Lista Magna I - Mecânica Celeste

Orientações Gerais

- Os problemas desta lista são designados para a etapa de Barra do Piraí e aos treinamentos de Vinhedo/IOAA. Apesar de ser um conceito subjetivo, cada problema possui uma certa quantidade de * essencialmente proporcional à sua dificuldade;
- Para os problemas que exigirem respostas numéricas, utilize esta tabela de constantes;
- As soluções desta lista não estão finalizadas, mas alguns problemas estão resolvidos no fim deste pdf;
- Por fim, você pode nos contatar diretamente pelos emails bruno.makoto04@gmail.com e otaviocferrari@gmail.com

Problema 1. (PhysCup 2012) ***

Pretende-se lançar um míssel balístico entre duas localidades separadas por um ângulo θ sobre a superfície terrestre. Qual a menor velocidade inicial necessária para isso? Com qual ângulo com relação ao horizonte o míssel deve ser lançado?

Problema 2. (NBPhO 2015) ***

O professor João Caldas está atirando projéteis com velocidade inicial v_0 em todas as direções. Sabendo que o ponto de lançamento dista R de uma estrela de massa M, determine o contorno de todos os pontos que podem ser atingidos por um projétil em tais condições. Considere que v_0 é pequeno o suficiente para que nenhum projétil escape do campo gravitacional da estrela.

Problema 3. (IPhO 2013) ***

Quais são a maior e menor velocidades (com relação ao centro da Terra) que um cometa que orbita o Sol em uma órbita fechada qualquer pode ter quando atinge a superfície terrestre? Considere a órbita da Terra circular.

Problema 4. Áreas na elipse ***

Neste problemas iremos aprender a calcular áreas de seções de uma elipse sem o uso de cálculo integral.

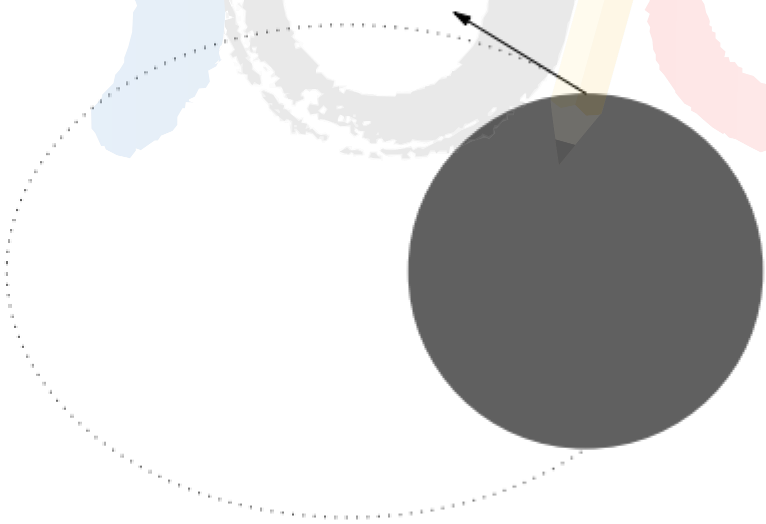
a) Mostre que uma elipse pode ser vista como um círculo esticado, ou seja, caso multiplique-se a coordenada x de cada ponto do círculo por um valor constante m e a coordenada y por um valor n, a figura obtida é uma elipse.

b) Se o círculo possuía raio r e as coordenadas de seu centro eram (x_0, y_0), determine os semieixos maior e menor e as coordenadas do centro da elipse em função de m e n

c) Mostre que a área de uma função $g(x)$ produzida multiplicando a coordenada y de uma função $f(x)$ por uma constante k é k vezes maior que a área de $f(x)$ dentro do mesmo intervalo de valores de x. Use isso para provar que a área de uma elipse é b/a vezes a área de um círculo de raio a.

d) Um objeto lançado verticalmente a partir do solo atinge uma distância D da superfície terrestre antes de retornar. Sendo R o raio da Terra, determine o tempo de voo do objeto. Analise o caso em que $D = R$

Problema 5. (OPhO 2020) ***



Após hackers brasileiros descobrirem que a Rússia estava secretamente guardando a resolução do problema de N-corpos em um banker no Polo Sul, cientistas russos decidem lançar um míssil balístico ao local para acabar com todas os vestígios de tal solução. O projétil é lançado do Polo Norte ao Polo Sul com $v_0 = 2200 m/s$ em um planeta Terra alternativo de massa $M = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg e raio $R = 1.7 \cdot 10^6$ m. Você é selecionado para encontrar o tempo de voo de míssil, sendo que você:

a) Possui acesso ao Wolfram Alpha e consegue calcular integrais insanas

b) Quer testar seus conhecimentos do problema 4

Problema 6. (IPhO 1989) ***

Três planetas, cujas massas são dadas por m_1, m_2 e m_3, estão localizados nos pontos não colineares P_1, P_2 e P_3. Eles interagem entre si somente mediante forças gravitacionais. Os astros estão livres e isolados no espaço, interagindo somente entre si. Considere σ como sendo o eixo que passa pelo centro de massa dos três corpos e é perperndicular ao triângulo $\Delta P_1 P_2 P_3$.

Qual deve ser a velocidade angular do sistema Ω, em relação ao eixo σ, e as distâncias a_{12}, a_{13} e a_{23} para que a forma e o tamanho do triângulo permaneçam inalterados durante o movimento, ou seja, para que o sistema se comporte como um corpo rígido em relação ao eixo σ.

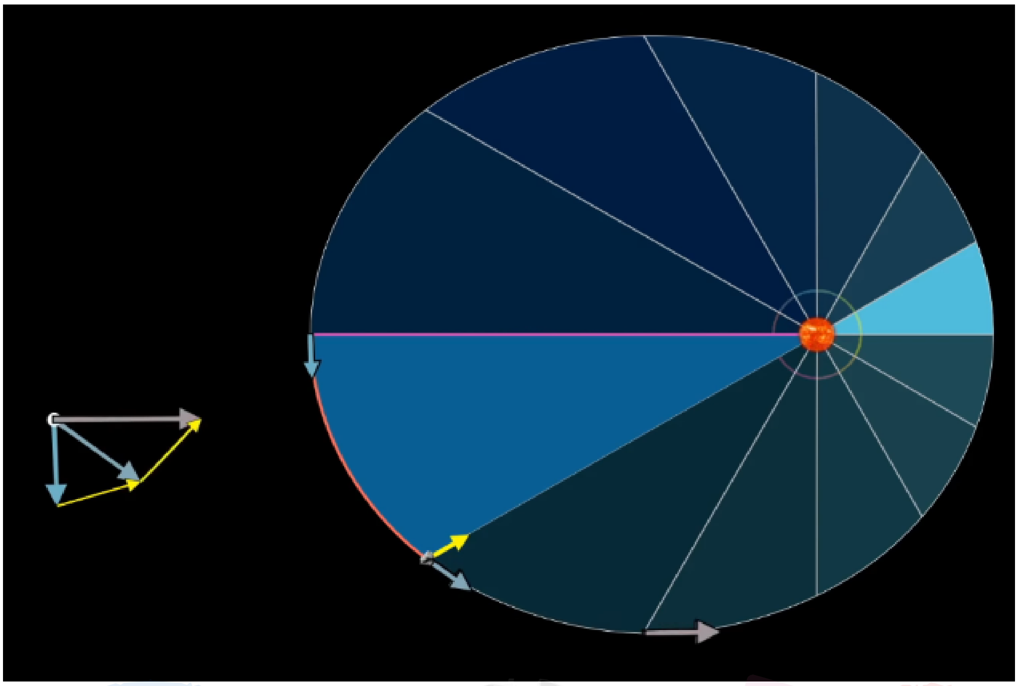
Problema 7. (Feynman's lost lecture) ***

"Elementary means that very little is required to know ahead of time in order to understand it, except to have an infinite amount of intelligence" – Richard Feynman

a) Mostre que, para órbitas que obedecem a lei da gravitação universal, $\frac{dv}{d\theta} = \text{cte}$, onde dv é o módulo da variação infinitesimal da velocidade, $d\vec{v}$, e θ é a anomalia verdadeira. Para onde $d\vec{v}$ aponta?

b) Observe o processo representado na imagem abaixo. Sabendo que cada seção colorida da elipse compreende um mesmo $\Delta\theta$, relacione cada elemento representado com os as variáveis citadas no item a) para provar que, caso o processo seja realizado para toda a elipse, a figura geométrica obtida seria um círculo. Aqui está um link separado dessa imagem

Dica: quanto vale o ângulo entre os dois vetores amarelos mostrados?



c) Calcule o raio e a distância da origem dos vetores velocidade ao centro desse círculo. Considere que a massa central é M, o semieixo maior da órbita é a e sua excentricidade é e.

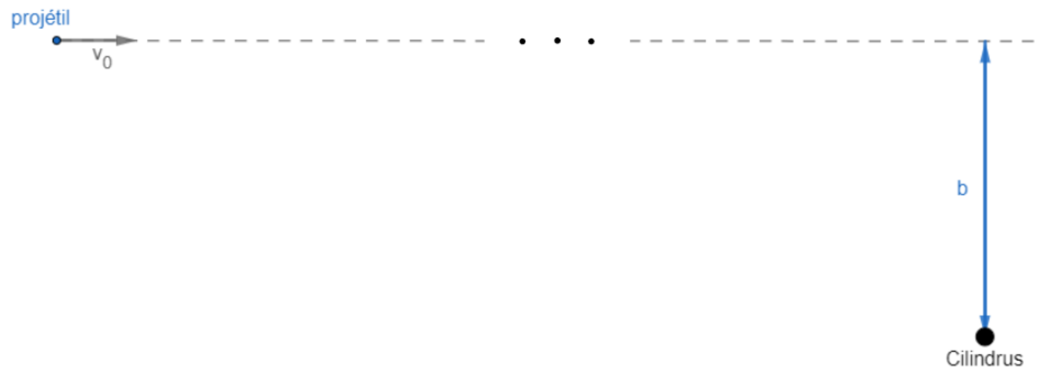
Problema 8. Desvio Angular (IPhO 1993 adap.) ***

Um projétil inicialmente muito distante do Sol (massa M) tem uma velocidade inicial v_0 e parâmetro de impacto b (menor distância entre o projétil e o Sol caso não houvesse atração gravitacional). Assim:

a) Calcule a distância de menor aproximação do projétil com relação ao Sol.

b) Calcule o desvio angular do projétil.

Independente dos itens anteriores, temos uma nova situação representada na imagem abaixo. Nela, temos um longo planeta cilíndrico de densidade linear λ conhecido por "Cilindrus"e um projétil inicialmente muito distante de massa m lançado com velocidade inicial v_0 e parâmetro de impacto b.



c) Sabendo que o desvio angular é pequeno, i.e. você terá que fazer aproximações para chegar em uma resposta analítica, e que o projétil não colide com o planeta, calcule o desvio angular do projétil.

Dica: utilize a lei de Gauss para gravitação.

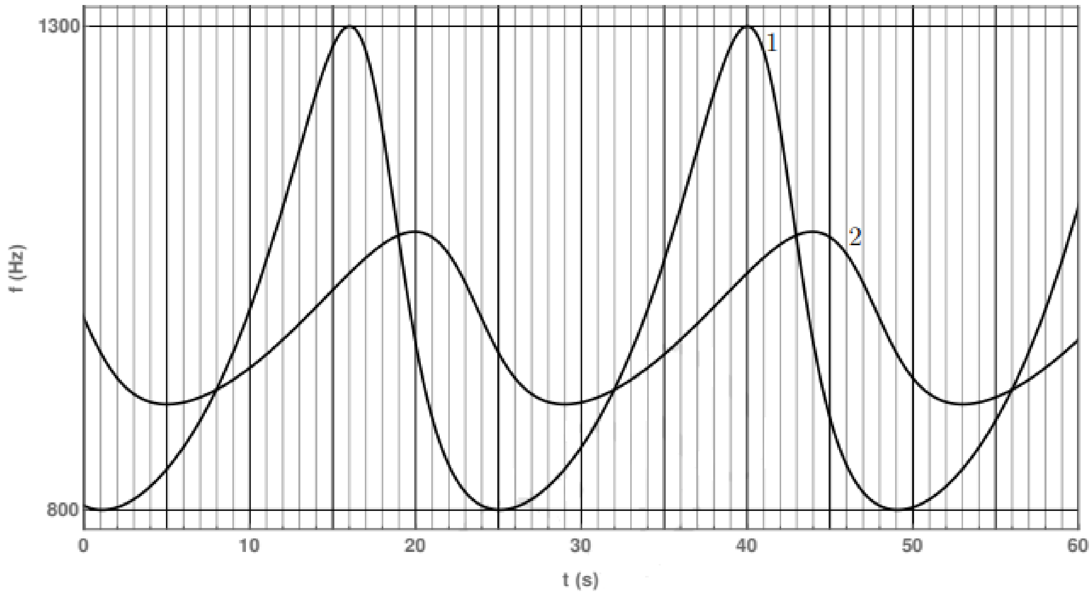
Problema 9. Sistema binário ***

Parte A - parâmetros geométricos

Considere um sistema isolado composto por duas massas, m_1 e m_2, cujas posições relativas ao centro de massa são r_1 e r_2, respectivamente. Considere que

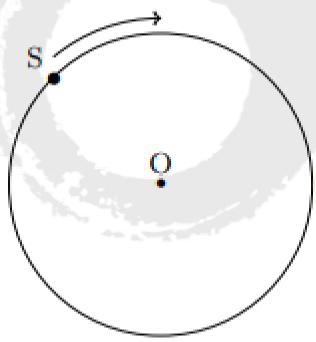
Problema 10. (INPhO 2020) ***

Uma fonte sonora S está realizando um movimento circular uniforme com período T. Ela está continuamente emitindo um som de frequência fixa f_0. Dois detectores 1 e 2 são colocados em posições arbitrárias no mesmo plano da trajetória circular da fonte. A frequência f do som captado por cada detector versus o tempo t pode ser observado no gráfico abaixo. Considere que os relógios dos dois detectores estão sincronizados. Sendo a velocidade do som $v_s = 330 m/s$, determine:



a) O período de rotação da fonte, T

b) A figura abaixo mostra a trajetória circular de S. Qualitativamente marque as posições de ambos os detectores 1 e 2. No centro, o ponto O indica o centro da trajetória. Justique detalhadamente.



c) A frequência f_0 da fonte.

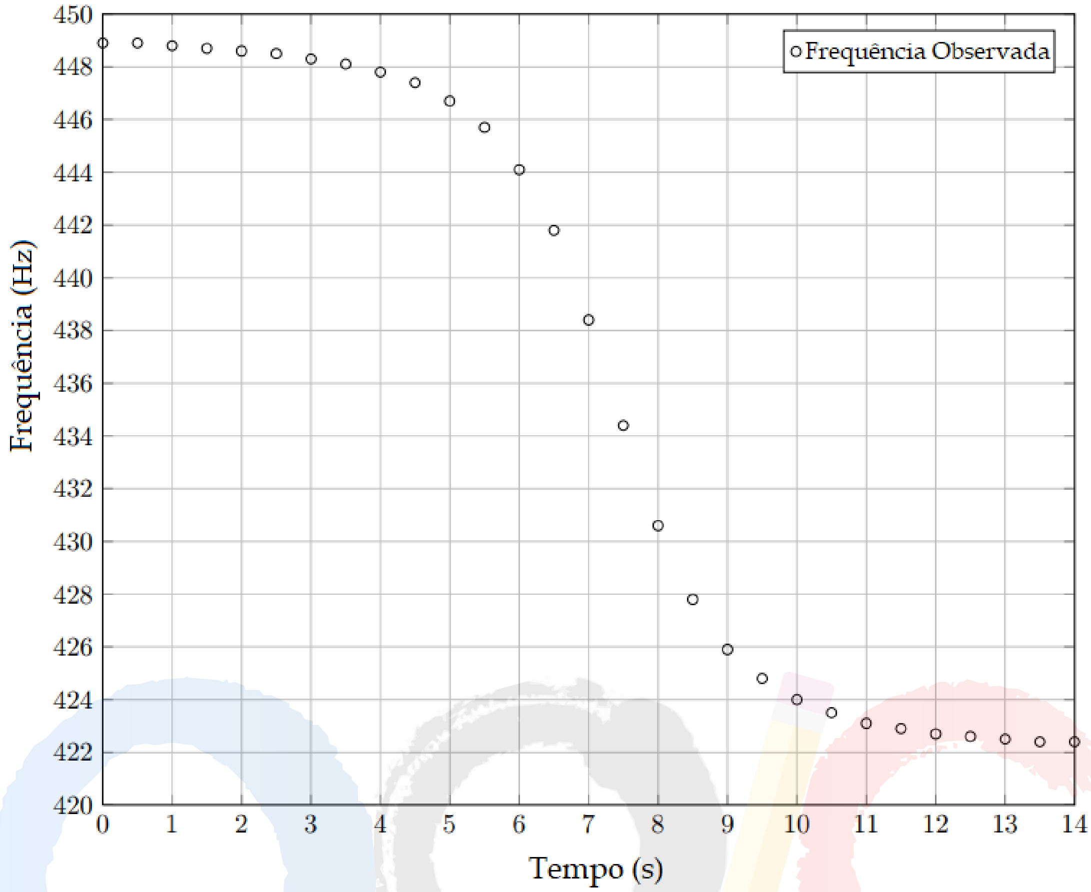
d) A distância D entre os detectores.

Problema 11. (USAPhO 2016) **

Uma fonte sonora de frequência e velocidade constantes passa próxima de um observador parado, este que plota a frequência observada como função do tempo no gráfico abaixo. Sabendo que a velocidade do som no ar é $340 m/s$, calcule:

a) A velocidade da fonte.

b) A distância mínima entre o observador e a fonte.



Problema 12. Leis de Kepler **

a) Prove a terceira lei de Kepler para órbitas circulares assumindo $M \gg m$.

b) Prove a terceira lei de Kepler para órbitas circulares assumindo $M \sim m$.

c) Prove a terceira lei de Kepler para órbitas elípticas assumindo $M \gg m$.

d) Prove a segunda lei de Kepler. Calcule a velocidade areal em termos do momento angular L e da massa do corpo orbitante m ($\ll M$).

e) Prove a primeira lei de Kepler. (Dica: resolva e equação de movimento em coordenadas polares para uma força do tipo $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ em termos da variável $u = \frac{1}{r}$ e do momento angular L)

Problema 13. Elipse go brr **

a) Mostre que a energia total de uma órbita elíptica é $E = \dfrac{-GMm}{2a}$

b) Mostre que o momento angular de uma órbita elíptica é $L = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$

c) Mostre que a velocidade radial de um corpo de massa m ($\ll M$) é máxima no semi-latus rectum. Calcule o valor dessa velocidade.

d) Calcule os raios de curvatura de uma elipse de parâmetros a e b em seus extremos.

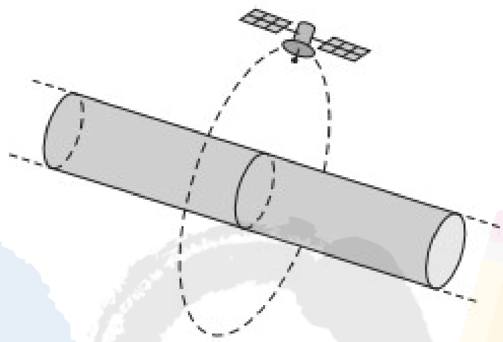
e) Sendo θ a anomalia verdadeira, mostre que:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

f) Sendo α o ângulo medido a partir do centro entre o eixo x e um ponto qualquer, mostre que:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}}$$

Problema 14. (S65M) (200 More PPP - Adaptado) Um planeta longo e cilíndrico chamado Wattson possui um satélite orbitando-o. A densidade média ρ do planeta é igual à da Terra, assim como seu raio R. Assim, calcule:



a) Uma expressão que relaciona o período P com a distância do satélite ao centro do planeta.

A velocidade de escape de um corpo é definida por aquela que, caso seja alcançada, faz com que este corpo fique no infinito com uma velocidade nula. Desta forma ele nunca volta para sua órbita inicial. Sabendo disso analise, possivelmente dando o valor, tais grandezas:

b) A velocidade de escape para um corpo na superfície da Terra.

c) A velocidade de escape para um corpo na superfície de Wattson.

Problema 15. (S62M) Você foi mandado em uma missão para medir a distância entre as estrelas P90 e P10. Você estará passando perto de P10 de tal forma que a atração gravitacional faça com que você a orbite. Sabendo que a velocidade da sua nave em relação a P10 quando a atração gravitacional ainda era desprezível era $v_0 = 30{,}0\,\mathrm{km/s}$ e que, no momento de máxima aproximação, a distância até a estrela valia $d = 0{,}20\,\mathrm{UA}$, calcule:

a) O formato da órbita.

b) O semieixo maior (a) e a metade da distância entre os focos (c) dessa órbita.

Sabendo que P90 está sobre a linha que liga você até P10 durante a máxima aproximação, você esperou para tirar uma foto da estrela P90 sempre que a distância de você até a P10 fosse igual a c, e calculou a diferença angular entre as posições da estrela nas duas fotos com relação às estrelas distantes. Tal valor foi de $\theta = 0{,}05''$.

c) Calcule a distância entre as duas estrelas.

Dado: a massa de P10 é $M_{P10} = M_\odot$.

Problema 16. (S59M) Em uma elipse com semi-eixo maior a e excentricidade e, a distância de qualquer um dos pontos da elipse até seu foco é dada por:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

onde p é uma constante e θ é a anomalia verdadeira.

a) Utilizando a equação acima, calcule o valor de p.

b) Mostre onde p está localizado geometricamente na elipse.

c) Tendo conhecimento da posição de p, encontre, sem utilizar a equação do enunciado, uma expressão para p em função de a e e.

d) Prove a equação dada no enunciado.

e) Calcule o módulo da velocidade v de um corpo de massa desprezível orbitando uma massa M quando $r = p$.

Problema 17. (S57M) Sabendo que a Esfera de Hill de um corpo astronômico é a região no espaço em que sua atração gravitacional domina em relação as perturbações de um corpo central (muito mais massivo), do qual ele orbita. Encontre a expressão para o raio da Esfera de Hill e calcule o raio dessa para a Lua. Se necessário utilize a aproximação: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$.

Problema 18. (S51I) Prove a Terceira Lei de Kepler para um sistema binário.

Problema 19. (S43M - (super) ADAPTADO) Um cometa de massa desprezível com uma órbita elíptica de excentricidade e e semieixo maior a está orbitando uma estrela de massa M.

Pergunta-se:

a) Qual é a variação temporal $\frac{d\theta}{dt}$ da anomalia verdadeira desse cometa?

b) Qual é a variação temporal $\frac{dr}{dt}$ da distância desse cometa até o Sol?

c) Definindo-se o eixo x como o eixo paralelo ao semieixo maior e o eixo y como paralelo ao semieixo menor, encontre uma expressão para a componente $\vec{v}_x$ da velocidade e uma para a componente $\vec{v}_y$. Deixe sua resposta em função da anomalia verdadeira θ.

d) Em qual ponto da órbita v_x é máximo? Em qual ponto v_y é mínimo?

Problema 20. (S35A) Encontre a velocidade de escape a partir do centro de uma nuvem esférica homogênea de massa M e raio R.

Problema 21. (S32M) Num futuro distante, é possível brincar de guerrinha no espaço! Imagine que dois irmãos orbitando a Terra no mesmo sentido em órbitas circulares de mesmo raio, porém com uma inclinação de 30° entre si, acabaram de se encontrar e trocar alguns tiros de paintball e só vão se encontrar novamente daqui a 1,5 h.

Quando os irmãos, de mesma massa, se encontraram, a diversão foi tão grande que um deles acabou sendo desorbitado (seu periélio foi abaixado até a superfície da Terra) e o outro saiu vitorioso. O irmão vencedor, por conservação de momento, elevou seu afélio.

Qual é a excentricidade da nova órbita do irmão vencedor? Considere que o impulso aplicado entre os irmãos foi paralelo à trajetória do perdedor.

Problema 22. (S31A) Qual o tempo necessário para um asteróide de órbita parabólica percorrer 90° na sua órbita a partir do periélio? Deixe sua resposta em função da massa do Sol M e do periélio r_p.

Problema 23. (S24A) Descreva a velocidade v de um foguete fora de ações gravitacionais em função do tempo t, de sua massa inicial m_0, da velocidade inicial v_0 e da velocidade relativa entre o foguete e o combustível u, assumindo que a taxa temporal de massa perdida pelo uso de combustível é constante e de valor k.

Problema 24. Elipse degenerada (P1 T20) **

Problema 25. USAAAO2019 e P2 2020 - Órbita relativa. Um com todas as deduções tbm

---

Soluções

1 solucoes

teste aoba uain

Problema 1. oi

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6. Por conveniência, definiremos a origem de um sistema de coordenadas no centro de massa do sistema. Portanto, nesse caso teremos $\vec{r}_{CM} = 0$, então:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0 \Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0$$

Analisaremos a força resultante $\vec{F}_1$ que atua na massa m_1 devido às atrações gravitacionais de m_2 e m_3. Sabemos que essa força deve ser igual à resultante centrípeta, logo:

$$\vec{F}_1 = -m_1\omega^2\vec{r}_1 = \frac{Gm_1m_2}{a_{12}^2}\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} + \frac{Gm_1m_3}{a_{13}^2}\frac{(\vec{r}_3-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

$$-\omega^2\vec{r}_1 = -\vec{r}_1\left(\frac{Gm_2}{a_{12}^3}+\frac{Gm_3}{a_{13}^3}\right) + \frac{Gm_2}{a_{12}^3}\vec{r}_2 + \frac{Gm_3}{a_{13}^3}\vec{r}_3$$

Pela equação do centro de massa, vimos que:

$$m_2\vec{r}_2 = -m_1\vec{r}_1 - m_3\vec{r}_3$$

Logo, substituindo obtemos:

$$-\omega^2\vec{r}_1 = -\vec{r}_1\left(\frac{Gm_2}{a_{12}^3}+\frac{Gm_3}{a_{13}^3}+\frac{Gm_1}{a_{12}^3}\right) + \vec{r}_3\left(\frac{Gm_3}{a_{13}^3}-\frac{Gm_3}{a_{12}^3}\right)$$

Como o centro de massa do sistema certamente não está localizado entre m_1 e m_3, então $\vec{r}_3$ não possui a mesma direção que $\vec{r}_1$. Logo, a única forma de que uma equação do tipo $a\vec{r}_1 = b\vec{r}_1 + c\vec{r}_3$ ser verdade é se $c = 0$ e, então, $a = b$. Portanto, concluímos que:

$$\frac{Gm_3}{a_{13}^3}-\frac{Gm_3}{a_{12}^3} = 0 \Rightarrow a_{12} = a_{13}$$

Note que se analisássemos a força exercida na massa m_2, a expressão que obteríamos realizando o mesmo raciocínio seria que $a_{12} = a_{23}$ e se analisássemos a massa m_3 teríamos $a_{13} = a_{23}$. Portanto:

$$\boxed{a_{12} = a_{13} = a_{23}}$$

Como essas distâncias são iguais, definirei $a \equiv a_{12} = a_{13} = a_{23}$. Finalmente, podemos calcular ω retornando na equação:

$$-\omega^2\vec{r}_1 = -\vec{r}_1\left(\frac{Gm_2}{a^3}+\frac{Gm_3}{a^3}+\frac{Gm_1}{a^3}\right) \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{a^3}}}$$

Problema 7.

Problema 8.

Problema 9.

Problema 10.

Problema 11.

Problema 12.

Problema 13.

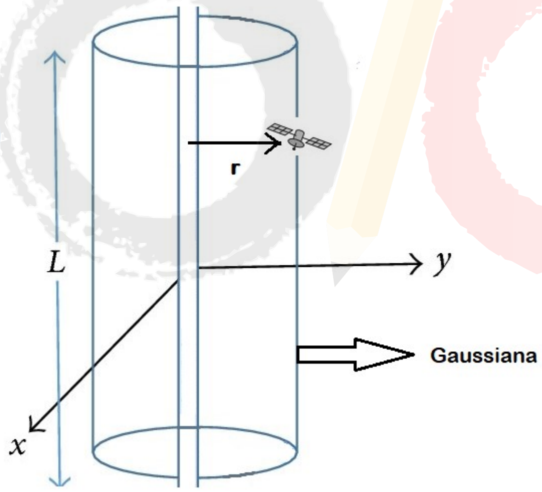
Problema 14. **a)** Para calcular o período, basta calcularmos o valor do campo gravitacional $\vec{g}$ a uma distância r do planeta. Assim teremos a expressão da força gravitacional sentida pelo satélite, que será igual à resultante centrípeta, nos dando o período P desejado.

Calculando o campo gravitacional através do análogo da lei de gauss para gravitação (ver asterisco no final da solução):

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{in}$$

Mas o que equação nos diz? Ela nos dá a integral do fluxo do campo gravitacional sobre uma superfície fechada. Tal superfície é conhecida como superfície gaussiana, e nós podemos escolhê-la. Essa integral é proporcional à massa no interior de tal superfície (M_{in}), sendo $-4\pi G$ o fator de proporcionalidade.

Vendo a figura:



Primeiramente, podemos concluir que o produto escalar $\vec{g} \cdot d\vec{S}$ é simplesmente $-gdS$ pois, por argumentos de simetria, o campo é radial (simetria por reflexão, por exemplo) e o vetor $\vec{g}$ possui sentido oposto ao $d\vec{S}$. Além disso, vemos que a área da gaussiana é simplesmente $S = 2\pi r L$, logo $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -gS = -g2\pi r L$. Temos também que a massa dentro da nossa gaussiana é simplesmente $\rho \pi R^2 L$. Logo:

$$g2\pi r L = 4\pi G \rho \pi R^2 L \Rightarrow g = \frac{2\pi G \rho R^2}{r}$$

Assim, encontramos o módulo da gravidade. Pelos argumentos de simetria sabemos que a gravidade possui sentido radial e sentido oposto a $\hat{r}$, portanto o vetor $\vec{g}(r)$ é:

$$\vec{g}(r) = -\frac{2\pi G\rho R^2}{r}\hat{r}$$

Igualando a força gravitacional à resultante centrípeta:

$$F_g = R_{cp} \Leftrightarrow mg = m\omega^2 r$$

Usando $P = \frac{2\pi}{\omega}$ e substituindo g, temos:

$$\frac{2\pi G\rho R^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{P^2} \Rightarrow \boxed{P = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{2\pi}{G\rho}}}$$

b) Pela definição dada, podemos conservar a energia do corpo nos momentos inicial e final. Repare que após muito tempo o corpo estará no infinito ($U_{gra} = 0$) com velocidade nula ($K = 0$), logo:

$$\frac{mv_{esc,T}^2}{2} - \frac{GM_T m}{R_T} = 0$$

Assim:

$$v_{esc,T} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

c) Novamente, a energia cinética no final será nula, logo basta calcular a diferença de energia potencial ΔU entre o início e o fim (estou utilizando V para o potencial, onde $U = mV$). Sabemos que $\vec{g} = -\nabla V$, logo:

$$V(d) - V(R) = 2\pi G\rho R^2 \int_R^d \frac{1}{r}dr$$

Como a integral de $\frac{1}{x}$ é $\ln(x)$, temos, adicionando limites de integração:

$$V(d) - V(R) = 2\pi G\rho R^2 \ln\left(\frac{d}{R}\right)$$

Logo, pela consevação de energia, a diferença da energia cinética de um corpo de massa m entre R e d deve ser:

$$U(d) - U(R) = K(R) - K(d) = 2\pi Gm\rho R^2 \ln\left(\frac{d}{R}\right)$$

Para que ocorra o escape ($K(d) = 0$ quando $d \to \infty$), devemos ter:

$$K(R) = \frac{mv_{esc}^2}{2} = 2\pi Gm\rho R^2 \lim_{d\to\infty} \ln\left(\frac{d}{R}\right)$$

Note que o limite acima diverge quando $d \to \infty$. Logo, para escapar é necessário uma velocidade de escape tendendo a infinito ($v_{esc} \to \infty$). Em outras palavras, não é possível escapar da atração gravitacional do planeta Wattson (ou de qualquer planeta cujo campo gravitacional caia com o inverso da distância).

*A equação padrão da Lei de Gauss para a eletrostática é:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Note que, trocando $Q \to M$ e $\frac{1}{\epsilon_0} \to 4\pi G$ (compare a lei de coulomb com a lei da gravitação universal para ver o porquê disso) temos o análogo para a gravitação. Há um sinal negativo pois, apesar de cargas de mesmo sinal se repelirem, duas massas de mesmo sinal (positivo? A questão da SAO abaixo brinca com isso) se atraem, logo na notação vetorial alguns sinais se invertem.

** essa questão é um exemplo clássico que apenas introduz a Lei de Gauss na gravitação. Para problemas mais aplicados, recomendo a questão 3 da 5th SAO (2017). Você pode encontrá-la neste link.

Problema 15. **a)** Podemos utilizar o fato de que quando a atração gravitacional era desprezível (energia potencial gravitacional nula), a velocidade da nave em relação à P10 era de $v_0 = 30\,\text{km/s}$ e analisar a energia total da órbita E:

$$E = U_{pot} + K = 0 + \frac{mv_0^2}{2}$$

Como a massa da nave $m > 0$ e o termo quadrático é necessariamente positivo, concluímos que a energia total da órbita é positiva, logo a órbita se trata de uma hipérbole.

b) Como a energia total de uma órbita hiperbólica é $E = +\frac{GMm}{2a}$, onde M é a massa do corpo mais massivo (estamos assumindo $M \gg m$), temos:

$$E = \frac{GMm}{2a} = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow a = \frac{GM}{v_0^2}$$

Como $M = M_{Sol}$ e $v_0 = 30{,}0$ km/s:

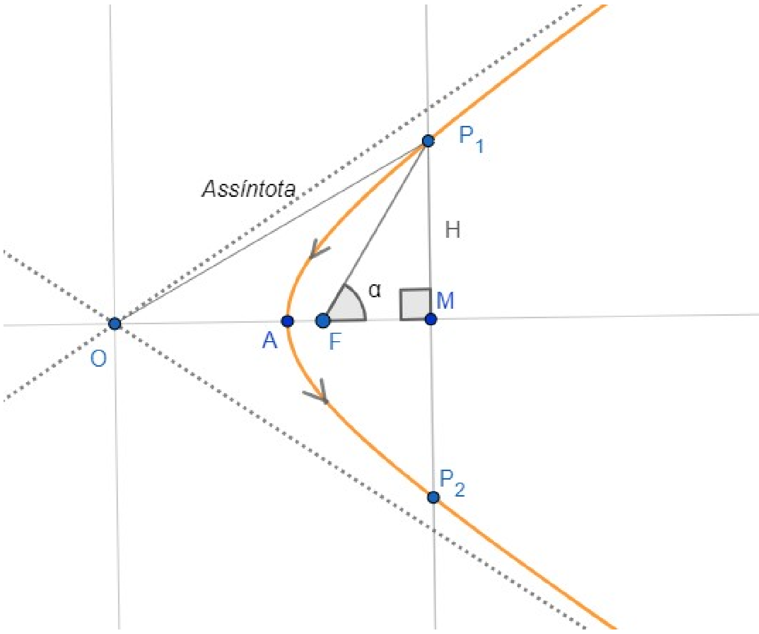
$$\boxed{a = 0{,}983\,\text{UA}}$$

Pela geometria da hipérbole (ver figura), a distância de máxima aproximação $d = AF$ é tal que $d = c - a$, logo:

$$c = d + a \Rightarrow \boxed{c = 1{,}2\,\text{UA}}$$

Atente-se que a resposta final deve ter 2 algarismos significativos, por isso devemos aproximar 1,183 para 1,2, mas podemos utilizar o valor mais preciso (1,183) para proceder com os cálculos.

c) Representando a situação:



Pela geometria da hipérbole:

$$OA = a \qquad \text{e} \qquad OF = c$$

Estamos tratando de uma situação semelhante à da paralaxe vista da Terra, porém com uma órbita hiperbólica ao invés de elíptica! Logo essa paralaxe alternativa tem como propriedade

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{H}{D}$$

em que D é a distância que queremos encontrar. O primeiro passo é encontrar H. A forma polar da hipérbole é:

$$r(\alpha) = \frac{a(e^2-1)}{1-e\cos\alpha}$$

em que $e = \frac{c}{a} = 1{,}20$. Logo, para $r = c = ae$, temos:

$$e\cos\alpha = \frac{1+e-e^2}{e} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1+e-e^2}{e^2}\right) = 58{,}57°$$

Temos então:

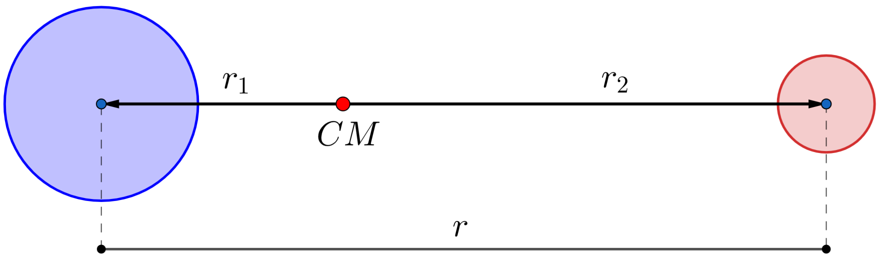
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{H}{c} \Rightarrow H = 1{,}01\,\text{UA}$$

Logo, para $\theta = 0{,}05" = 2{,}424\cdot 10^{-7}$ rad temos $\tan(\frac{\theta}{2}) \approx \frac{\theta}{2}$. Portanto:

$$D = \frac{H}{\frac{\theta}{2}} = \frac{2H}{\theta} \Rightarrow \boxed{D = 40\,\text{pc}}$$

Problema 16.

Problema 17. Em um sistema de dois corpos de massa m_1 e m_2 separados por uma distância r e orbitando o centro de massa do sistema às distâncias r_1 e r_2 respectivamente, temos:



$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot r$$

$$\omega^2 r_2 = \frac{G m_1}{r^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}$$

Agora vamos calcular a distância h do ponto L_1 (Primeiro Ponto de Lagrange) em relação ao centro do satélite (corpo 2), onde as forças gravitacionais de ambos os corpos promovem a aceleração necessária para que um corpo inicie uma orbita circular em torno do centro de massa com a mesma velocidade angular ω dos corpos 1 e 2:

$$F_{cp} = \omega^2 (r_2 - h) = \frac{G m_1}{(r-h)^2} - \frac{G m_2}{h^2} \Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{r^3}(r_2 - h) = \frac{m_1}{(r-h)^2} - \frac{m_2}{h^2}$$

Substituindo a expressão para r_2:

$$\frac{m_1}{r^2} - \frac{m_1 + m_2}{r^3} h = \frac{m_1}{(r-h)^2} - \frac{m_2}{h^2}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{r^2}{m_2}$ e utilizando a aproximação dada no enunciado:

$$\frac{m_1}{m_2} - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{h}{r} = \frac{m_1}{m_2} \left(1 - \frac{h}{r}\right)^{-2} - \frac{r^2}{h^2} \approx \frac{m_1}{m_2} \left(1 + \frac{2h}{r}\right) - \frac{r^2}{h^2}$$

Definindo-se $z \equiv \frac{h}{r}$ e $\rho \equiv \frac{m_1}{m_2}$:

$$\rho - (1+\rho) z = \rho(1 + 2z) - z^{-2} \Longrightarrow z^3 (3\rho + 1) = 1 \Longrightarrow z = \left(\frac{1}{3\rho + 1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$h = r\left(\frac{m_2}{3m_1 + m_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Logo, como $m_1 \gg m_2$:

$$\boxed{h \approx r\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Portanto, para a Lua, o raio da Esfera da Esfera de Hill vale:

$$\boxed{h \approx 6{,}17 \cdot 10^7\, m}$$

Obs.: um satélite estacionário em relação a superfície da Lua ficaria a uma distância teórica $h' = 86500$ km, porém, como $h' > h$, essa orbita não seria possível pois o satélite seria atraído para a Terra.

Problema 18. Para facilitar, podemos utilizar a ideia de órbita relativa para resolver esse problema. Assim, podemos tratar um sistema binário com estrelas de massa m_1 e m_2 (que descrevem órbitas de semieixo maior a_1 e a_2 em torno do centro de massa do sistema) como sendo uma órbita elíptica de semieixo maior $a = a_1 + a_2$ de uma massa $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ em torno de uma massa central $m_1 + m_2$. Essa órbita relativa pode ser tratada similarmente ao caso de uma órbita de uma massa desprezível m ao redor de uma massa central M ($M \gg m$).

Portanto, pela segunda lei de Kepler:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2}$$

em que h é o momento angular específico, dado por $h = \sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}$ e b é o semieixo menor da órbita relativa $b = a\sqrt{1 - e^2}$, logo:

$$\frac{\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{T} = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}{2} \Rightarrow \frac{\pi a^2}{T} = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)a}}{2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e rearranjando a equação:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

Problema 19. a) Podemos encontrar $d\theta/dt$ a partir da velocidade areolar e da regra da cadeia:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{h}{2} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

Alternativamente, poderíamos perceber diretamente que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\perp}{r} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{r^2} = \frac{h}{r^2}$$

Agora, basta finalizar o problema substituindo $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$ e $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, então:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{(1+e\cos\theta)^2}{a(1-e^2)}\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}}$$

b) Basta derivarmos a expressão $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ em relação ao tempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\right] = \frac{-a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2}(-e\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \cancel{\frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2}}(e\,\mathrm{sen}\,\theta)\cancel{\frac{(1+e\cos\theta)^2}{a(1-e^2)}}\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = e\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}}$$

c) A componente horizontal (na direção do eixo x definido) da distância entre o cometa e o Sol é dada por:

$$r_x = r\cos\theta$$

Logo, podemos encontrar a componente horizontal da velocidade do cometa derivando essa distância em relação ao tempo, obtendo:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Agora, podemos utilizar os resultados calculados nos itens anteriores. Antes, para simplificar as contas, definiremos:

$$\mu \equiv \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}$$

De tal forma que temos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(1+e\cos\theta)}{r}\mu \qquad \text{e} \qquad \frac{dr}{dt} = \mu e\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Substituindo essas expressões:

$$v_x = (e \operatorname{sen}\theta \cos\theta - (1 + e\cos\theta)\operatorname{sen}\theta)\,\mu = -\operatorname{sen}\theta\mu$$

$$\boxed{\vec{v}_x = -\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}\,\operatorname{sen}\theta\,\hat{x}}$$

Similarmente, temos para v_y:

$$v_y = \frac{dr_y}{dt} = \frac{d}{dt}[r\operatorname{sen}\theta] = \frac{dr}{dt}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \big(e\operatorname{sen}^2\theta + (1 + e\cos\theta)\cos\theta\big)\,\mu = \big(e(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + \cos\theta\big)\,\mu = (e+\cos\theta)\mu$$

$$\boxed{\vec{v}_y = (e + \cos\theta)\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}\,\hat{y}}$$

d) Primeiramente analisaremos o módulo de $\vec{v}_x$, que é:

$$v_x = \mu\,|\operatorname{sen}\theta|$$

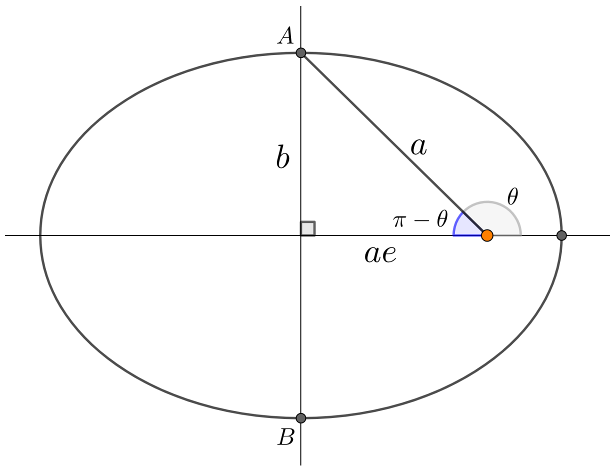
Analisando a expressão de v_x, vemos que o único fator que varia ao longo da órbita é o $|\operatorname{sen}\theta|$. Como $0 \leq |\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, basta verificarmos quais valores de θ que resultam em $|\operatorname{sen}\theta| = 1$, que sabemos que são $\boxed{\theta = 90°}$ e $\boxed{\theta = 270°}$. Portanto, concluímos que os pontos em que v_x é máximo correspondem aos pontos em que o cometa está sobre as extremidades do latus rectum que passa pelo foco em que a estrela está localizada.

Agora, analisaremos o módulo de $\vec{v}_y$, que é:

$$v_y = \mu\,|e + \cos\theta|$$

Note que $0 \leq |e + \cos\theta| \leq e + 1$, logo o valor mínimo de v_y ocorre quando $|e + \cos\theta| = 0 \Rightarrow \cos\theta = -e$, ou seja, os pontos para os quais $\boxed{\theta = \arccos(-e)}$ e $\boxed{\theta = 2\pi - \arccos(-e)}$.

Por fim, podemos esperar intuitivamente que esses pontos correspondem aos pontos em que o cometa está sobre o semi-eixo menor da elipse. Podemos confirmar isso através da figura abaixo:



Temos:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{ae}{a} = e \Rightarrow \cos\theta = -e$$

que é a mesma condição encontrada anteriormente. Note que a anomalia verdadeira do ponto A é $\theta_A = \arccos(-e)$ e por simetria a anomalia verdadeira do ponto B é $\theta_B = 2\pi - \arccos(-e)$. Portanto, concluímos que os pontos em que v_y é mínimo (nulo) correspondem aos pontos em que o cometa está sobre as extremidades do semi-eixo menor da órbita.

Problema 20. Sabemos que para que um corpo possa escapar da influência gravitacional dessa nuvem esférica, é necessário que ele tenha energia mecânica igual a 0:

$$K + U = 0$$

Logo, para encontrarmos a velocidade de escape, basta calcularmos a energia potencial no centro da esfera. Para isso, precisamos lembrar que a variação da energia potencial entre dois pontos é igual a menos o trabalho realizado pela força durante o deslocamento do corpo entre esses pontos, ou seja:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Chamando a energia potencial no centro da esfera de U_c e na superfície de U_s e considerando o ponto inicial como sendo na superfície ($r_i = R$) e o ponto final no centro ($r_f = 0$), temos:

$$U_c - U_s = -\int_R^0 -F\,dr = Gm\int_R^0 \frac{M(r)}{r^2}\,dr$$

em que $M(r)$ é a massa da esfera de raio r, ou seja:

$$M(r) = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

Mas ρ é dado por:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Logo:

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M$$

Substituindo na expressão, obtemos:

$$U_c = U_s + \frac{GMm}{R^3} \int_R^0 r\, dr = U_s - \frac{GMm}{R^3} \frac{R^2}{2} = U_s - \frac{GMm}{2R}$$

Sabemos que $U_s = -\frac{GMm}{R}$, logo:

$$U_c = -\frac{3}{2} \frac{GMm}{R}$$

Finalmente, podemos calcular a velocidade de escape v_e no centro da esfera sabendo que a energia mecânica deve ser nula:

$$K_c = -U_c \Rightarrow \frac{mv_e^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{GMm}{R} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{3GM}{R}}}$$

Problema 21.

Problema 22. Podemos calcular o intervalo de tempo lembrando que a velocidade areolar é dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \Delta t = \frac{2m}{L} \Delta A$$

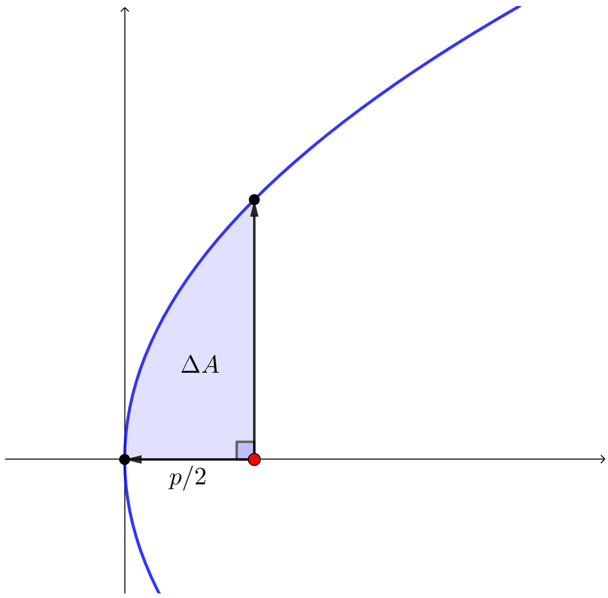
E o momento angular é:

$$L = mrv \operatorname{sen} \theta = mr_p v_p = mr_p \sqrt{\frac{2GM}{r_p}} = m\sqrt{2GMr_p}$$

Logo:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{GMr_p}} \Delta A$$

Portanto, basta encontramos a área varrida nessa intevalo de tempo. Para isso, utilizaremos a figura abaixo:



A parábola acima é descrita pela equação $y^2 = 2px$. Para calcular a área ΔA precisamos integrar a função $y = \sqrt{2px}$ de $x = 0$ até $x = p/2$:

$$\Delta A = \int_0^{p/2} \sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p} \int_0^{p/2} x^{1/2}\, dx = \sqrt{2p}\, \frac{2(p/2)^{3/2}}{3}$$

Note que $p/2 = r_p \Rightarrow p = 2r_p$, logo:

$$\Delta A = \frac{2}{3}\sqrt{4r_p \cdot r_p^3} = \frac{4r_p^2}{3}$$

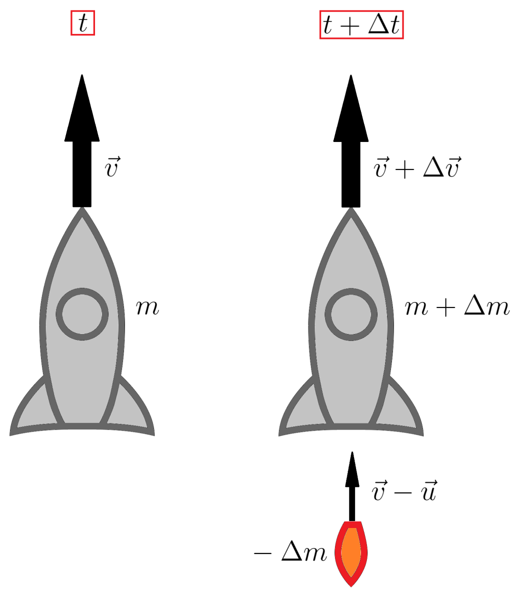
Finalmente, substituindo esse resultado na expressão encontrada para Δt obtém-se:

$$\boxed{\Delta t = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2r_p^3}{GM}}}$$

Problema 23. Analisaremos o movimento do foguete através da conservação do momento linear. Dado que num instante t o foguete tenha massa m e velocidade v, então o momento linear dele nesse instante é simplesmente:

$$P_t = mv$$

Entretanto, após um pequeno intervalo de tempo Δt, o foguete sofrerá uma variação Δm em sua massa e uma variação Δv em sua velocidade, como ilustrado na figura abaixo:



Nesse caso, sabemos que houve uma perda de massa, ou seja, $\Delta m < 0$. Logo, a massa do combustível ejetado é igual a $-\Delta m$, em que o sinal negativo é usado para que seja mantida a coerência de que massa é sempre positiva.

Portanto, o momento linear no instante $t+\Delta t$ do conjunto foguete+combustível ejetado é:

$$P_{t+\Delta t} = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - \Delta m(v - u)$$

$$P_{t+\Delta t} = mv + m\Delta v + \cancel{v\Delta m} + \Delta m\Delta v - \cancel{v\Delta m} + u\Delta m = mv + m\Delta v + u\Delta m + \Delta m\Delta v$$

Podemos desconsiderar o termo $\Delta m\Delta v$ por ser muito pequeno comparado aos outros:

$$P_{t+\Delta t} = mv + m\Delta v + u\Delta m$$

Pela conservação de momento linear, devemos ter $P_t = P_{t+\Delta t}$:

$$P_{t+\Delta t} = P_t \Rightarrow \cancel{mv} + m\Delta v + u\Delta m = \cancel{mv} \Rightarrow m\Delta v = -u\Delta m \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta v} = -\frac{m}{u}$$

No limite $\Delta t \to 0$, temos que $\frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}$. Logo:

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{m}{u} \Rightarrow \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\int_{v_0}^{v_f} dv \Rightarrow v_f - v_0 = -u \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right)$$

Sendo $m_f = m_0 + kt$, temos:

$$\boxed{v = v_0 - u\ln\left(1+\frac{kt}{m_0}\right)}$$

Como $k < 0$, note que temos $v > v_0$, o que é coerente.

Observação: Um possível erro ao resolver essa questão é dizer que a massa do foguete em $t+\Delta t$ será $m - \Delta m$ (fazendo com que a massa ejetada seja Δm) e depois considerar que $\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}$. Isso é incorreto pois se quisermos tratar as pequenas variações como diferenciais devemos manter a coerência de que ao variarmos o tempo em Δt, uma outra grandeza qualquer x passa a ser $x + \Delta x$ independentemente se Δx é positivo ou negativo.

Na realidade, se escrevêssemos que a massa do foguete em $t + \Delta t$ é igual a $m - \Delta m$, teríamos que $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta v} = -\frac{dm}{dv}$. Isso ocorre pois:

$$\frac{dm}{dv} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{m(v+\Delta v) - m(v)}{\Delta v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta v}$$

Ou seja, só podemos dizer que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}$$

se $\Delta m = m(t+\Delta t) - m(t) \Rightarrow m(t+\Delta t) = m(t) + \Delta m = m + \Delta m$.

Caso contrário, se dissermos que $m(t+\Delta t) = m(t) - \Delta m$, teríamos:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t) - m(t+\Delta t)}{\Delta v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-(m(t+\Delta t) - m(t))}{\Delta v} = -\frac{dm}{dv}$$

Problema 24.

Problema 25.