SIMULADO PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

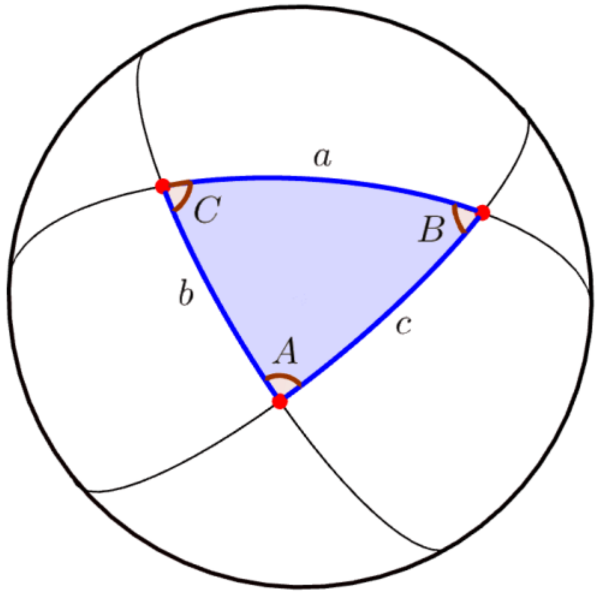
1. A duração da prova é de **quatro** (4 horas).
2. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **4 questões**
   - Questões Médias - **4 questões**
   - Questões Longas - **2 questões**
3. Autores:
   - Q1: Ian Seo Takose
   - Q2: Otávio Ferrari
   - Q3: Gabriel Chalfun
   - Q4: Gabriela Martins
   - Q5: Gabriela Martins
   - Q6: Gabriel Chalfun
   - Q7: Bruno Makoto
   - Q8: Ian Seo Takose
   - Q9: Otávio Ferrari e Bruno Makoto
   - Q10: Bruno Makoto
4. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2;
5. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
6. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Como esta prova é um simulado, procure fazer uma solução parecida com aquela que você faria na prova verdadeira.
7. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues e nem serão corrigidas.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	

Formulário

- Para um triângulo esférico:



Lei dos Senos:

$$\frac{sen(a)}{sen(A)} = \frac{sen(b)}{sen(B)} = \frac{sen(c)}{sen(C)}$$

Lei dos Cossenos:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$$

Lei dos Quatro-Elementos:

$$\cot(a)\,\mathrm{sen}(b) = \cot(A)\,\mathrm{sen}(C) + \cos(b)\cos(C)$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22\frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Hubble:

$$v_{rad} = H_0 d$$

- Equação polar da elipse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\nu}$$

- Efeito doppler clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Questões Curtas

1. **(15 pontos)** Durante a IOAA, a equipe brasileira decidiu fazer um passeio na cidade de Vassouras ($\phi = 22°24'14'' \, S$ e $\lambda = 43°39'45'' \, W$), mas Otávio preferiu ficar no hotel dormindo ☺
Quando estavam passando por um dos pontos turísticos da cidade, a Igreja Matriz de Nossa Senhora da Conceição, eles notaram um figura parecida com o rosto de seu amigo culminando no alto da igreja. Surpresos, decidiram tirar uma foto para homenageá-lo. A partir dela (Figura 1), estime a declinação da cabeça de Otávio (indicada por *otavião*) no momento da foto.

   Dados:

   - O morro com os alunos possui uma inclinação de 10°.
   - O tamanho físico da letra "i", representada pelo jovem de bermuda bege, é de aproximadamente $2m$ e ele está a uma distância de $8m$ da câmera.
   - Para tirar a foto, eles colocaram a câmera no chão, de forma que ela estava paralela ao solo.
   - O corpo dos estudantes, assim como a igreja, estava na direção da gravidade.
   - A igreja está na direção Sul.

Figura 1: Linda foto da equipe brasileira.

2. **(15 pontos)** Considere um asteroide com órbita elíptica contida no plano da eclíptica cujo semieixo maior é $a = 2,27\,\text{UA}$. No dia em que a Terra está entre o Sol e o **ponto do periélio** da órbita desse asteroide, mede-se que a distância Terra-asteroide é $d = 0,84\,\text{UA}$ e que, visto a partir da Terra, sua separação angular com o Sol é $\alpha = 95,6°$. Considerando a órbita terrestre como circular, calcule a excentricidade e da órbita do asteroide.

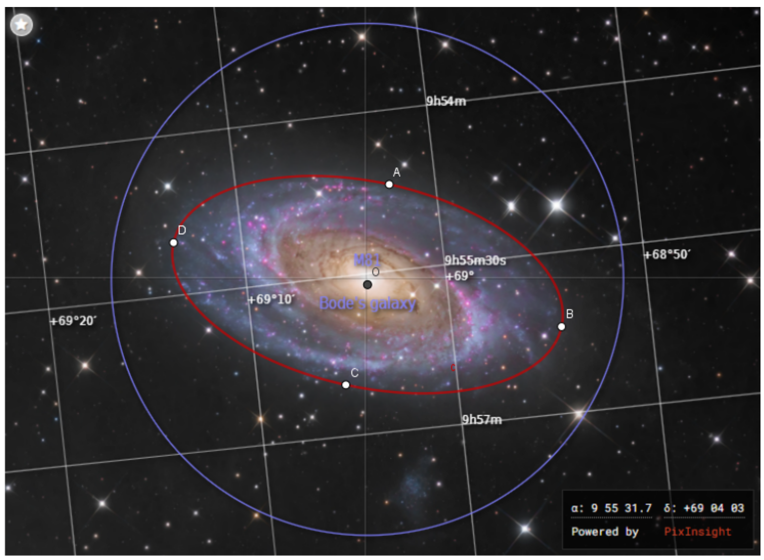
3. **(15 pontos)** Os cientistas do hemisfério norte do planeta Klar-A acharam registros de uma era glacial que ocorreu há 4000 anos, resultado da união entre o apoastro e o solstício de inverno, que coincidiram na época. Eles sabem que o periastro precessiona no sentido anti-horário com um

período de 60000 anos e que o ponto vernal se desloca ao longo da "eclíptica" em $32,4''$ por ano no sentido horário, devido à precessão dos equinócios.

Considerando que a excentricidade orbital de Klar-A é constante, determine o tempo (em anos) até a próxima era glacial no hemisfério norte do planeta.

4. **(15 pontos)** A tabela a seguir traz as coordenadas dos pontos A, B, C e D, apresentados na Figura 2, que caracterizam a elipse de centro O descrita pela galáxia M81. Sabendo que Wissam Ayoub utilizou um CCD de pixels com lado $7\,\mu m$ e um telescópio f/8 de 250mm de diâmetro, determine a quantidade de pixels ocupada pela imagem.

Ponto	Declinação	Ascensão Reta
A	+69° 02° 09°	09h 54m 41.4s
B	+68° 54° 23°	09h 56m 08.8s
C	+69° 05° 35°	09h 56m 30.3s
D	+69° 13° 28°	09h 54m 58.8s



Créditos: Wissam Ayoub.

Figura 2: M81

Questões Médias

5. **(25 pontos)** Linhaça é uma astrônoma amadora. Com seu telescópio de $D_p = 70\,mm$ de diâmetro no espelho primário e $D_s = 20\,mm$ de diâmetro no espelho secundário, ela mede uma energia $E = 1,20 \cdot 10^{-13}\,J$ em um tempo $\Delta t = 15\,s$ de exposição centrada em $\lambda = 2500\,nm$ e com $\Delta\lambda = 60\,nm$ para a estrela Gergelim. Ela também obtém o espectro dessa estrela, onde constatou que ela possui temperatura efetiva $T = 4500\,K$, e a paralaxe da estrela, que vale $p = 1,2 \cdot 10^{-3}$ segundos de arco.

   (a) **(5 pontos)** Para que seja possível aplicar a lei de Rayleigh-Jeans, é necessário que os comprimentos de onda em questão sejam "grandes", assim como ilustrado na figura 3. Mostre que comprimentos de onda vistos por Linhaça são "grandes".

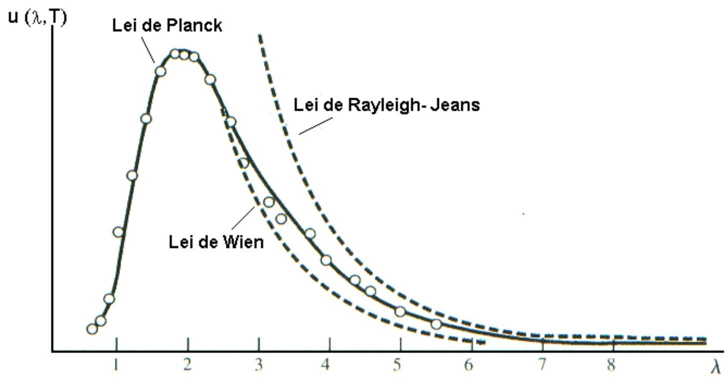


Figura 3: Lei de Rayleigh-Jeans e Lei de Wien vs Lei de Planck

(b) **(15 pontos)** Calcule o ângulo sólido compreendido por essa estrela.

(c) **(3 pontos)** Determine o raio da estrela em raios solares.

(d) **(2 pontos)** Observando a Figura 4, encontre no diagrama HR a região em que Gergelim está localizada (Sequência Principal, Supergigantes, Gigantes ou Anãs brancas).

Dados:

A lei de Rayleigh-Jeans para grandes comprimentos de onda é dada por:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2k_B c T}{\lambda^4}$$

Onde B_λ é a radiância espectral de um corpo negro, i.e. $[B_\lambda] = Wm^{-3}sr^{-1}$. Ela é o fluxo em uma determinada banda dividida pelo ângulo sólido de um astro e o intervalo de comprimentos de onda em questão.

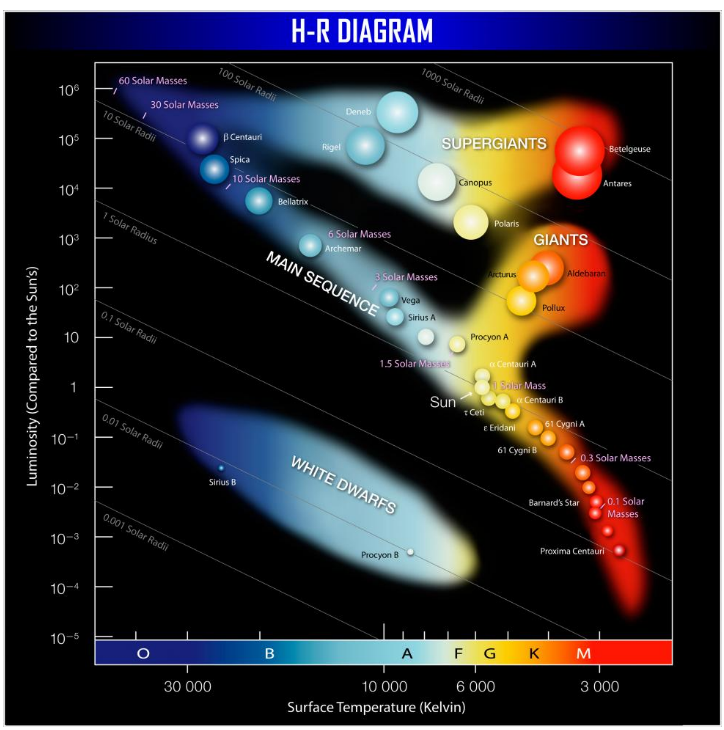


Figura 4: Diagrama HR

6. **(30 pontos)** Nesta questão, iremos demonstrar alguns importantes resultados acerca de ângulos de fase e elipses. Considere todas as órbitas em questão circulares e coplanares. O **ângulo de fase** de um planeta é o ângulo entre a Terra e o Sol medido a partir do planeta. Em outras palavras, o ângulo Terra-Planeta-Sol.

   Dado: o raio da órbita de Marte é $1,52\,\text{UA}$.

   (a) **(2 pontos)** Encontre o ângulo de fase de Marte quando sua elongação (i.e. o ângulo Sol-Terra-Marte) vale $30°$.

   (b) **(5 pontos)** Determine o maior ângulo de fase possível para Marte. Qual o valor de sua elongação nessa situação? **Dica:** não é necessário utilizar cálculo diferencial.

   Uma das definições de uma elipse diz que ela pode ser obtida multiplicando todas as coordenadas y de uma circunferência por um valor constante k, assim como ilustrado no figura 5.

   (c) **(8 pontos)** Partindo dessa propriedade, demonstre que um circulo visto de perfil é uma elipse.

   (d) **(15 pontos)** Encontre uma expressão que dê a porcentagem da face iluminada ϕ de um planeta em função de seu ângulo de fase θ. Note que $\phi = 1$ é equivalente a uma "Marte Cheia", como uma Lua Cheia.

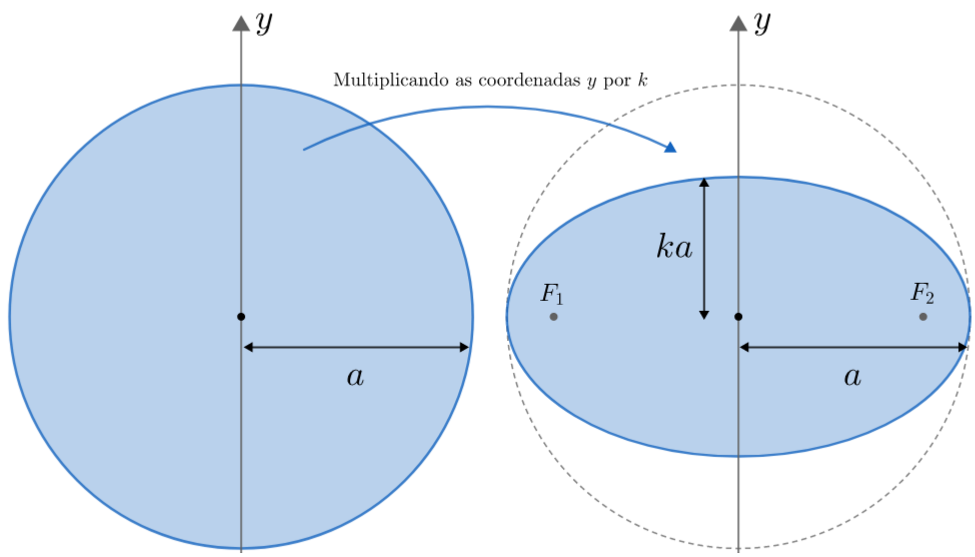


Figura 5: Ilustração da transformação entre círculo e elipse.

7. **(30 pontos)** O efeito Rossiter-McLaughlin descreve a variação do redshift de um astro quando um outro objeto passa em frente a sua face visível, assim como ilustrado na imagem a seguir.

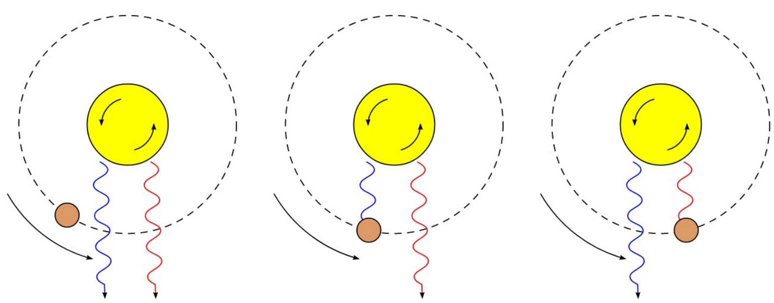
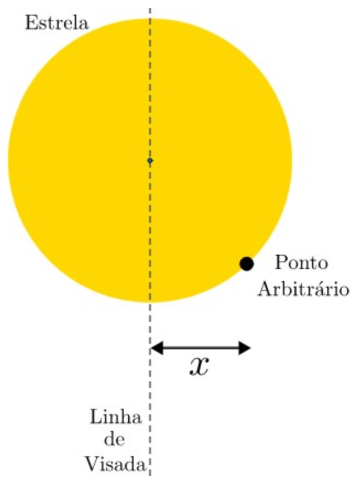


Figura 6: Efeito Rossiter-McLaughlin. O observador está situado na parte inferior da imagem.

Nesta questão, iremos analisar um modelo simplificado do efeito Rossiter-McLaughlin para encontrarmos a velocidade angular de rotação de uma estrela orbitada por um exoplaneta. Considere que a inclinação orbital do sistema é $90°$. Além disso, a Lei de Hubble não deve ser desprezada.

(a) **(2 pontos)** Encontre uma expressão da velocidade radial ao longo do equador da estrela como função da coordenada x ilustrada na figura abaixo, de sua velocidade angular ω, de sua distância d até a Terra e da constante de Hubble H_0. Novamente, o observador está situado na parte inferior da imagem.



Esse comportamento não é observado nas medições feitas da Terra por limitações técnicas, fazendo com que a velocidade radial medida seja um valor médio com relação à coordenada x sobre o equador. Agora, vamos analisar a influência de um exoplaneta nesse cálculo.

(b) **(4 pontos)** Sabendo que o fluxo cai para $\frac{3}{4}$ de seu valor original durante o trânsito do exoplaneta, calcule a razão entre os raios do exoplaneta e da estrela.

Nos próximos dois itens, considere que a massa do exoplaneta é desprezível e que sua órbita é no sentido anti-horário quando vista acima da linha de visada da Terra.

(c) **(2 pontos)** Esboce o gráfico da velocidade radial no equador da estrela como função de x e calcule o valor médio da velocidade radial com relação à x.

(d) **(8 pontos)** Quando o exoplaneta inicia seu trânsito, eventualmente ele fica inteiramente imerso na região da estrela. Nesse instante, a velocidade radial média observada no equador estrela vale v_{r1}. Além disso, tal valor imediatamente antes do exoplaneta começar a deixar a região da estrela é v_{r2}. Sabendo que $\frac{v_{r1}}{v_{r2}} = 0,80$, que o raio da estrela vale $1R_\odot$ e que $d = 1,2Mpc$, encontre a velocidade angular da estrela (tanto o módulo quanto o sentido).

Agora, considere que a densidade do exoplaneta é a mesma da estrela, i.e. sua massa não pode ser desprezada, e, novamente, que sua órbita é no sentido anti-horário quando vista acima da linha de visada da Terra.

(e) **(14 pontos)** Quando o exoplaneta inicia seu trânsito, eventualmente ele fica inteiramente imerso na região da estrela. Nesse instante, a velocidade radial média observada no equador da estrela vale v'_{r1}. Além disso, tal valor imediatamente antes do exoplaneta começar a deixar a região da estrela é v'_{r2}. Sabendo que $\frac{v'_{r1}}{v'_{r2}} = 0,80$, que o raio da estrela vale $1R_\odot$, que $d = 1,2Mpc$, e que, **em módulo**, a velocidade angular da órbita do exoplaneta é a mesma da rotação da estrela, encontre a velocidade angular da estrela (tanto o módulo quanto o sentido).

8. **(35 pontos)** Em uma realidade alternativa, todos na Terra acreditam que a Terra é plana. Você, como um bom astrônomo, sabe que isso não passa de uma mentira da ASAN para vender pratos do nosso planeta. Assim, para provar que todos estão errados, você decide transmitir a imagem de sua câmera em um lançamento, para mostrar a curvatura da Terra. Porém, é necessário que você faça os cálculos sobre sua órbita.

   Primeiramente, é importante calcularmos alguns parâmetros comuns sobre a variação de altura.

   (a) **(2 pontos)** Dado um observador a uma altura h da superfície da Terra, qual sua distância D até o horizonte? Considere que a Terra é uma esfera de raio R.

   Perceba que não especificamos nenhuma direção, então o horizonte é essencialmente o conjunto de pontos na superfície da Terra a uma distância D do observador.

   (b) **(3 pontos)** Outra informação importante é o quanto o horizonte se inclinou, que chamaremos de φ, como pode ser visto na Figura 7. Calcule φ em função do raio da Terra e a altura h do observador.

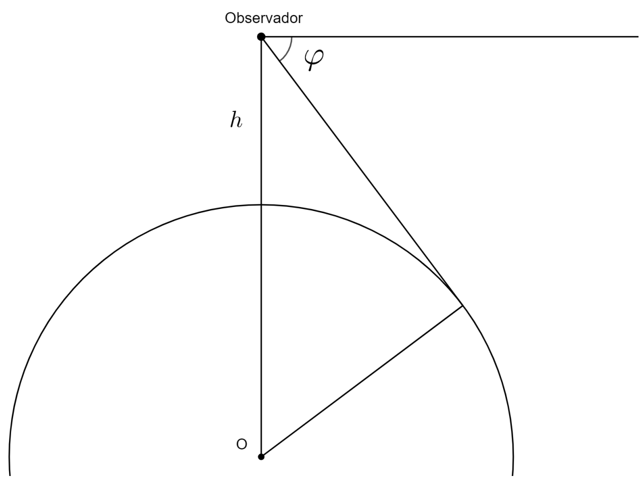


Figura 7: Inclinação do horizonte, dada uma altura h.

   Agora, podemos começar a definir parâmetros não tão comuns. Essencialmente, queremos descobrir como a curvatura do horizonte depende da sua altura. Para isso, precisamos convencionar como vamos medir quão curvado ele está. A Figura 8 traz uma foto da vista de um passageiro. Com ela, podemos criar uma intuição do que é interessante medir.

Figura 8: Bela vista em um avião.

Note que o horizonte vai se curvando a medida que chega no canto da foto. Assim, vemos que a medição mais prática que podemos fazer é ver o quão pra baixo o chão está no canto da foto, chamaremos esse ângulo de δ, como pode ser visto na figura 9.

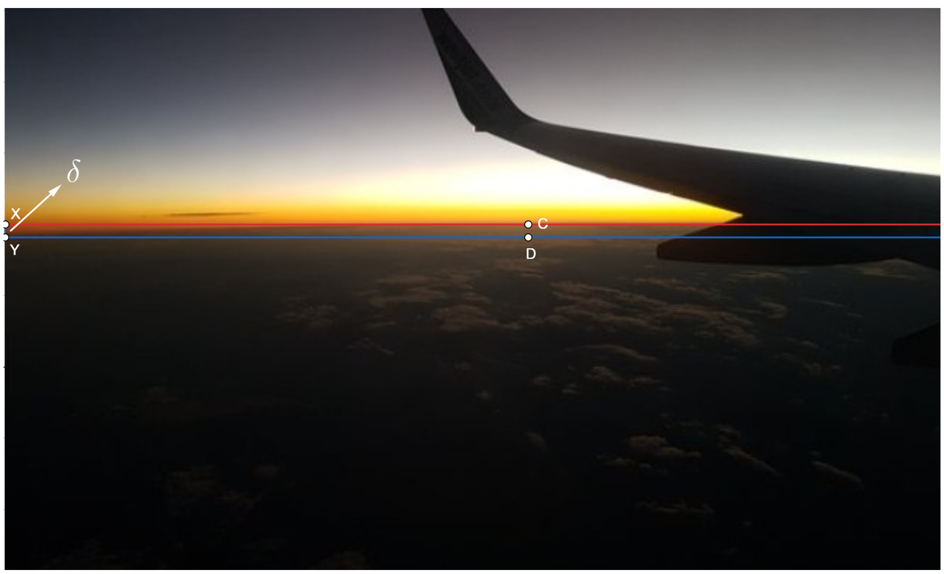


Figura 9: Definimos δ como o tamanho angular de XY.

Ainda, perceba que δ pode ser encontrado como o tamanho angular de XY, que é igual ao tamanho angular de CD (isso será útil para calculá-lo).

A geometria agora começa a ficar mais difícil, pois a situação é tridimensional. A Figura 10 traz a situação vista de longe.

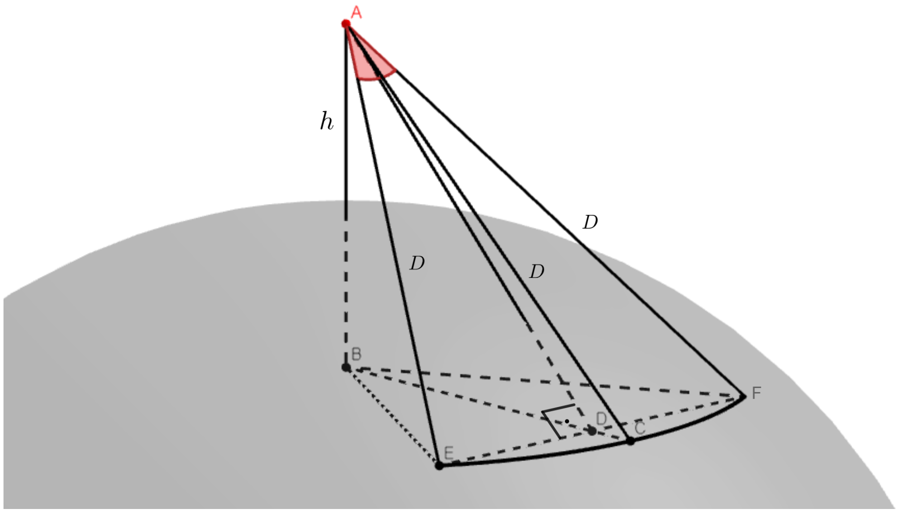


Figura 10: Esquematização do problema. Perceba que A é o observador.

O arco em preto é simplesmente o horizonte, ou seja, $AE = AC = D$. O ângulo em vermelho é o campo de visão da câmera (note que se na figura 8 tivéssemos um FOV maior, o δ aumentaria), que definimos como $\alpha = m(E\hat{A}F)$. Vale ressaltar que os pontos A, D, E e F são coplanares.

(c) **(5 pontos)** A partir da Figura 10 calcule AD, em função de α e D.

Finalmente, como já discutido, δ pode ser calculado como o tamanho angular de CD. Olhando o plano do triângulo ABC, podemos construir a seguinte figura:

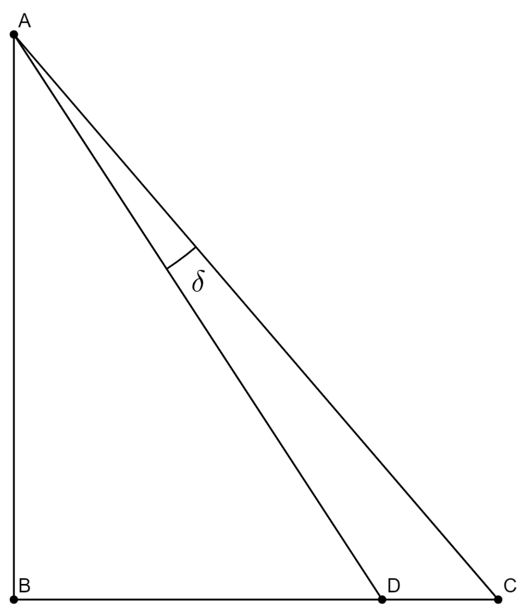


Figura 11: Configuração no plano de ABC.

(d) **(12 pontos)** Com todas informações apresentadas e calculadas, encontre a curvatura δ do horizonte em função de α e φ.

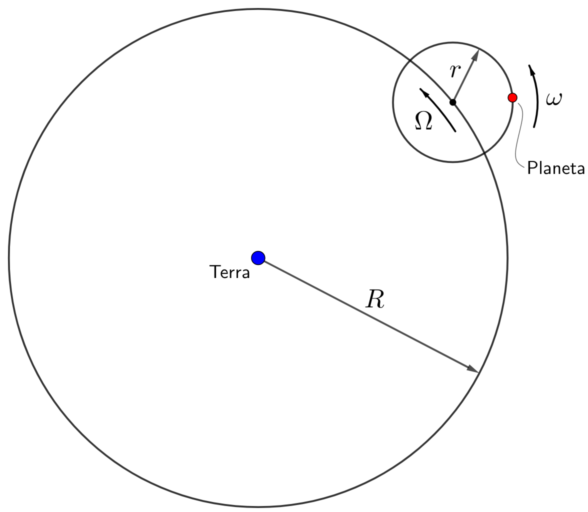
Bom, agora que sabemos a dependência da curvatura do horizonte com a altura, estamos pronto para lançar nossa órbita!

(e) **(13 pontos)** O plano é que a nossa câmera vá do Polo Sul até o Polo Norte, sendo que em algum momento você consiga transmitir uma curvatura de pelo menos 15°. Assim, determine a velocidade mínima de lançamento para que isso seja possível, sabendo que o campo de visão de sua câmera é 40°.

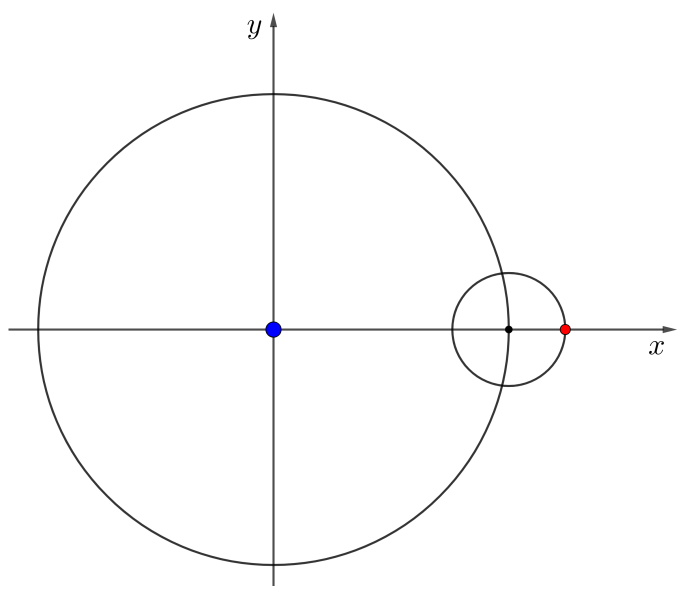
Questões Longas

9. **(60 pontos)** O epiciclo foi um modelo geométrico criado por Ptolomeu que foi usado para explicar as variações de velocidade e direção do movimento aparente da Lua, do Sol e dos planetas.

   Aqui consideraremos que o modelo de Ptolomeu é um modelo geocêntrico em que a orbita de um planeta é composta por uma circunferência de raio R centrada na Terra na qual há um ponto com velocidade angular Ω que é o centro de uma outra circunferência de raio r ($r < R$) na qual o planeta rotaciona com velocidade angular ω, conforme ilustrado na imagem abaixo:



   Para os itens a seguir, é conveniente definir os eixos x e y de tal maneira que a Terra esteja na origem do sistema de coordenadas e que no instante $t = 0$ o planeta se encontre no ponto $(R + r,\ 0)$, como na imagem abaixo:



(a) **(5 pontos)** Prove que se $\omega = 0$ a trajetória descrita pelo planeta no referencial da Terra é uma circunferência com centro deslocado da origem.

(b) **(3 pontos)** Encontre o raio L da circunferência formada pela trajetória descrita no item anterior e as coordenadas (x_c, y_c) de seu centro.

É possível mostrar que se $\omega = -\Omega$, ou seja, se o planeta possuir velocidade angular de módulo igual a Ω e rotacionar no sentido oposto, então a trajetória descrita pelo planeta no referencial da Terra é uma elipse centrada na Terra de semieixo maior a e semieixo menor b.

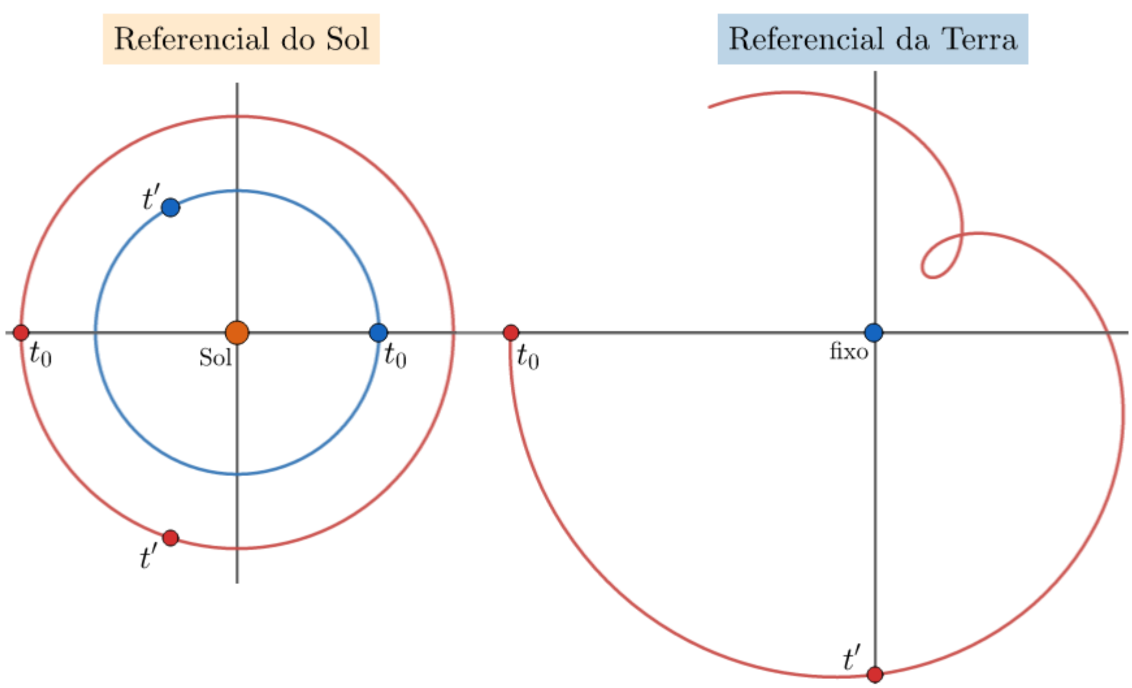
(c) **(7 pontos)** Encontre a e b.

(d) **(8 pontos)** Para esse caso da trajetória elíptica ($\omega = -\Omega$), calcule a velocidade angular máxima w_{max} e mínima w_{min} do planeta em relação à Terra.

(e) **(12 pontos)** Ainda considerando o caso da trajetória elíptica, encontre a função $x(t)$ da coordenada x do planeta em um determinado tempo t e esboce seu gráfico.

Quando criado, umas das principais vantagens do modelo de epiciclos é que ele explicava o movimento retrógrado de Marte, o qual não era previsto no modelo geocêntrico tradicional (Marte realizando uma órbita circular centrada na Terra). Nesse sentido, vamos analisar algumas propriedades de tal movimento.

(f) **(3 pontos)** A imagem abaixo mostra as órbitas, consideradas circulares, da Terra (em azul) e de Marte (em vermelho), nos referenciais do Sol e da Terra. Esboce a figura da direita em sua folha de resolução e aponte os momentos de início e fim do movimento retrógrado de Marte. Indique também o valor da velocidade tangencial de Marte no referencial da Terra em tais instantes.



(g) **(7 pontos)** Encontre uma relação entre os parâmetros R, r, Ω e ω, os quais foram descritos anteriormente, para que exista movimento retrógrado.

(h) **(15 pontos)** Sendo $R = 10$ UA, $r = 3$ UA, $\Omega = 2$ rad/ano e $\omega = 4$ rad/ano, esboce a órbita do planeta nos primeiros 10 anos. Caso exista movimento retrógrado, indique também quantas vezes ele ocorre durante tal período.

10. **(60 pontos)** Em 1948, foi encontrado na cidade de Ugarit, atualmente conhecida como Síria, registros em cerâmica de um eclipse solar total que ocorreu em 1375BC, sendo assim o mais antigo já registrado. Nesta questão, estudaremos os movimentos da Lua e do Sol para compreendermos melhor tais joias da astronomia. Para todos os itens, considere que a órbita da Terra é circular e que a da Lua é elíptica.

  (a) **(12 pontos)** Realizando observações ao longo de cerca de um mês, um astrônomo calcula que o tamanho angular da Lua varia entre $0,55°$ e $0,49°$. Sabendo disso, calcule a excentricidade e o semieixo maior da órbita da Lua. Para este e os próximos itens, o raio da Terra não deve ser desprezado.

  (b) **(7 pontos)** A imagem abaixo mostra os três tipos de eclipses solares. Calcule qual a distância máxima d que a Lua pode estar da Terra para que um eclipse solar seja total, e não anular.

  (c) **(3 pontos)** Calcule a anomalia verdadeira da Lua durante um eclipse solar no qual a distância Terra-Lua é d, cujo valor foi encontrado no item anterior.

Agora, vamos analisar uma situação na qual a anomalia verdadeira da Lua possui o valor calculado no item anterior. Considere que dois astrônomos, Lago, em Macapá (latitude $0°2'4''$ N e longitude $51°3'60''$ O), e Oitavo, em Quito (latitude $0°13'30''$ S e longitude $78°21'29''$ O), estão observando (com óculos de proteção, claro!) um mesmo eclipse solar. Oitavo nota que a distância zenital da Lua é nula e que ele vê um eclipse solar total. Lago, porém, vê um eclipse solar parcial.

  (d) **(2 pontos)** Desenhe a visão de Lago do eclipse e indique no seu desenho a distância angular entre os centros do Sol e da Lua. Sem nenhuma aproximação, quem aparenta ser maior: o Sol ou a Lua?

  (e) **(8 pontos)** Calcule a distância angular entre os centros do Sol e da Lua quando vistos por Lago. Considere que Lago vê o Sol e a Lua com o mesmo tamanho angular.

  (f) **(5 pontos)** Encontre a distância angular entre os dois pontos de intersecção das bordas do Sol e da Lua. Considere, novamente, que Lago vê o Sol e a Lua com o mesmo tamanho angular.

  (g) **(8 pontos)** Considerando a inclinação da órbita lunar com relação ao plano do equador celeste como nula, mostre que Lago irá ver um eclipse solar anular poucas horas após Oitavo ver o eclipse total e estime o intervalo de tempo entre tais eventos.

Por fim, vamos analisar algumas condições de observabilidade de um eclipse solar alternativo no qual o Sol está infinitamente distante e suas coordenadas equatoriais são iguais às da Lua.

  (h) **(5 pontos)** Sabendo que a declinação da Lua é $20°$, encontre a maior e a menor latitude de um observador terrestre que não consegue ver o Sol.

  (i) **(10 pontos)** Calcule a diferença de longitude dos observadores mais à leste e oeste que não conseguem ver o Sol.