Probabilidade e valor esperado

Acesse o site para mais conteúdos

1 Problema 3 - OBM 2021

Determine todos k tais que existe um inteiro positivo N e α irracional tal que: para todo $n \geq N$, vale que $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é um quadrado perfeito menos k.

2 Solução

2.1 *Resposta e exemplo*

Observe que: $\alpha = \phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ é uma solução. A conferência fica a cargo do leitor, mas pode-se provar isso através da igualade envolvendo a sequência de Lucas: $L_{2n} = L_n^2 - 2$, onde a sequência é definida por: $L_n = \phi^n + \overline{\phi}^n$.

2.2 *Prova que* $k = 3$

LEMA 1: Defina $\alpha^n = x_n^2 - k + e_n$ onde $e_n \in (0,1)$, logo $x_{2n} = x_n^2 - k + 1$, para todo n suficientemente grande.

Proof. Note que:

$$\alpha^{2n} = (x_n^2 - k + e_n)^2$$

$$x_{2n}^2 - k + e_{2n} = (x_n^2 - k + e_n)^2$$

O lado esquerdo é $< x_{2n}^2$ e o lado direito é $> (x_n^2 - k)^2$. Portanto:

$$\Rightarrow x_{2n} > x_n^2 - k$$

$$\Rightarrow x_{2n} \geq x_n^2 - k + 1. \ (1)$$

Por outro lado, o lado esquerdo é $> (x_{2n} - 1)^2$ para n suficientemente grande e o lado direito é: $< (x_n^2 - k + 1)^2$

$$\Rightarrow x_{2n} - 1 < x_n^2 - k + 1$$

$$\Rightarrow x_{2n} \leq x_n^2 - k + 1 \; (2)$$

Unindo (1),(2) temos que $x_{2n} = x_n^2 - k + 1$. □

LEMA 2:Defina $c = k - 1$, portanto é válido que:

$$x_n = \alpha^{n/2} + \frac{c}{2}\alpha^{-n/2} + O(\alpha^{-3n/2}).$$

Este lema pode ser provado através de braçal expansão.

– ***Terminando o problema***

Defina $\beta = \alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2}$, então note que:

$$x_{n+1} = \beta x_n - x_{n-1} + O(\alpha^{-3n/2})$$

Isso decorre do fato de que: $a_n = \alpha^{n/2}$ e $b_n = \alpha^{n/2}$ ambos satisfazerem a recorrência $x_n + 1 = \beta x_n - x_{n-1}$, implicando que sua combinação linear também satisfaz. Além disso, ao somarmos 3 termos da ordem $O(\alpha^{-3n/2})$ o resultado também é $O(\alpha^{-3n/2})$. Desta forma, temos que:

$$\Rightarrow s_n = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n} = \beta + O(\alpha^{-3n/2}).$$

Note que

$$|s_{n+1} - s_n| \geq \frac{1}{x_n \cdot x_{n+1}} = \frac{1}{O(\alpha^{(2n+1)/2})} = \frac{1}{O(\alpha^n)} = O(\alpha^{-n}) > O(\alpha^{-3n/2}).$$

Com isso, temos que $s_{n+1} - s_n$, caso positivo, cresce mais rápido do que o direito, dando uma contradição. Daí, conclui-se que para n suficientemente grande, $s_{n+1} - s_n = 0, \forall n \geq N$. Como o limite de $s_n = \beta + O(\alpha^{-3n/2})$ é β, temos então que para todo $n \geq N$:

$$\frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n} = \beta.$$

Agora, isso implica que: $x_n = A\alpha^{n/2} + B\alpha^{-n/2}$ pra algumas constantes. Agora, usando que: $x_n = \alpha^{n/2} + c/2 \cdot \alpha^{-n/2}$ temos que $A = 1, B = c/2$.

$$\Rightarrow x_n = \alpha^{n/2} + c/2 \cdot \alpha^{-n/2} \; (*)$$

$$\Rightarrow x_{2n} = \alpha^n + c/2 \cdot \alpha^{-n}.$$

Usando que: $x_{2n} = x_n^2 - c$ do lema 1 temos:

$$\Rightarrow \alpha^n + c/2 \cdot \alpha^{-n} = (\alpha^{n/2} + c/2 \cdot \alpha^{-n/2})^2 - c$$

$$\Rightarrow c/2 = (c/2)^2,$$

logo $c = 0$ ou $c = 2$. O segundo caso dá $k = 3$ que é o que desejamos. Se $c = 0$, em (*) teríamos que $x_n = \alpha^{n/2}$, contradição pois x_n é inteiro e α é irracional. Logo, k só pode ser 3.

Defina $\lfloor \alpha^n \rfloor = x_n^2 - k$. Seja $x_n = \alpha^{n/2} + b_n$

$$\Rightarrow \alpha^n = (\alpha^{n/2} + b_n)^2 - k$$

Agora, observe que a ordem de x_{2n} é α^n. Defina y_n tal que: $x_{2n} = \alpha^n + \frac{k-1}{\alpha^n} + y_{2n}$

$$\Rightarrow \alpha^{2n} = (\alpha^n + \frac{k-1}{\alpha^n} + y_{2n})^2 - k + e_{2n}$$

$$\Rightarrow 0 = (\frac{k-1}{\alpha^n})^2 + y_{2n}^2 + 2(k-1) + 2\alpha^n y_{2n} + \frac{2(k-1)y_{2n}}{\alpha^n} - e_{2n}$$