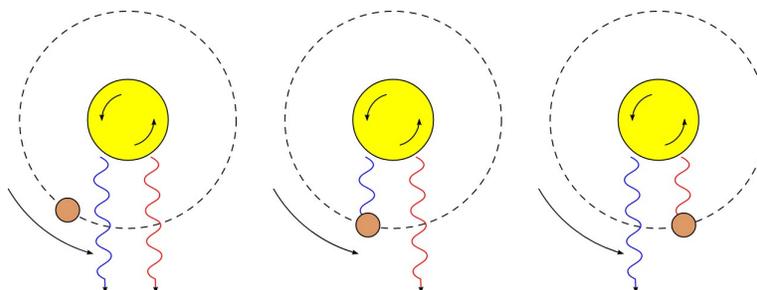
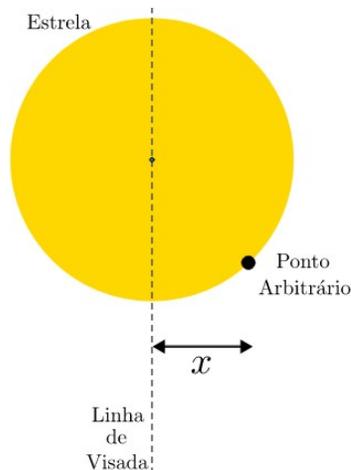


Figura 16: Efeito Rossiter-McLaughlin. O observador está situado na parte inferior da imagem.

Nesta questão, iremos analisar um modelo simplificado do efeito Rossiter-McLaughlin para encontrarmos a velocidade angular de rotação de uma estrela orbitada por um exoplaneta. Considere

que a inclinação orbital do sistema é 90° . Além disso, a Lei de Hubble não deve ser desprezada.

- (a) **(2 pontos)** Encontre uma expressão da velocidade radial ao longo do equador da estrela como função da coordenada x ilustrada na figura abaixo, de sua velocidade angular ω , de sua distância d até a Terra e da constante de Hubble H_0 . Novamente, o observador está situado na parte inferior da imagem.



Esse comportamento não é observado nas medições feitas da Terra por limitações técnicas, fazendo com que a velocidade radial medida seja um valor médio com relação à coordenada x sobre o equador. Agora, vamos analisar a influência de um exoplaneta nesse cálculo.

- (b) **(4 pontos)** Sabendo que o fluxo cai para $\frac{3}{4}$ de seu valor original durante o trânsito do exoplaneta, calcule a razão entre os raios do exoplaneta e da estrela.

Nos próximos dois itens, considere que a massa do exoplaneta é desprezível e que sua órbita é no sentido anti-horário quando vista acima da linha de visada da Terra.

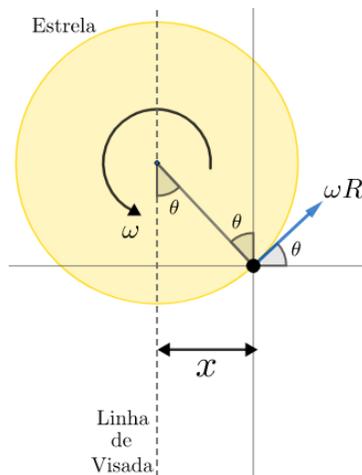
- (c) **(2 pontos)** Esboce o gráfico da velocidade radial no equador da estrela como função de x e calcule o valor médio da velocidade radial com relação à x .
- (d) **(8 pontos)** Quando o exoplaneta inicia seu trânsito, eventualmente ele fica inteiramente imerso na região da estrela. Nesse instante, a velocidade radial média observada no equador da estrela vale v_{r1} . Além disso, tal valor imediatamente antes do exoplaneta começar a deixar a região da estrela é v_{r2} . Sabendo que $\frac{v_{r1}}{v_{r2}} = 0,80$, que o raio da estrela vale $1R_\odot$ e que $d = 1,2Mpc$, encontre a velocidade angular da estrela (tanto o módulo quanto o sentido).

Agora, considere que a densidade do exoplaneta é a mesma da estrela, i.e. sua massa não pode ser desprezada, e, novamente, que sua órbita é no sentido anti-horário quando vista acima da linha de visada da Terra.

- (e) **(14 pontos)** Quando o exoplaneta inicia seu trânsito, eventualmente ele fica inteiramente imerso na região da estrela. Nesse instante, a velocidade radial média observada no equador da estrela vale v'_{r1} . Além disso, tal valor imediatamente antes do exoplaneta começar a deixar a região da estrela é v'_{r2} . Sabendo que $\frac{v'_{r1}}{v'_{r2}} = 0,80$, que o raio da estrela vale $1R_\odot$, que $d = 1,2Mpc$, e que, **em módulo**, a velocidade angular da órbita do exoplaneta é a mesma da rotação da estrela, encontre a velocidade angular da estrela (tanto o módulo quanto o sentido).

Solução:

a) Convencionando a velocidade de rotação da estrela como positiva no sentido anti-horário, temos a seguinte figura:



Assim, note que a componente radial da velocidade de rotação na superfície da estrela é $\omega R \sin \theta$. Entretanto, podemos ver que $\sin \theta = \frac{x}{R}$, logo, levando em conta a incremento proveniente da lei de Hubble:

$$v_r(x) = H_0 d + \omega x$$

b) Sem trânsito, o fluxo recebido na Terra é:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi d^2} 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Durante o trânsito do exoplaneta, o fluxo cai para:

$$F' = \frac{1}{4\pi d^2} 4\pi (R^2 - r^2) \sigma T^4$$

Onde r é o raio do exoplaneta. Assim, temos:

$$\frac{F'}{F_0} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Realizando os cálculos, obtemos $r = \frac{R}{2}$

c) Note que a função $v_r(x)$ é uma **reta** de coeficiente linear $H_0 d$ e coeficiente angular ω . Assim:

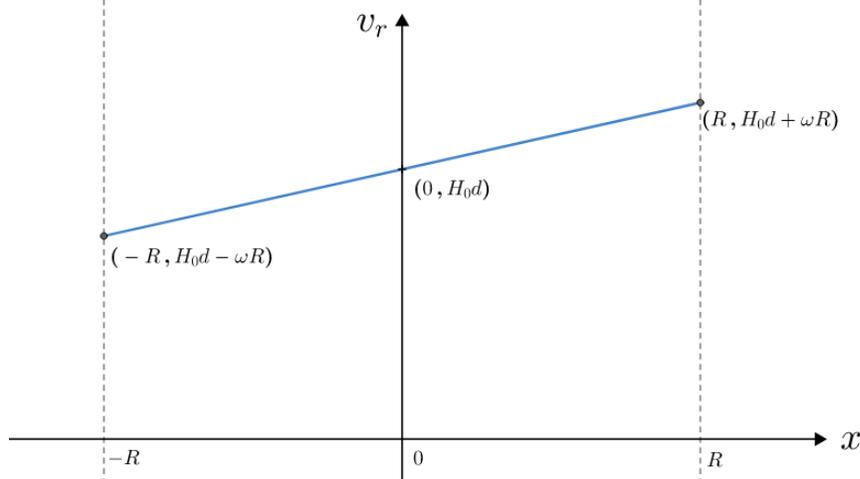
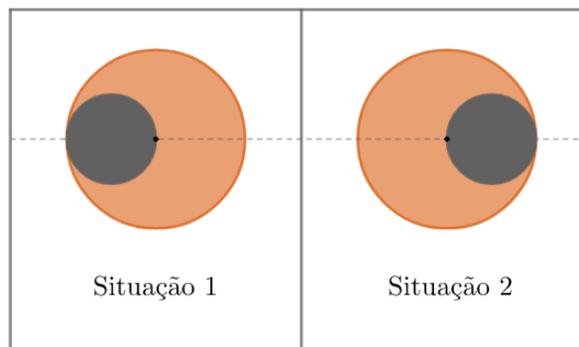


Figura 17: Gráfico 1

Como o gráfico é linear e simétrico, o valor médio da velocidade radial é H_0d . Isso explica porque não conseguimos encontrar a velocidade angular de uma estrela quando não há o trânsito de um exoplaneta, ao menos por este método.

d) Vamos chamar as situações descritas no enunciado de 1 e 2, respectivamente. A imagem abaixo ilustra tais situações:



Na situação 1, só recebemos luz da estrela para as coordenadas $0 < x < R$. Assim, de acordo com o gráfico 17, a velocidade radial média é:

$$v_{r1} = \frac{H_0d + (H_0d + \omega R)}{2} = H_0d + \frac{\omega R}{2}$$

Analogamente, a velocidade radial média na situação 2 é:

$$v_{r2} = \frac{(H_0d - \omega R) + H_0d}{2} = H_0d - \frac{\omega R}{2}$$

Assim:

$$\frac{v_{r1}}{v_{r2}} = \frac{2H_0d + \omega R}{2H_0d - \omega R}$$

Chamando a razão $\frac{v_{r1}}{v_{r2}}$ de k , temos:

$$2kH_0d - k\omega R = 2H_0d + \omega R \Rightarrow \omega = \frac{2H_0d(k-1)}{R(k+1)}$$

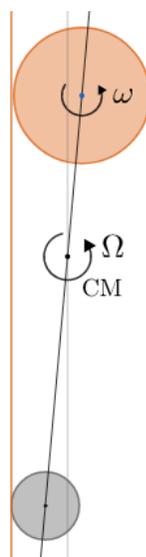
$$\Rightarrow \boxed{\omega = -2,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}}$$

e) Como o exoplaneta possui a mesma densidade da estrela e seu raio é $r = \frac{R}{2}$, podemos encontrar a razão entre as massas do exoplaneta (m) e da estrela (M):

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Leftrightarrow \frac{M}{R^3} = \frac{m}{\frac{8}{8}R^3}$$

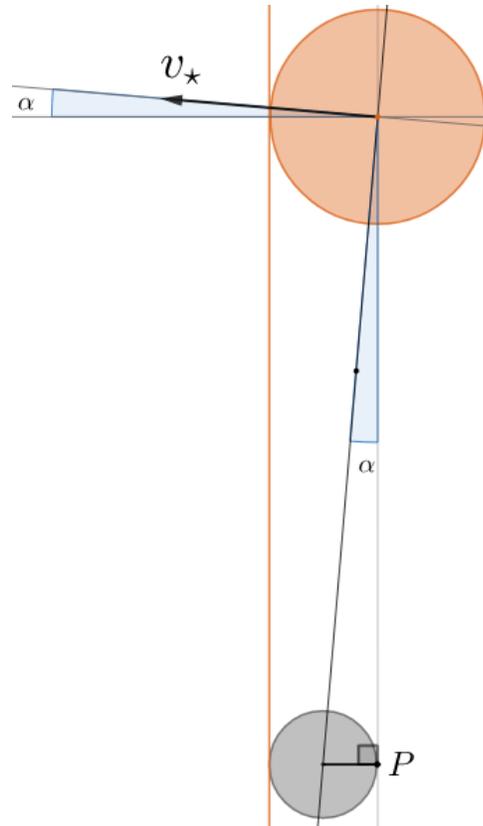
$$\therefore m = \frac{M}{8}$$

Na situação 1, temos a seguinte imagem:



Novamente, estamos convencionando a velocidade angular de rotação da estrela como positiva no sentido anti-horário. Note também que $|\Omega| = |\omega|$.

Note que a velocidade da estrela em torno do centro de massa também influencia a velocidade radial média. Sendo $v_{\star} = \Omega a_{\star}$, onde a_{\star} é a distância entre o CM e a estrela, a velocidade radial média recebe um incremento $\Delta v_{\star r} = v_{\star} \sin \alpha$, onde α pode ser encontrado por:



No triângulo retângulo cujos vértices são os centros da estrela e do exoplaneta e o ponto P , temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{r}{a}$$

Onde $a = a_* + a_{exo}$ é a distância entre o exoplaneta e a estrela. Juntando tudo, podemos encontrar Δv_{*r} :

$$\Delta v_{*r} = v_* \text{sen } \alpha = \Omega a_* \frac{R}{2(a_* + a_{exo})} = \frac{\Omega R}{2 \left(1 + \frac{a_{exo}}{a_*}\right)}$$

Entretanto, pela propriedade do centro de massa, $ma_{exo} = Ma_*$ $\Rightarrow \frac{a_{exo}}{a_*} = \frac{M}{m} = 8$. Assim:

$$\Delta v_{*r} = \frac{\Omega R}{18}$$

Assim:

$$v'_{r1} = H_0 d + \frac{\omega R}{2} + \frac{\Omega R}{18}$$

e

$$v'_{r2} = H_0 d - \frac{\omega R}{2} - \frac{\Omega R}{18}$$

Como $|\Omega| = |\omega|$, $\omega = \Omega$ (ω no sentido anti-horário) ou $\omega = -\Omega$ (ω no sentido horário). Vamos testar cada caso.

(I) $\omega = \Omega$:

$$k = \frac{v'_{r1}}{v'_{r2}} = \frac{H_0 d + \frac{5}{9} \Omega R}{H_0 d - \frac{5}{9} \Omega R}$$

Rearranjando:

$$\Omega = \frac{9H_0 d(k-1)}{5R(k+1)} < 0$$

O que não faz sentido, uma vez que isso está dizendo que Ω está no sentido horário para $k = 0,3$, apesar do enunciado dizer o contrário.

(II) $\omega = -\Omega$:

$$k = \frac{v'_{r1}}{v'_{r2}} = \frac{H_0 d - \frac{4}{9} \Omega R}{H_0 d + \frac{4}{9} \Omega R}$$

Rearranjando:

$$\Omega = \frac{9H_0 d(1-k)}{4R(1+k)} > 0$$

O que está de acordo com o que foi dito pelo enunciado! Realizando as devidas contas, obtemos $\Omega = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$. Assim:

$$\omega = -2,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

8. **(35 pontos)** Em uma realidade alternativa, todos na Terra acreditam que a Terra é plana. Você, como um bom astrônomo, sabe que isso não passa de uma mentira da ASAN para vender pratos do nosso planeta. Assim, para provar que todos estão errados, você decide transmitir a imagem de sua câmera em um lançamento, para mostrar a curvatura da Terra. Porém, é necessário que você faça os cálculos sobre sua órbita.

Primeiramente, é importante calcularmos alguns parâmetros comuns sobre a variação de altura.

- (a) **(2 pontos)** Dado um observador a uma altura h da superfície da Terra, qual sua distância D até o horizonte? Considere que a Terra é uma esfera de raio R .

Perceba que não especificamos nenhuma direção, então o horizonte é essencialmente o conjunto de pontos na superfície da Terra a uma distância D do observador.

- (b) **(3 pontos)** Outra informação importante é o quanto o horizonte se inclinou, que chamaremos de φ , como pode ser visto na Figura 18. Calcule φ em função do raio da Terra e a altura h do observador.

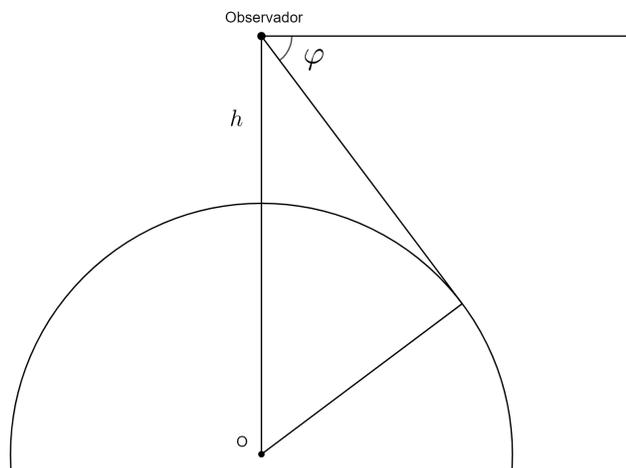


Figura 18: Inclinação do horizonte, dada uma altura h .

Agora, podemos começar a definir parâmetros não tão comuns. Essencialmente, queremos descobrir como a curvatura do horizonte depende da sua altura. Para isso, precisamos convencionar como vamos medir quão curvado ele está. A Figura 19 traz uma foto da vista de um passageiro. Com ela, podemos criar uma intuição do que é interessante medir.



Figura 19: Bela vista em um avião.

Note que o horizonte vai se curvando a medida que chega no canto da foto. Assim, vemos que a medição mais prática que podemos fazer é ver o quão pra baixo o chão está no canto da foto, chamaremos esse ângulo de δ , como pode ser visto na figura 20.

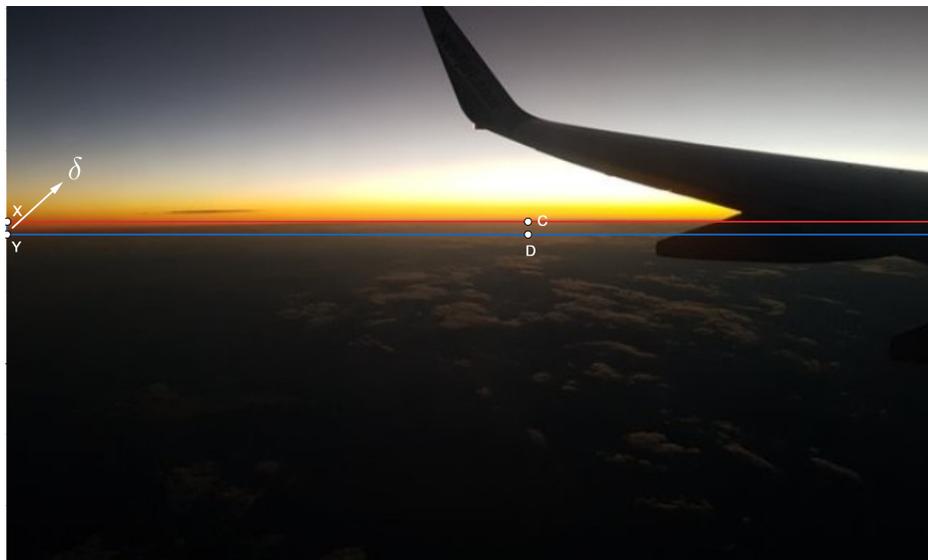


Figura 20: Definimos δ como o tamanho angular de XY .

Ainda, perceba que δ pode ser encontrado como o tamanho angular de XY , que é igual ao tamanho angular de CD (isso será útil para calculá-lo).

A geometria agora começa a ficar mais difícil, pois a situação é tridimensional. A Figura 21 traz a situação vista de longe.

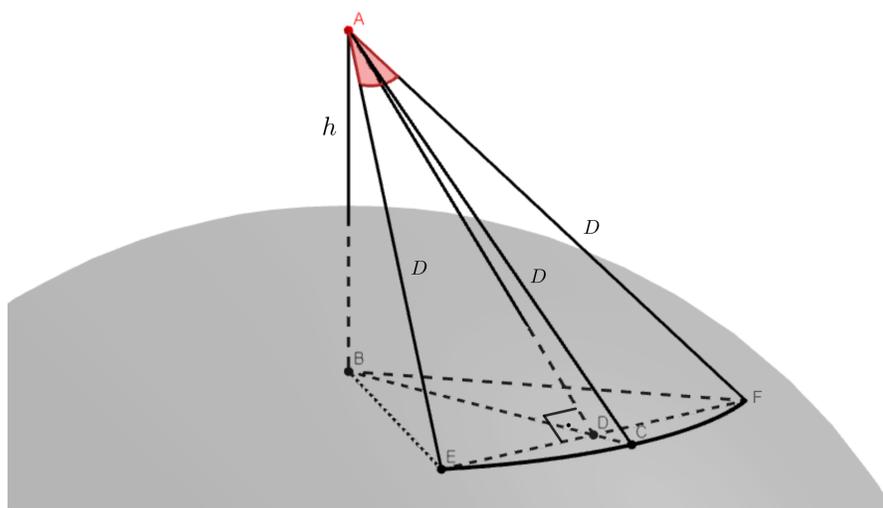


Figura 21: Esquemática do problema. Perceba que A é o observador.

O arco em preto é simplesmente o horizonte, ou seja, $AE = AC = D$. O ângulo em vermelho é o campo de visão da câmera (note que se na figura 19 tivéssemos um FOV maior, o δ aumentaria), que definimos como $\alpha = m(\widehat{EAF})$. Vale ressaltar que os pontos A, D, E e F são coplanares.

(c) (5 pontos) A partir da Figura 21 calcule AD , em função de α e D .

Finalmente, como já discutido, δ pode ser calculado como o tamanho angular de CD . Olhando o plano do triângulo ABC , podemos construir a seguinte figura:

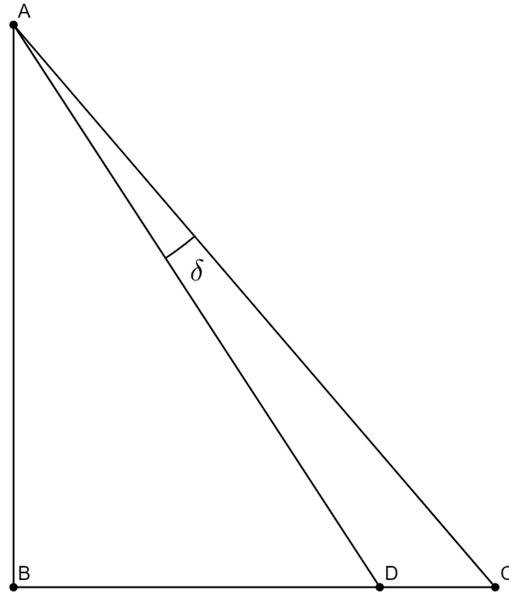


Figura 22: Configuração no plano de ABC.

- (d) **(12 pontos)** Com todas informações apresentadas e calculadas, encontre a curvatura δ do horizonte em função de α e φ .

Bom, agora que sabemos a dependência da curvatura do horizonte com a altura, estamos pronto para lançar nossa órbita!

- (e) **(13 pontos)** O plano é que a nossa câmera vá do Polo Sul até o Polo Norte, sendo que em algum momento você consiga transmitir uma curvatura de pelo menos 15° . Assim, determine a velocidade mínima de lançamento para que isso seja possível, sabendo que o campo de visão de sua câmera é 40° .

Solução:

a) Por serem construções conhecidas, passaremos rápido por esses dois itens. Pela Figura 18 é fácil de ver que:

$$(R_T + h)^2 = D^2 + R_T^2, \text{ onde } R_T \text{ é o raio da Terra.}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{h^2 + 2hR_T}$$

b) Pela definição do enunciado,

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)$$

c) Apesar do desenho complexo, esse item é bem simples, principalmente mais se utilizarmos os dados do enunciado de maneira correta. Como dito, os pontos A , D , E e F são coplanares, portanto podemos desenhá-los facilmente como mostrado na figura 23. Ainda, sabemos que $\alpha = m(\widehat{EAF})$, logo:

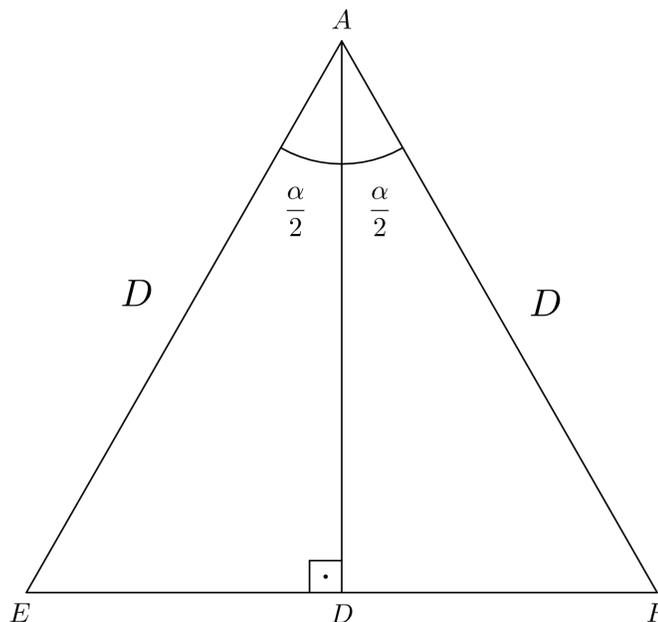


Figura 23: Configuração no plano do triângulo AEF .

Agora, fica uma geometria bem simples e facilmente encontramos que:

$$AD = D \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

d) Um olhar imediato na Figura 22 nos faz achar que falta informação. Temos o lado AD e AC e mais nada, como podemos encontrar o δ ? É aí que se aproveitar do enunciado se torna útil; ele disse que a resposta final tem que ficar em função de φ , então de alguma forma ele tem que aparecer em nosso triângulo. Uma simples olhada na Figura 18 já nos dá o que procuramos. Com ela, é fácil de ver que se traçarmos uma reta horizontal em A , o ângulo

formado com o segmento \overline{AC} é φ . Ainda, como a reta será paralela ao lado \overline{DC} , vemos que $m(\hat{ACD}) = \varphi$ também! Dessa forma, chegamos na figura:

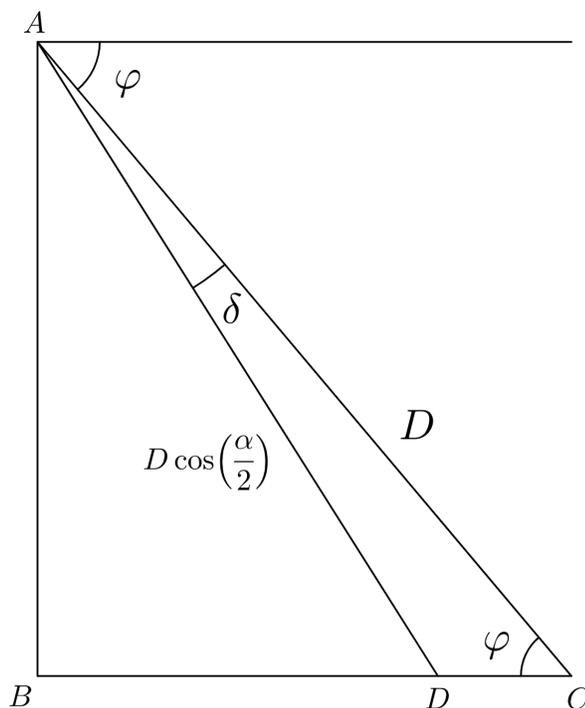


Figura 24: Ilustração do problema com todos dados que temos.

Infelizmente, não podemos aplicar uma Lei dos Senos diretona, temos que usar a mesma estratégia utilizada no [Problema 1](#) e definir o ângulo $m(\hat{ADC}) = \gamma = 180^\circ - (\delta + \varphi)$. Logo,

$$\frac{D}{\text{sen } \gamma} = \frac{D \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen } \varphi} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}(\delta + \varphi)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen } \varphi} \quad (1)$$

Perceba que o lado direito da equação está em função de dados que temos. Assim, podemos tirar o arco seno dos dois lados para isolar nosso δ . Portanto, chegamos em,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta + \varphi) &= \frac{\text{sen } \varphi}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \delta + \varphi = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\text{sen } \varphi}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \\ \Rightarrow \delta &= \text{sen}^{-1}\left(\frac{\text{sen } \varphi}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) - \varphi \end{aligned}$$

OBS: note que quando passamos o arco seno, não discutimos se era necessário escrever $180^\circ - \text{sen}^{-1}$. Isso se dá pelo fato de que $\delta + \varphi$ é sempre menor que 90° para o nosso problema. Dessa forma, como a função arco seno satisfaz a condição $0^\circ \leq \text{sen}^{-1}(x) \leq 90^\circ$ (para $x \geq 0$), o resultado está correto. Caso isso não tenha ficado muito claro, uma discussão mais bem explicada sobre isso se encontra na nossa [aula de resolução do simulado](#) do minuto 1:11:30 até 1:16:30 (durante meu comentário cometi um leve erro quando escrevi “ $\text{sen}^{-1}(x) \rightarrow 0^\circ < x < 90^\circ$ ”, mas já arrumei no pdf da aula).

e) Primeiro, veja que se nossa órbita vai do Polo Sul até o Polo Norte (pontos opostos em relação ao centro da Terra), ela será simétrica em relação à mediatriz dos Polos. Assim, já conseguimos ver que o semilatus rectum de nossa trajetória será $p = R_T$ (a construção desse exercício é muito parecida com o exercício 7 da [Lista \$\gamma\$](#)).

Com isso, temos que determinar outro ponto da nossa órbita para que possamos calcular seus parâmetros. Precisamos utilizar a condição do enunciado para nos orientar. Ele pede a velocidade mínima para que nosso plano seja um sucesso. Como fazer isso? Lembre que, pela equação Vis-Viva, temos que quanto menor a velocidade de lançamento, menor será o semi-eixo maior. Ou seja, para minimizar a velocidade temos que tornar nossa órbita “pequena”.

Para isso, vamos fazer um rápido pensamento. Seja H a altura que faz com que tenhamos $\delta = 15^\circ$. Se a velocidade for muito baixa, nenhum ponto dessa órbita terá essa distância do centro da Terra. Entretanto, se a aumentarmos gradativamente, em algum momento terá **exatamente** um ponto que satisfaz isso (também poderíamos ter usado o raciocínio reverso; se a velocidade fosse alta demais teriam 2 pontos e poderíamos diminuí-la até que se tornasse um ponto). Mas que ponto é esse? Ora, se há apenas um ponto que possui distância H da superfície da Terra, este deve ser o ponto mais distante ou o mais próximo. Obviamente, $H > R_T$, então concluímos que o lugar onde $\delta = 15^\circ$ deve ser o **apogeu** da órbita! Dessa forma, chegamos na configuração:

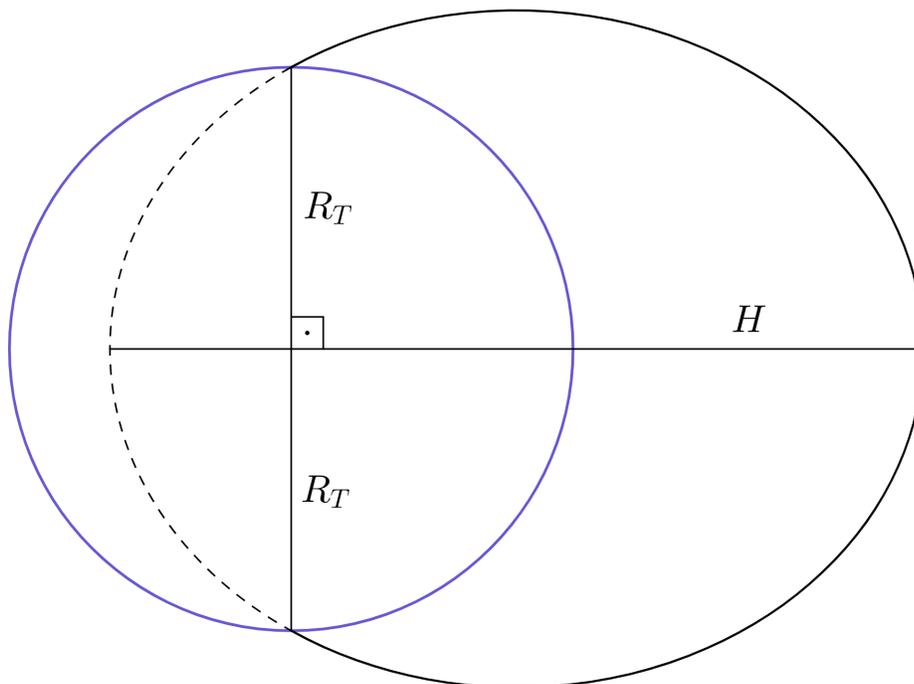


Figura 25: Ilustração do problema. Perceba que o apogeu não é H , mas sim $R_T + H$.

Diante do que discutimos, podemos enfim encontrar o valor de H . Pela Equação (1), podemos isolar o φ :

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\text{sen}(\delta + \varphi)}{\text{sen } \varphi} \Rightarrow \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\text{sen } \delta \cos \varphi}{\text{sen } \varphi} + \frac{\cancel{\text{sen } \varphi} \cos \delta}{\cancel{\text{sen } \varphi}}$$

Fazendo um desenvolvimento parecido com o Problema 1 novamente, temos:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{sen } \delta}{\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \cos \delta} \right) = 69,2^\circ$$

Com φ , é fácil encontrar H :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{R_T}{R_T + H} \Rightarrow H = \frac{R_T}{\cos \varphi} - R_T \\ &\Rightarrow H = 11\,580\text{km} \end{aligned}$$

Agora, basta resolver o sistema de equações para encontrar o semi eixo maior:

$$\begin{cases} p = a(1 - e^2) = R_T & \text{(I)} \\ a(1 + e) = R_T + H & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo a equação (I) pela (II):

$$1 - e = \frac{R_T}{R_T + H} \Rightarrow e = 1 - \frac{R_T}{R_T + H}$$

Substituindo em (II),

$$\begin{aligned} a \left(2 - \frac{R_T}{R_T + H} \right) &= R_T + H \Rightarrow a = \frac{R_T + H}{2 - \frac{R_T}{R_T + H}} \\ &\Rightarrow a = 10\,912\text{km} \end{aligned}$$

Finalmente, usando a Vis-Viva:

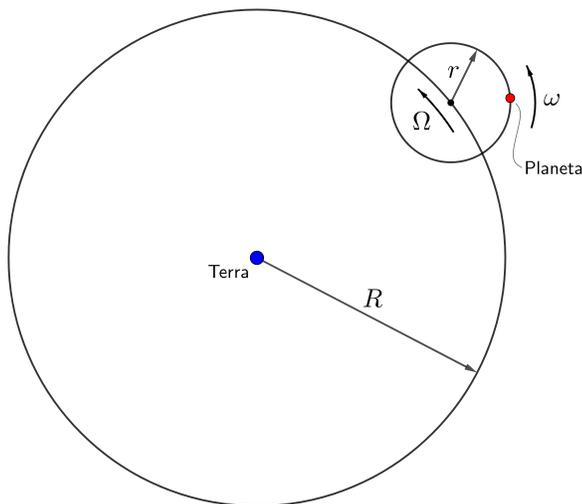
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{R_T} - \frac{1}{a} \right)} \\ &\Rightarrow \boxed{v = 9,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

OBS: um site muito bacana para visualizar essa curvatura que eu encontrei quando estava criando essa questão é [esse aqui](#), o δ que calculamos no exercício é o “Left-Right Drop Angle” na parte de “Horizon Data”. Note que caso você queira testar se os valores conferem, é necessário se atentar que o “View” do site não é igual ao nosso α , mas sim $\theta = \alpha\sqrt{1 + 1/1,5^2}$. Então, no caso do exercício de $\alpha = 40^\circ$, seria necessário colocar no site $\theta \approx 48,07^\circ$. Além disso, o site também mostra como eles calculam o δ , mas perceba que o jeito deles é bem burrão e longo. De qualquer forma, o site é [esse](#) caso alguém queira ver por curiosidade.

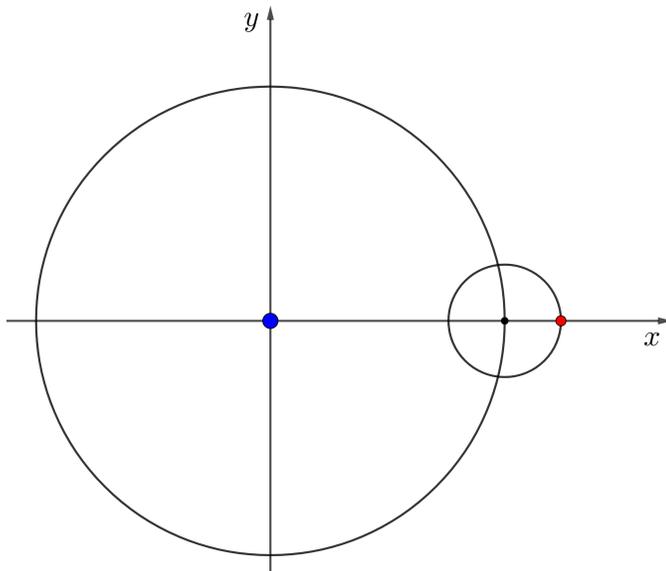
Questões Longas

9. **(60 pontos)** O epiciclo foi um modelo geométrico criado por Ptolomeu que foi usado para explicar as variações de velocidade e direção do movimento aparente da Lua, do Sol e dos planetas.

Aqui consideraremos que o modelo de Ptolomeu é um modelo geocêntrico em que a órbita de um planeta é composta por uma circunferência de raio R centrada na Terra na qual há um ponto com velocidade angular Ω que é o centro de uma outra circunferência de raio r ($r < R$) na qual o planeta rotaciona com velocidade angular ω , conforme ilustrado na imagem abaixo:



Para os itens a seguir, é conveniente definir os eixos x e y de tal maneira que a Terra esteja na origem do sistema de coordenadas e que no instante $t = 0$ o planeta se encontre no ponto $(R + r, 0)$, como na imagem abaixo:



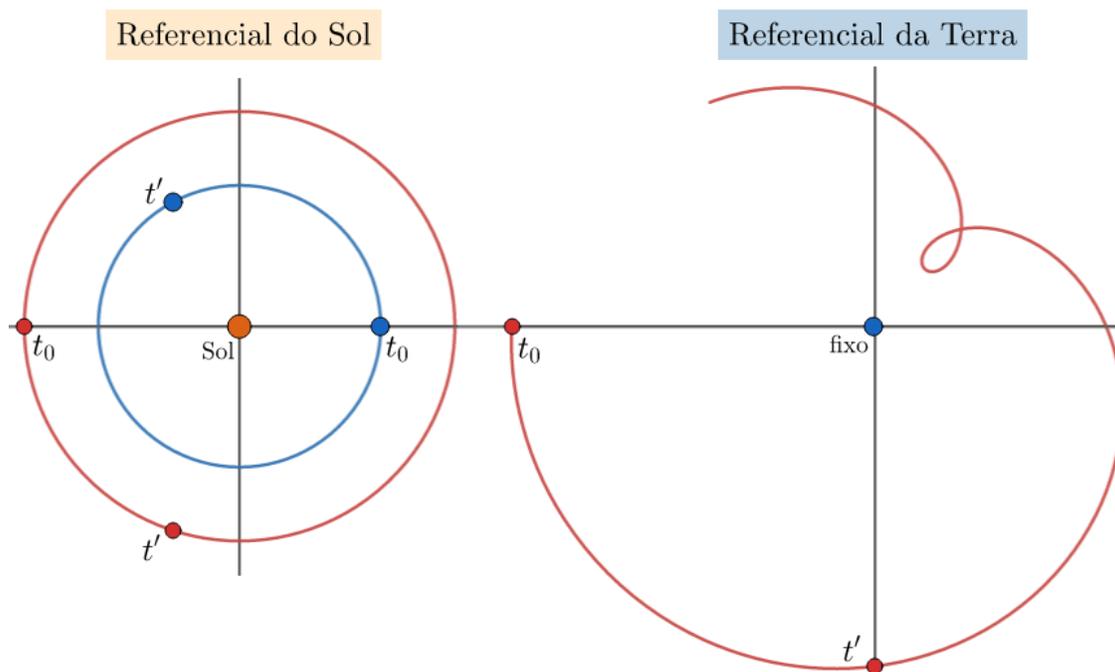
- (5 pontos)** Prove que se $\omega = 0$ a trajetória descrita pelo planeta no referencial da Terra é uma circunferência com centro deslocado da origem.
- (3 pontos)** Encontre o raio L da circunferência formada pela trajetória descrita no item anterior e as coordenadas (x_c, y_c) de seu centro.

É possível mostrar que se $\omega = -\Omega$, ou seja, se o planeta possuir velocidade angular de módulo igual a Ω e rotacionar no sentido oposto, então a trajetória descrita pelo planeta no referencial da Terra é uma elipse centrada na Terra de semieixo maior a e semieixo menor b .

- (c) (7 pontos) Encontre a e b .
- (d) (8 pontos) Para esse caso da trajetória elíptica ($\omega = -\Omega$), calcule a velocidade angular máxima w_{max} e mínima w_{min} do planeta em relação à Terra.
- (e) (12 pontos) Ainda considerando o caso da trajetória elíptica, encontre a função $x(t)$ da coordenada x do planeta em um determinado tempo t e esboce seu gráfico.

Quando criado, umas das principais vantagens do modelo de epiciclos é que ele explicava o movimento retrógrado de Marte, o qual não era previsto no modelo geocêntrico tradicional (Marte realizando uma órbita circular centrada na Terra). Nesse sentido, vamos analisar algumas propriedades de tal movimento.

- (f) (3 pontos) A imagem abaixo mostra as órbitas, consideradas circulares, da Terra (em azul) e de Marte (em vermelho), nos referenciais do Sol e da Terra. Esboce a figura da direita em sua folha de resolução e aponte os momentos de início e fim do movimento retrógrado de Marte. Indique também o valor da velocidade tangencial de Marte no referencial da Terra em tais instantes.



- (g) (7 pontos) Encontre uma relação entre os parâmetros R , r , Ω e ω , os quais foram descritos anteriormente, para que exista movimento retrógrado.
- (h) (15 pontos) Sendo $R = 10$ UA, $r = 3$ UA, $\Omega = 2$ rad/ano e $\omega = 4$ rad/ano, esboce a órbita do planeta nos primeiros 10 anos. Caso exista movimento retrógrado, indique também quantas vezes ele ocorre durante tal período.

Solução:

a) Para que as coordenadas do planeta (x_p, y_p) descrevam uma circunferência, devemos ter que:

$$(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 = \text{cte.}$$

Chamaremos o centro da circunferência menor de ponto $A = (x_A, y_A)$. Sabemos que esse ponto irá percorrer a circunferência maior de raio R , cuja equação é dada por:

$$x_A^2 + y_A^2 = R^2$$

Além disso, como o planeta permanecerá estático em relação ao ponto A (afinal $\omega = 0$), percebe-se que o planeta terá sempre a mesma coordenada y do ponto A e uma coordenada x igual à do ponto A somada a r , ou seja:

$$\begin{cases} x_p = x_A + r \\ y_p = y_A \end{cases}$$

Logo, substituindo as coordenadas x_A e y_A da equação mostrada anteriormente, obtemos:

$$x_A^2 + y_A^2 = R^2 \Rightarrow (x_p - r)^2 + y_p^2 = R^2$$

que é a equação de uma circunferência!

b) Mostramos no item anterior que a equação da trajetória circular descrita pelo planeta nesse caso é:

$$(x_p - r)^2 + (y_p - 0)^2 = R^2$$

Comparando com a equação geral de uma circunferência $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = L^2$, em que L é seu raio e (x_c, y_c) é o ponto do centro da circunferência, podemos concluir que:

$$L = R$$

$$(x_c, y_c) = (r, 0)$$

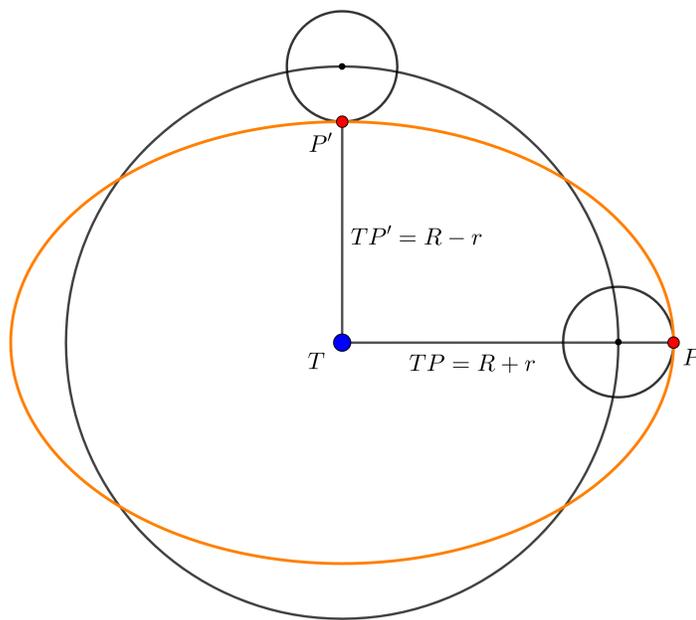
Neste [link](#) você pode acessar uma animação da trajetória circular percorrida caso queira visualizar melhor a situação.

c) Como o enunciado informa que a elipse possui o centro na origem, podemos concluir que o semieixo maior da elipse será a maior distância possível da Terra até o planeta, enquanto que o semieixo menor será a menor distância possível da Terra até o planeta.

É fácil notar que a maior distância entre a Terra e o planeta é $R + r$ e a menor é $R - r$. Portanto, concluímos:

$$a = R + r \quad \text{e} \quad b = R - r$$

A imagem abaixo ilustra a elipse:

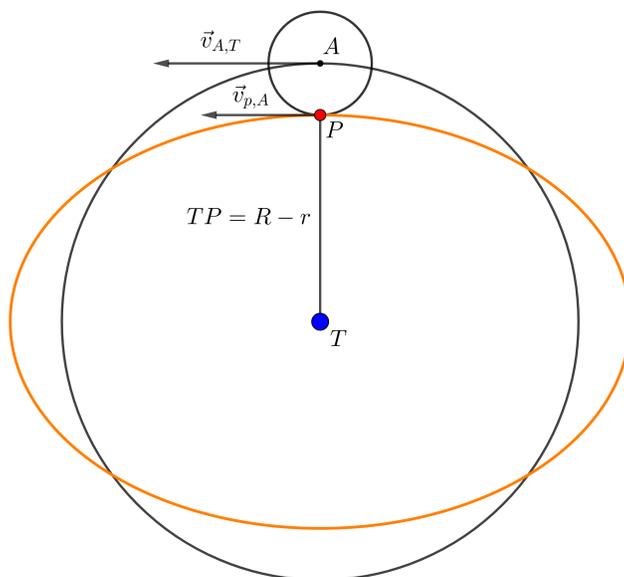


Clicando [aqui](#) você pode acessar uma animação da trajetória elíptica percorrida.

d) Note que a velocidade angular é diretamente proporcional à velocidade transversal v_{\perp} e inversamente proporcional à distância d , ou seja:

$$w = \frac{v_{\perp}}{d}$$

Portanto, a velocidade angular máxima ocorrerá quando v_{\perp} for máximo e d for mínimo. Felizmente, nota-se que na trajetória elíptica descrita essas duas condições ocorrem simultaneamente, como mostrado na figura abaixo:



O módulo da velocidade do ponto A em relação à Terra é:

$$v_{A,T} = \Omega R$$

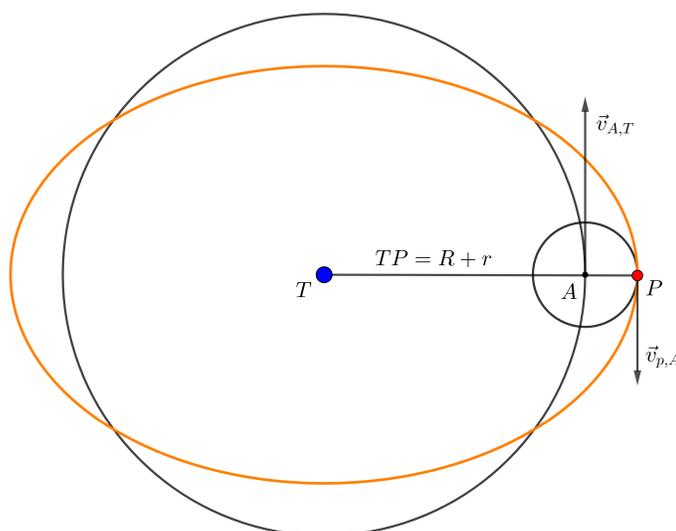
Como no caso que estamos analisando $\omega = -\Omega$, o módulo da velocidade do planeta em relação ao ponto A é:

$$v_{p,A} = \Omega r$$

Logo a velocidade transversal máxima do planeta em relação à Terra é dada por $v_{A,T} + v_{p,A}$. Portanto:

$$w_{max} = \frac{v_{A,T} + v_{p,A}}{R - r} = \frac{\Omega R + \Omega r}{R - r} \Rightarrow w_{max} = \left(\frac{R + r}{R - r} \right) \Omega$$

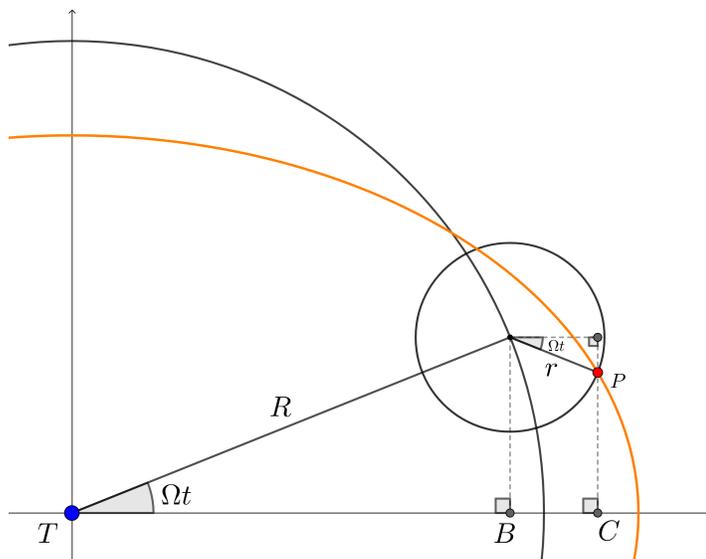
Analogamente, a velocidade angular mínima ocorrerá quando v_{\perp} for mínimo e d for máximo. Novamente, nota-se que na trajetória elíptica descrita essas duas condições ocorrem simultaneamente, como mostrado na figura abaixo:



Logo a velocidade transversal mínima do planeta em relação à Terra é dada por $v_{A,T} - v_{p,A}$. Portanto:

$$w_{min} = \frac{v_{A,T} - v_{p,A}}{R + r} = \frac{\Omega R - \Omega r}{R + r} \Rightarrow w_{min} = \left(\frac{R - r}{R + r} \right) \Omega$$

e) Para encontrarmos a coordenada x do planeta em um determinado t , usaremos a figura abaixo:



Perceba que a coordenada x será a distância TC . Ainda, note que essa distância é dada pela soma $TB + BC$. Logo:

$$x(t) = TC = TB + BC$$

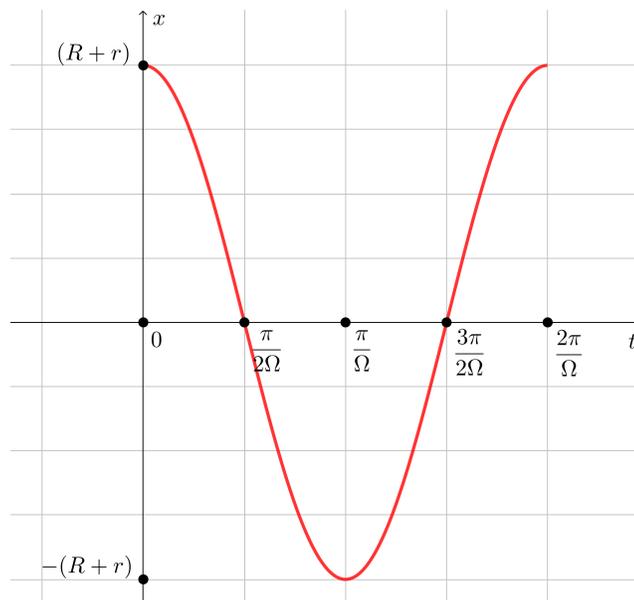
Agora, basta notar que:

$$TB = R \cos(\Omega t) \quad \text{e} \quad BC = r \cos(\Omega t)$$

Portanto:

$$x(t) = R \cos(\Omega t) + r \cos(\Omega t) \Rightarrow x(t) = (R + r) \cos(\Omega t)$$

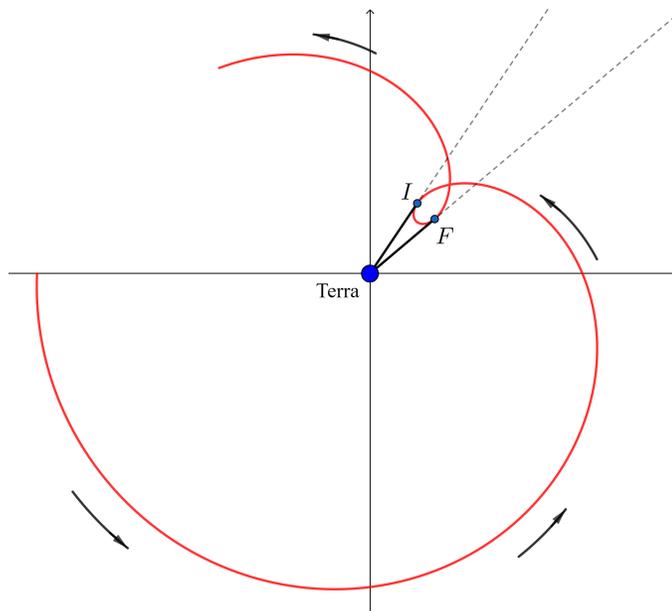
Esboçando-se essa função de $t = 0$ até o instante em que o planeta completa a primeira volta ($t = 2\pi/\Omega$), obtemos:



f) Para identificarmos os pontos de início e fim do movimento retrógrado de Marte, é importante lembrarmos que nesses pontos ocorre a inversão do sentido da velocidade transversal de Marte no referencial da Terra. Ou seja, nesse ponto a velocidade transversal de Marte relativamente à Terra é igual a 0, fazendo com que a velocidade relativa tenha apenas a componente radial.

Portanto, lembrando que o sentido da velocidade é sempre tangencial à trajetória, então basta encontrarmos os pontos em que a reta tangente à trajetória passa pela Terra, pois dessa forma sabemos que a velocidade relativa naquele ponto é unicamente radial.

Fazendo isso, encontramos que o ponto do início I e o ponto do fim F do movimento retrógrado de Marte são os seguintes:



A explicação acima já responde à segunda pergunta desse item, afinal como foi dito que nesses pontos há a inversão do sentido da velocidade transversal de Marte no referencial da Terra, então seu valor em tais instantes é igual a 0.

g) De maneira geral, para que ocorra movimento retrógrado, é necessário que em algum ponto a velocidade angular do planeta relativa à Terra seja negativa (isto é, possua sentido oposto ao de Ω).

Portanto, temos que analisar a menor velocidade transversal e condicioná-la a ser menor que 0.

É fácil perceber que nesse caso a menor velocidade transversal do planeta em relação à Terra $v_{\perp, \min}$ ocorrerá quando $\vec{v}_{p,A}$ tiver sentido oposto a $\vec{v}_{A,T}$. Logo:

$$v_{\perp, \min} = v_{A,T} - v_{p,A} = \Omega R - |\omega|r$$

Note que como $v_{p,A}$ é o módulo de $\vec{v}_{p,A}$, foi incluído o módulo em ω para que mantenha-se a coerência de que $v_{p,A} > 0$ mesmo para casos em que ω é negativo.

Como explicado, devemos ter $v_{\perp, \min} < 0$ para a ocorrência de movimento retrógrado, logo a condição é:

$$v_{\perp, \min} < 0 \Rightarrow \Omega R - |\omega|r < 0 \Rightarrow |\omega| > \frac{R}{r} \Omega$$

Separando a resposta nos dois casos possíveis:

- Se $\omega > 0$ (mesmo sentido que Ω):

$$\omega > \frac{R}{r} \Omega \Rightarrow \omega r > \Omega R$$

- Se $\omega < 0$ (sentido oposto ao de Ω):

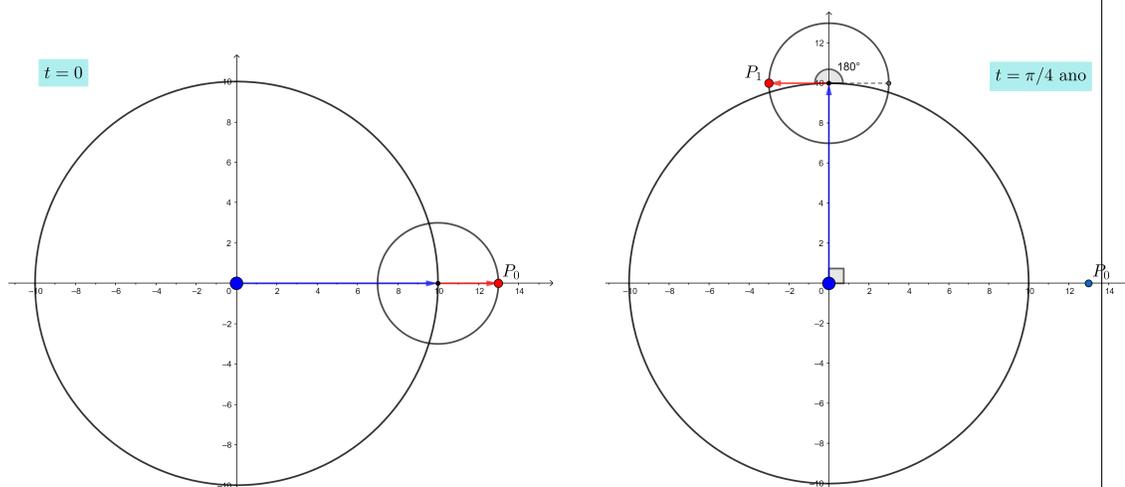
$$\omega < \frac{-R}{r} \Omega \Rightarrow \omega r < -\Omega R$$

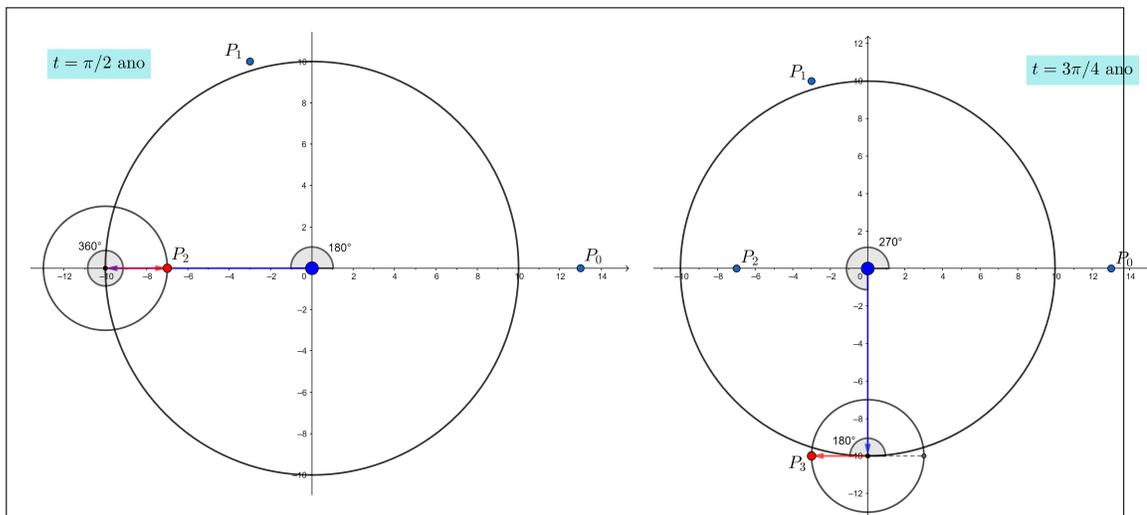
h) Primeiramente, vamos verificar se há movimentos retrógados ou não. Para isso, vimos no item anterior que basta compararmos as quantidades ωr e ΩR . Substituindo os valores, obtemos $\omega r = 12$ UA/ano e $\Omega R = 20$ UA/ano. Logo:

$$\omega r < \Omega R$$

Ou seja, **não ocorre nenhum movimento retrógrado** ao longo da trajetória.

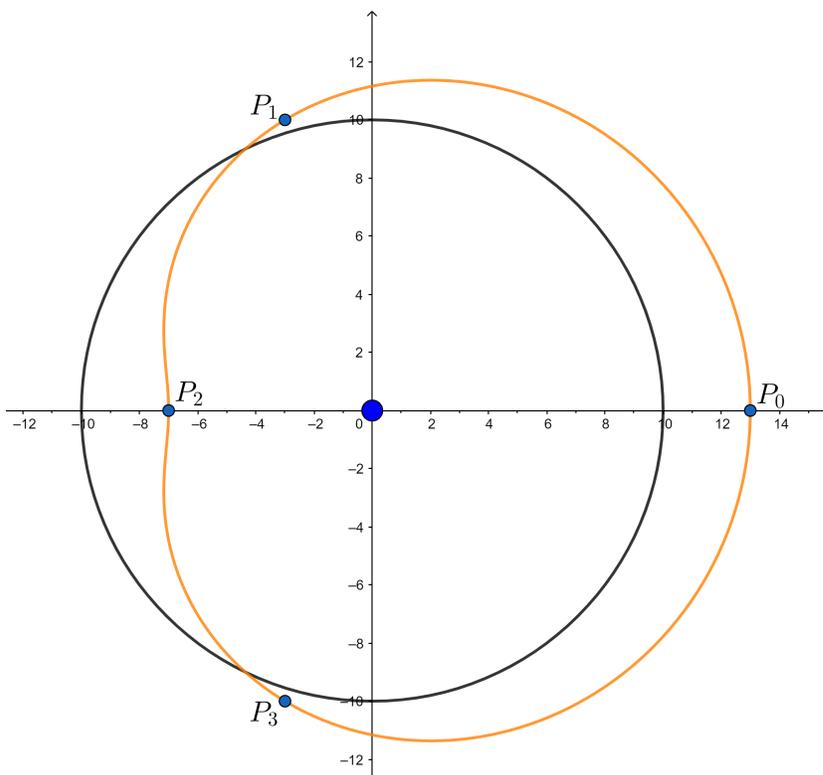
Para que possamos esboçar a trajetória, é interessante nos atentarmos a alguns pontos. Para identificar alguns pontos triviais, um dado importante é que $\omega = 2\Omega$, ou seja, a cada 90° percorrido pelo ponto A (centro da circunferência de raio r) em relação à origem, o planeta percorrerá 180° em relação ao ponto A . Sabendo disso, conseguimos identificar facilmente 4 pontos pertencentes à trajetória, como ilustrado nas imagens a seguir:





Logo, nota-se que a trajetória deve passar pelos pontos: $P_0 = (13, 0)$, $P_1 = (-3, 10)$, $P_2 = (-7, 0)$ e $P_3 = (-3, -10)$. É importante perceber que após π anos, o planeta volta ao ponto inicial (P_0) e o ciclo se repete.

Sabendo disso e de que não há movimento retrógrado (ou seja, não haverá “laçadas” na trajetória), podemos esboçar a trajetória. A imagem abaixo ilustra como ela é:



Neste [link](#) você pode acessar uma animação da trajetória percorrida.

10. **(60 pontos)** Em 1948, foi encontrado na cidade de Ugarit, atualmente conhecida como Síria, registros em cerâmica de um eclipse solar total que ocorreu em 1375BC, sendo assim o mais antigo já registrado. Nesta questão, estudaremos os movimentos da Lua e do Sol para compreendermos melhor tais joias da astronomia. Para todos os itens, considere que a órbita da Terra é circular e que a da Lua é elíptica.

- (a) **(12 pontos)** Realizando observações ao longo de cerca de um mês, um astrônomo calcula que o tamanho angular da Lua varia entre $0,55^\circ$ e $0,49^\circ$. Sabendo disso, calcule a excentricidade e o semieixo maior da órbita da Lua. Para este e os próximos itens, o raio da Terra não deve ser desprezado.
- (b) **(7 pontos)** A imagem abaixo mostra os três tipos de eclipses solares. Calcule qual a distância máxima d que a Lua pode estar da Terra para que um eclipse solar seja total, e não anular.



- (c) **(3 pontos)** Calcule a anomalia verdadeira da Lua durante um eclipse solar no qual a distância Terra-Lua é d , cujo valor foi encontrado no item anterior.

Agora, vamos analisar uma situação na qual a anomalia verdadeira da Lua possui o valor calculado no item anterior. Considere que dois astrônomos, Lago, em Macapá (latitude $0^\circ 2' 4''$ N e longitude $51^\circ 3' 60''$ O), e Oitavo, em Quito (latitude $0^\circ 13' 30''$ S e longitude $78^\circ 21' 29''$ O), estão observando (com óculos de proteção, claro!) um mesmo eclipse solar. Oitavo nota que a distância zenital da Lua é nula e que ele vê um eclipse solar total. Lago, porém, vê um eclipse solar parcial.

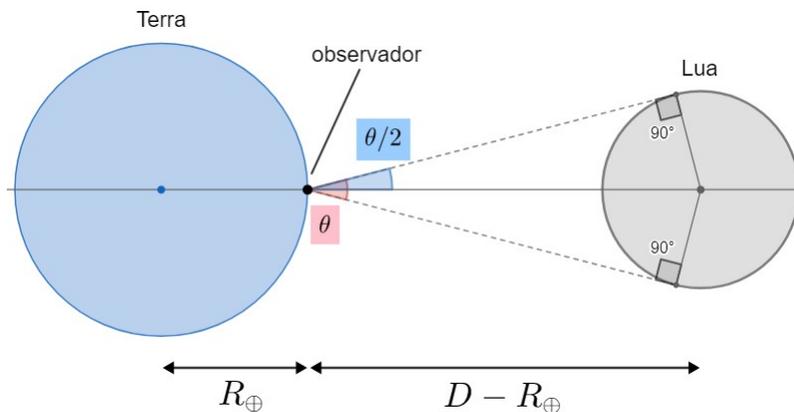
- (d) **(2 pontos)** Desenhe a visão de Lago do eclipse e indique no seu desenho a distância angular entre os centros do Sol e da Lua. Sem nenhuma aproximação, quem aparenta ser maior: o Sol ou a Lua?
- (e) **(8 pontos)** Calcule a distância angular entre os centros do Sol e da Lua quando vistos por Lago. Considere que Lago vê o Sol e a Lua com o mesmo tamanho angular.
- (f) **(5 pontos)** Encontre a distância angular entre os dois pontos de intersecção das bordas do Sol e da Lua. Considere, novamente, que Lago vê o Sol e a Lua com o mesmo tamanho angular.
- (g) **(8 pontos)** Considerando a inclinação da órbita lunar com relação ao plano do equador celeste como nula, mostre que Lago irá ver um eclipse solar poucas horas após Oitavo ver o eclipse total e estime o intervalo de tempo entre tais eventos.

Por fim, vamos analisar algumas condições de observabilidade de um eclipse solar alternativo no qual o Sol está infinitamente distante e suas coordenadas equatoriais são iguais às da Lua.

- (h) **(5 pontos)** Sabendo que a declinação da Lua é 20° , encontre a maior e a menor latitude de um observador terrestre que não consegue ver o Sol.
- (i) **(10 pontos)** Calcule a diferença de longitude dos observadores mais à leste e oeste que não conseguem ver o Sol.

Solução:

a) Sendo D a distância entre os centros da Terra e da Lua, podemos representar a situação pela seguinte imagem (fora de escala):



Temos:

$$\text{sen}(\theta/2) = \frac{R_L}{D - R_{\oplus}}$$

O tamanho angular da Lua é máximo quando sua distância até a Terra é mínima, i.e. a Lua está no periélio. Analogamente, $\theta = \theta_P$ quando a Lua está no afélio. Assim, podemos encontrar as seguintes equações:

$$\text{sen}(\theta_G/2) = \frac{R_L}{a_L(1 - e) - R_{\oplus}}$$

$$\text{sen}(\theta_P/2) = \frac{R_L}{a_L(1 + e) - R_{\oplus}}$$

Primeiramente, vamos encontrar a excentricidade e . Reescrevendo as equações acima:

$$\frac{a_L(1 - e)}{R_L} = \frac{1}{\text{sen}(\theta_G/2)} + \frac{R_{\oplus}}{R_L}$$

$$\frac{a_L(1 + e)}{R_L} = \frac{1}{\text{sen}(\theta_P/2)} + \frac{R_{\oplus}}{R_L}$$

Dividindo a equação de baixo pela de cima:

$$\frac{1 + e}{1 - e} = \frac{\frac{1}{\text{sen}(\theta_P/2)} + \frac{R_{\oplus}}{R_L}}{\frac{1}{\text{sen}(\theta_G/2)} + \frac{R_{\oplus}}{R_L}} = k$$

Onde chamamos o termo da direita de k por conveniência. Por fim, temos:

$$1 + e = k(1 - e) \Rightarrow e = \frac{k - 1}{k + 1}$$

Não há nenhuma penalidade por aproximar $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, já que tanto θ_G quanto θ_P são pequenos.

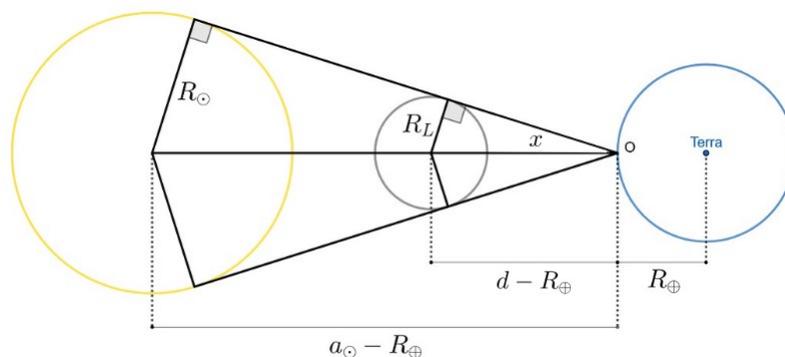
Realizando as devidas contas, obtemos $k = 1,12$ e $e = 0,057$.

Agora, podemos encontrar o semieixo maior a por:

$$a_L = \frac{R_L}{1 - e} \left(\frac{1}{\text{sen}(\theta_G/2)} + \frac{R_\oplus}{R_L} \right)$$

$$\Rightarrow a_L = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b) Na situação limite de existência de um eclipse solar anular, os tamanhos angulares do Sol e da Lua são idênticos. Assim, temos a figura:



Onde $x = \frac{\theta}{2}$. Pela figura, temos:

$$\text{sen } x = \frac{R_L}{d - R_\oplus} = \frac{R_\odot}{a_\odot - R_\oplus}$$

Ou seja:

$$d = R_\oplus + (a_\odot - R_\oplus) \frac{R_L}{R_\odot}$$

Realizando os devidos cálculos, obtemos $d = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$.

c) Pela equação polar da elipse:

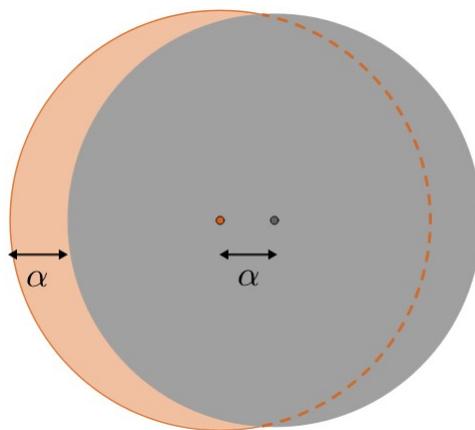
$$d = \frac{a_L(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

Onde ν é a anomalia verdadeira. Reescrevendo:

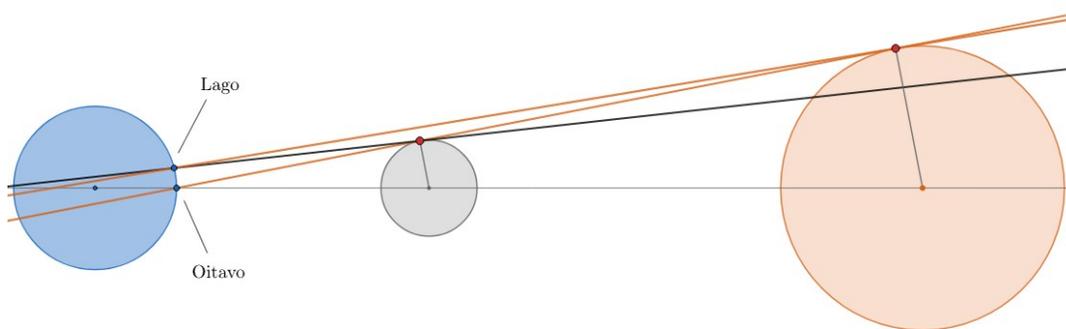
$$\cos \nu = \frac{a_L(1 - e^2)}{de} - \frac{1}{e} = 0,44$$

Assim, obtemos $\nu = 63,95^\circ$.

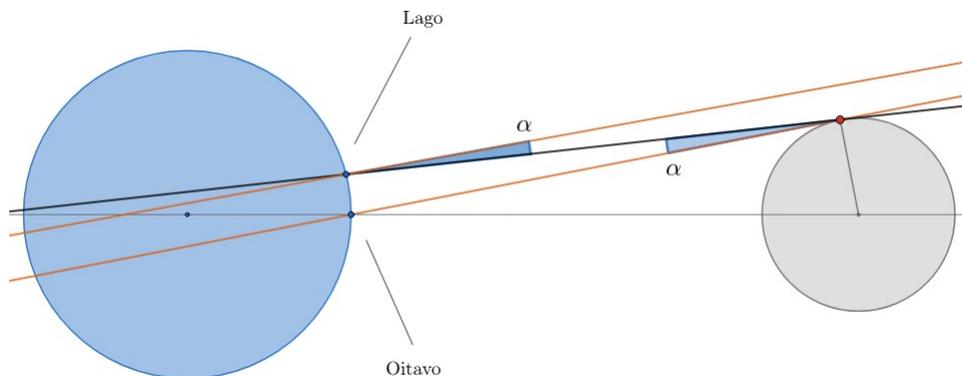
d) Os tamanhos angulares do Sol e da Lua vistos por Oitavo são os maiores possíveis para um observador na Terra, já que tais astros estão em seu zênite. Como a distância de Lago até a Lua (e o Sol) é maior que aquela presenciada por Oitavo, seu tamanho angular fica reduzido quando visto por Lago. Entretanto, note que tal variação é mais significativa para a Lua do que para o Sol, uma vez que este está mais distante da Terra que a Lua. Assim, o tamanho angular do Sol parece ser **maior** que aquele da Lua no referencial de Lago. O desenho de sua visão é:



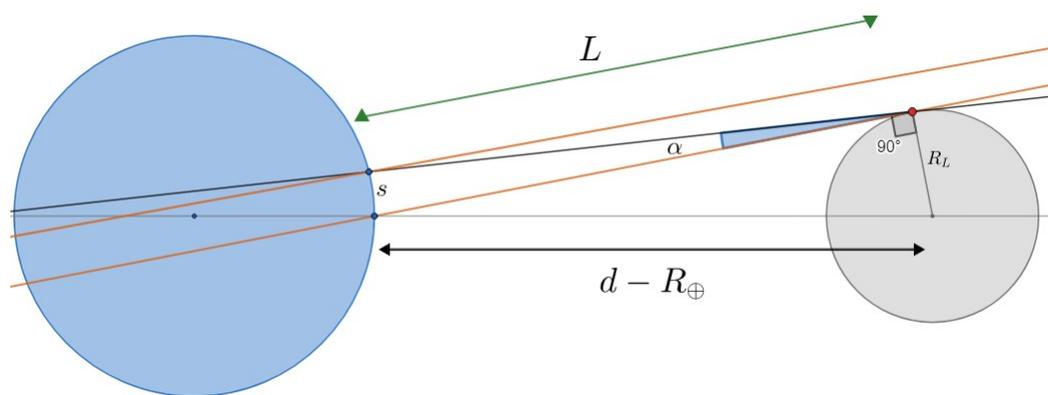
e) Primeiramente, note que a distância angular entre os centros do Sol e da Lua é igual à distância angular entre as bordas do Sol e da Lua (claro, desde que tais bordas estejam "alinhadas"). Isso se dá pois Lago só vê a Lua "deslocada" como um todo com relação ao Sol, de modo que a distância angular entre os centros dos astros seja o valor de tal "deslocamento". Assim, temos o seguinte desenho:



Note que os raios laranjas são paralelos entre si, uma vez que a distância Terra-Sol é muito maior que a distância física entre Lago e Oitavo. Assim, sendo α o valor da distância angular procurada, podemos dar um "zoom" na figura anterior para obtermos:



Onde o ângulo azul superior é α pela definição vista previamente, já o ângulo azul inferior é α pois as retas laranjas são paralelas entre si (a famosa regra do “Z do Zorro”). Assim, podemos obter a seguinte figura:



Pelo triângulo no qual α é o ângulo no vértice, temos que $s = L\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{s}{L}$. Para encontrarmos L , precisamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa $d - R_{\oplus}$:

$$(d - R_{\oplus})^2 = L^2 + R_L^2$$

Por outro lado, podemos encontrar s pela fórmula da separação angular:

$$s = R_{\oplus}\gamma$$

Onde

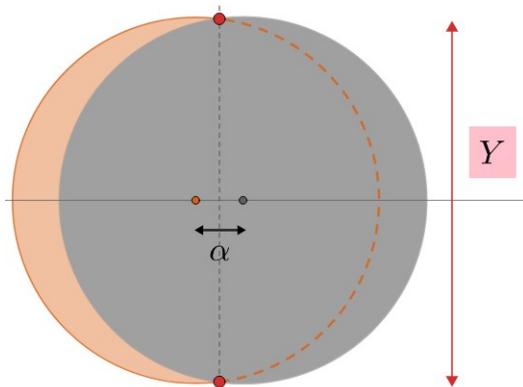
$$\cos \gamma = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(\Delta\lambda) \Rightarrow \gamma = 27^{\circ}17'31''$$

Logo, obtemos $s = 3,04 \cdot 10^6$ m.

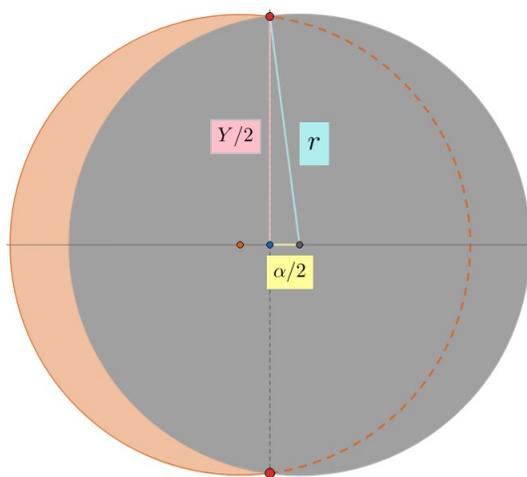
Reescrevendo:

$$\alpha = \frac{s}{\sqrt{(d - R_{\oplus})^2 - R_L^2}} = \boxed{0,47^{\circ}}$$

f) A distância angular entre os dois pontos de intersecção está representada por Y na imagem abaixo (fora de escala - na realidade, como α é quase tão grande quanto o tamanho angular do Sol e da Lua, tais astros se superpõem pouco quando vistos por Oitavo).



Assim, sendo $r = \frac{R_L}{L}$ o raio angular da Lua vista por Lago, temos o seguinte triângulo retângulo:



Por Pitágoras:

$$r^2 = \frac{Y^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4}$$

Assim, usando que $L^2 = (d - R_{\oplus})^2 - R_L^2$:

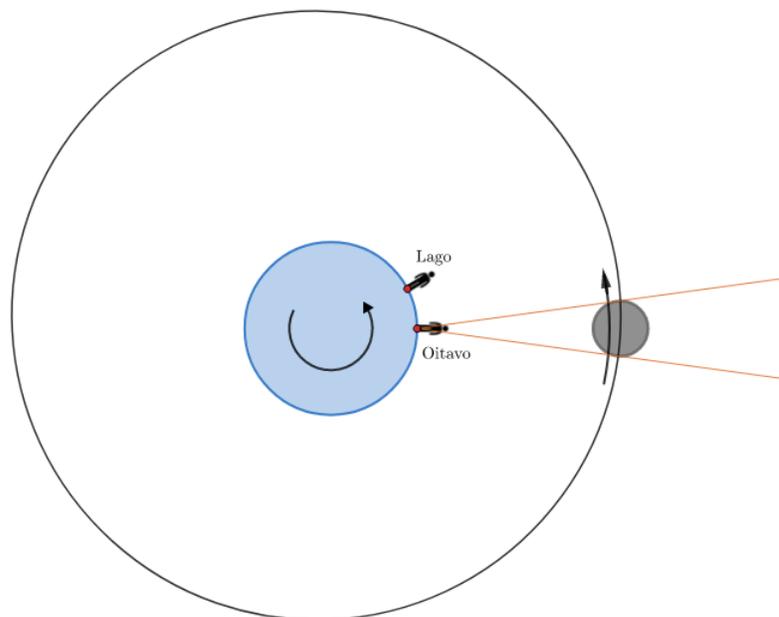
$$Y = 2\sqrt{\frac{R_L^2}{(d - R_{\oplus})^2 - R_L^2} - \frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\Rightarrow Y = 0,26^\circ$$

g) Como a questão pede uma estimativa, podemos aproximar que tanto Oitavo quanto Lago estão sobre o equador terrestre. Assim, temos três movimentos que influenciam o eclipse em questão:

1. Rotação da Terra
2. Órbita da Lua ao redor da Terra
3. Translação da Terra

Entretanto, note que a translação da Terra possui uma influência desprezível durante a duração de um eclipse (ordem de horas). Desse modo, podemos desprezá-la. Agora, temos a seguinte visão da Terra e da Lua quando vistas do Polo Celeste Norte:



Primeiramente, vamos mostrar que o eclipse irá passar por Lago após ter passado por Oitavo. Imagine que a Lua move 10m “para cima” na imagem. Se a Terra estiver parada, quanto a sombra da Lua na Terra se moverá para cima? Da mesma maneira que quando você move um objeto sendo iluminado por uma lanterna por uma distância x , sua sombra se move x na mesma direção, a sombra da Lua na Terra também irá 10m para cima. Assim, supondo que a Terra está parada, a sombra da Lua na Terra move-se com velocidade v_L para leste. Entretanto, a Terra também se move com uma velocidade v_{\oplus} para leste em seu equador. Assim, caso $v_{\oplus} > v_L$, a superfície da Terra é mais rápida que a sombra da Lua e o eclipse nunca chegará em Lago. Caso contrário, o eclipse passará por Lago.

Como calculamos a distância d entre a Terra e a Lua no item b), v_L pode ser encontrado por:

$$v_L = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a_L} \right)} = 1038 \text{ m/s}$$

Idealmente, teríamos que utilizar somente a componente tangencial de v_L . Entretanto, como a excentricidade da órbita da Lua é baixa, podemos desprezar tal influência. Agora, temos:

$$v_{\oplus} = \frac{2\pi R_{\oplus}}{P_{rot}} = 464 \text{ m/s}$$

Onde P_{rot} é um dia sideral, que é um pouco menor que 24h horas solares. Note:

$$v_L - v_{\oplus} = 574 \text{ m/s} > 0$$

Ou seja, Lago verá um eclipse anular! O tempo Δt até isso pode ser encontrado por:

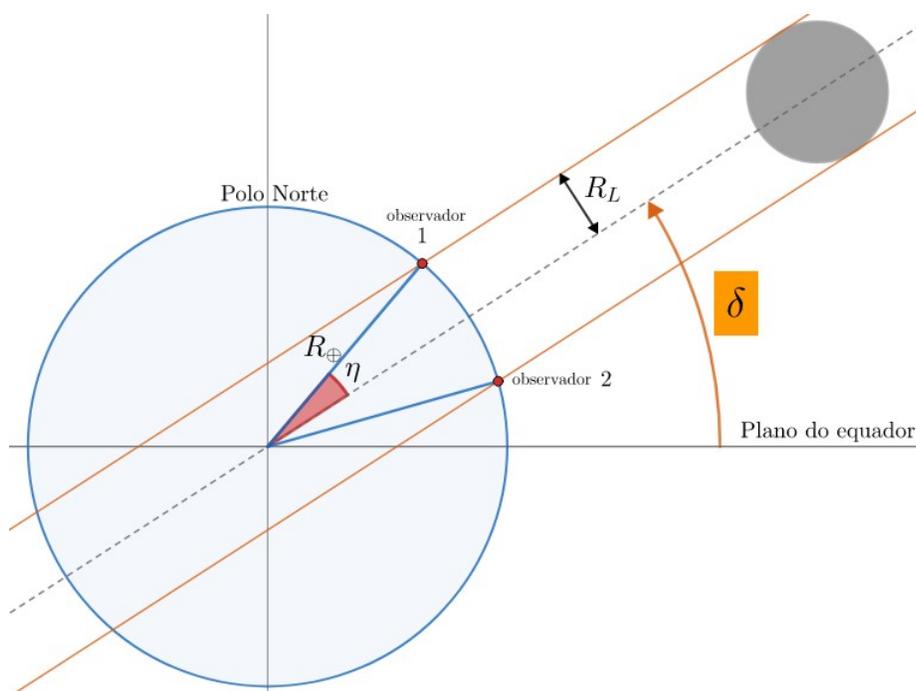
$$\Delta t = \frac{s'}{v_L - v_{\oplus}}$$

Onde s' é a separação física “longitudinal” entre Lago e Oitavo, que pode ser encontrada por:

$$s' = R_{\oplus} |\Delta\lambda| = 3,04 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Com isso, obtemos $\Delta t = 1,47 \text{ h}$. Vale ressaltar que essa não é a duração do eclipse solar.

h) A situação pode ser representada pela seguinte figura:



O observador 1 é aquele que possui a maior latitude sem conseguir ver o Sol, enquanto o observador 2 é o de menor latitude. Temos, pela figura:

$$R_{\oplus} \sin \eta = R_L \Rightarrow \eta = \sin^{-1} \left(\frac{R_L}{R_{\oplus}} \right) = 15,8^\circ$$

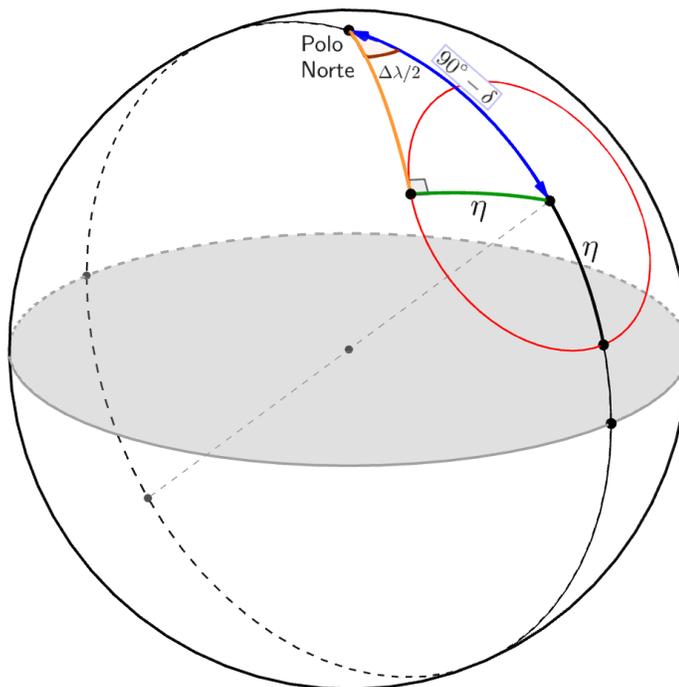
Assim, as latitudes buscadas são:

$$\varphi_1 = \delta + \eta = 35,8^\circ$$

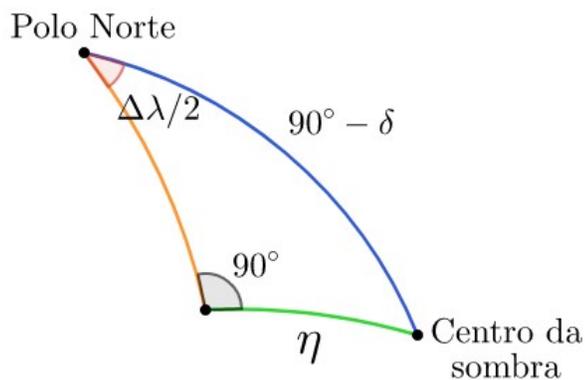
e

$$\varphi_2 = \delta - \eta = 4,2^\circ$$

i) Temos a seguinte figura:



Note que os observadores nas situações extremas são tais que o ângulo Polo Norte - Observador - Centro da sombra é 90° . Isso é análogo ao clássico problema da “máxima digressão leste”. Assim, podemos obter o seguinte triângulo esférico:



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen } \eta}{\text{sen}(\Delta\lambda/2)} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \delta)}{\text{sen } 90^\circ}$$

Como $\text{sen}(90^\circ - x) = \text{cos } x$ e $\text{sen } 90^\circ = 1$, podemos chegar em:

$$\Delta\lambda = 2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\text{sen } \eta}{\text{cos } \delta} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = 33,7^\circ}$$