Solução OBM N3 2021 - P2

Acesse o site para mais conteúdos

1. Enunciado

Seja n um inteiro positivo. Em um tabuleiro 2 x $3n$, marcamos algumas casas, de modo que qualquer casa (marcada ou não) seja adjacente a, no máximo, 2 casas marcadas (2 casas são adjacentes quando são distintas e possuem pelo menos um vértice em comum, ou seja, são vizinhas na horizontal, vertical e diagonal; uma casa não é adjacente a si mesma).

a) Qual é o maior número possível de casas marcadas?

b) Para esse número máximo, de quantas maneiras podemos marcar as casas? Configurações distintas que podem ser obtidas através da rotação ou reflexão são consideradas distintas.

2. Solução por Felipe Giglio

a) Basta observar que, pela restrição do enunciado, não é possível preencher mais de 2 casas num tabuleiro 2 x 3. A partir disso, conseguimos facilmente uma cota de $2n$ para o tabuleiro 2 x $3n$, o particionando em n peças 2 x 3. Agora basta um exemplo com $2n$, que pode ser obtido, por exemplo, marcando as 2 casas da primeira coluna de cada uma das n peças.

b) Vamos usar a seguinte notação para o item b):

chamaremos de "peça"um dos n tabuleiros 2 x 3 que são uma partição do tabuleiro original;

além disso, diremos que uma peça é xyz se há x peças marcadas na primeira coluna, y peças marcadas na segunda coluna, z peças marcadas na terceira coluna.

Portando, como há exatamente 2 casas pintadas em cada peça (para que o máximo seja atingido), teremos peças da forma:

{200 ; 110 ; 101 ; 020 ; 011 ; 002}.

Note, também, que pelas restrições do enunciado:

Após uma peça 200, não há restrições sobre a próxima peça;

Após uma peça 110, a próxima poderá ser apenas {110 ; 101 ; 020 ; 011 ; 002};

Após uma peça 101, a próxima peça poderá ser apenas {101 ; 011 ; 002};

Após uma peça 020, a próxima peça poderá ser apenas {020 ; 011 ; 002};

Após uma peça 011, a próxima peça poderá ser apenas {011 ; 002};

Após uma peça 002, a próxima peça poderá ser apenas {002}.

A partir dessas informações, podemos afirmar que o tabuleiro será dividido em 5 camadas possivelmente vazias da seguinte forma:

200 ; 200 ; ... ; 200 ; 110 ; 110 ; ... ; 110 ; 101 ; 101 ; ... ; 101 ; 011 ; 011 ; ... ; 011 ; 002 ; 002 ; ... ; 002

ou

200 ; 200 ; ... ; 200 110 ; 110 ; ... ; 110 ; 020 ; 020 ; ... ; 020 ; 011 ; 011 ; ... ; 011 ; 002 ; 002 ; ... ; 002

Ou seja, haverá 5 camadas, sendo a primeira camada composta por 200 a segunda camada composta por 110, a terceira camada composta por 101 ou 020, a quarta camada composta por 011, e a quinta camada composta por 002. Note que a terceira camada possui 2 opções pois não é possível haver um tabuleiro que tem, simultaneamente, as peças do tipo 101 e 020. Dado também que as peças {200 ; 020 ; 002} possuem, cada uma, 1 forma de serem escritas, e as peças {110 ; 101 ; 011} possuem, cada uma, 4 formas de serem escritas (pois a peça em cada coluna pode estar na parte de cima ou na parte de baixo). Agora nos resta apenas conta.

Digamos que há k peças do tipo {110 ; 101 ; 020 ; 011}, e há t peças da forma {110 ; 011}.

Seja S_k o número de maneiras possíveis de preencher essas k peças com as respectivas opções. Temos que o total de maneiras de preencher o tabuleiro será:

$$\sum_{k=1}^{n} 1^{n-k}(n-k+1)S_k + 1^n(n+1)$$

O termo 1^{n-k} foi incluído por razões puramente didáticas, pois ele se refere a quantas maneiras há de escolher o tipo das $n-k$ peças que sobraram da forma 200 ou 002, e o termo $(n-k+1)$ se deve a onde o intervalo de k peças será encaixado no tabuleiro de n peças. Além disso, a parcela $1^n(n+1)$ se deve ao caso onde $k=0$, que deve ser tratado separadamente (vale ressaltar que essa parcela não faz parte do somatório).

Vamos então calcular o valor de S_k:

$$S_k = \sum_{t=0}^{k-1}(t+1)4^t(4^{k-t}+1^{k-t}) + (k+1)4^k$$

$$\iff S_k = \sum_{t=0}^{k-1}(t+1)(4^k+4^t) + (k+1)4^k$$

Da mesma forma que antes, o termo $(t+1)$ se deve a onde a terceira camada será encaixada entre as k peças. Além disso, 4^t se deve ao número de formas possíveis de escolhermos as t peças 110 ou 011, pois cada uma possui 4 possibilidades. E o termo $(4^{k-t}+1^{k-t})$ se deve à soma dos casos onde a terceira camada é composta por 101 e quando a terceira camada é composta por 020. E, por fim, a parcela $(k+1)4^k$ se deve ao caso onde $t=k$, que também deve ser lidado separadamente (vale ressaltar novamente que a parcela $(k+1)4^k$ não faz parte do somatório.

$$S_k = \sum_{t=0}^{k-1}(t+1)4^t + 4^k\sum_{t=0}^{k-1}(t+1) + (k+1)4^k$$

$$\iff S_k = \sum_{t=0}^{k-1}(t+1)4^t + 4^k\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)4^k$$

Vamos agora, separadamente, calcular o valor do somatório que sobrou:

$$s = \sum_{t=0}^{k-1} (t+1)4^t = 1.4^0 + 2.4^1 + ... + k.4^{k-1}$$

$$\iff 4s = 1.4^1 + 2.4^2 + ... + (k-1)4^{k-1} + k.4^k$$

$$\iff 3s = k.4^k - (4^0 + 4^1 + ... + 4^{k-1})$$

$$\iff 3s = k.4^k - \frac{4^k - 1}{3}$$

$$\iff s = \frac{3k.4^k - 4^k + 1}{9}$$

Portanto, teremos que:

$$S_k = \frac{3k.4^k - 4^k + 1}{9} + 4^k \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)4^k$$

$$\iff S_k = 4^k \frac{1}{18}(9k^2 + 9k + 6k - 2 + 18k + 18) + \frac{1}{9}$$

$$\iff S_k = 4^k \frac{1}{18}(9k^2 + 33k + 16) + \frac{1}{9}$$

Finalmente, para terminar o problema, queremos calcular

$$\sum_{k=1}^{n} 1^{n-k}(n-k+1)S_k + 1^n(n+1)$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} S_k - \sum_{k=1}^{n}(k-1)S_k + (n+1)$$

$$= \frac{n}{18}\sum_{k=1}^{n} 4^k(9k^2+33k+16) - \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{n} 4^k(k-1)(9k^2+33k+16) + n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9} - \sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{1}{9} + (n+1)$$

$$= \frac{n}{18}\sum_{k=1}^{n} 4^k(9k^2+33k+16) - \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{n} 4^k(9k^3+24k^2-17k-16) + \frac{n^2}{9} - \frac{n(n-1)}{18} + (n+1)$$

Para facilitar a forma de escrever o resultado, vamos criar a notação

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{n} 4^k.k^i$$

Portanto, precisamos calcular $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\sigma_0 = 4^1 + 4^2 + ... + 4^n$$
$$\iff 4\sigma_0 = 4^2 + 4^3 + ...4^n + 4^{n+1}$$
$$\iff 3\sigma_0 = 4^{n+1} - 4$$
$$\iff \sigma_0 = \frac{4^{n+1} - 4}{3}$$

[...]

$$\sigma_1 = 1.4^1 + 2.4^2 + ... + n.4^n$$
$$\iff 4\sigma_1 = 1.4^2 + 2.4^3 + ... + (n-1)4^n + n.4^{n+1}$$
$$\iff 3\sigma_1 = n.4^{n+1} - (4^1 + 4^2 + ... + 4^n)$$
$$\iff \sigma_1 = \frac{n.4^{n+1} - \sigma_0}{3}$$

[...]

$$\sigma_2 = 1^2.4^1 + 2^2.4^2 + ... + n^2.4^n$$
$$\iff 4\sigma_2 = 1^2.4^2 + 2^2.4^3 + ... + (n-1)^2.4^n + n^2.4^{n+1}$$
$$\iff 3\sigma_2 = n^2.4^{n+1} - (1.4^1 + 3.4^2 + ... + (2n-1)4^n)$$
$$\iff \sigma_2 = \frac{n^2.4^{n+1} - 2\sigma_1 + \sigma_0}{3}$$

[...]

$$\sigma_3 = 1^3.4^1 + 2^3.4^2 + ... + n^3.4^n$$
$$\iff 4\sigma_3 = 1^3.4^2 + 2^3.4^3 + ... + (n-1)^3.4^n + n^3.4^{n+1}$$
$$\iff 3\sigma_3 = n^3.4^{n+1} - (1.4^1 + 7.4^2 + ... + (3n^2 - 3n + 1)4^n)$$
$$\iff \sigma_3 = \frac{n^3.4^{n+1} - 3\sigma_2 + 3\sigma_1 - \sigma_0}{3}$$

Portanto, temos que o resultado do problema será:

$$\frac{n}{18}\sum_{k=1}^{n}4^k(9k^2+33k+16)-\frac{1}{18}\sum_{k=1}^{n}4^k(9k^3+24k^2-17k-16)+\frac{n^2}{9}-\frac{n(n-1)}{18}+(n+1)$$

$$=\frac{n}{18}(9\sigma_2+33\sigma_1+16\sigma_0)-\frac{1}{18}(9\sigma_3+24\sigma_2-17\sigma_1-16\sigma_0)+\frac{n^2+19n+18}{18}$$

A princípio, tem como simplificar mais a conta. Porém, deixar o resultado em fórmula fechada já é suficiente como resposta. Afinal, não existe gol feio, feio é não fazer gol.