Problema 4 - OBM N3 2021

Acesse o site para mais conteúdos

1. Problema 4

Um conjunto X de números reais, infinito ou não, é limitado quando existe M real tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in X$. Um conjunto A de números reais é enquadrado quando é limitado e, para todos $a, b \in A$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Qual é o menor número real que pertence a algum conjunto enquadrado?

2. Solução por Leonardo Carmo

.

Vamos supor que x é o menor número real que pertence a um conjunto A enquadrado. Dessa forma. temos que $(x-x)^2 = 0 \in A$. Podemos assumir que $x \leq 0$, pois o número 0 pertence a todo conjunto enquadrado. Disso, segue que $x \in A$ e $0 \in A \Longrightarrow (x-0)^2 = x^2 \in A$.

Continuamos com esse processo infinitamente, sempre tomando o número anterior e subtraindo x para formar um novo número em A. No próximo passo, por exemplo, temos que $x^2 \in A$ e $x \in A \Longrightarrow (x^2 - x)^2 \in A$.

Mais formalmente, vamos definir uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de modo que $a_1 = 0$ e para $n \geq 2$ temos $a_n = (a_{n-1} - x)^2$.

Lema 1: Para todo $n \geq 1$, o número $a_n \in A$

Demonstração. A prova é por indução. De fato, temos que $a_1 = 0 \in A$. Suponha que $a_k \in A$. Logo $x \in A$ e $a_k \in A \Longrightarrow (a_k - x)^2 = a_{k+1} \in A$, portanto o resultado segue. □

Nossa ideia é mostrar que para um certo real m, temos que $x < m \Longrightarrow$ essa sequência é ilimitada $\Longrightarrow A$ é ilimitado, contradição pela hipótese do enunciado. Dessa forma, seguiria que $x \geq m$ e bastaria achar um exemplo de conjunto que funcione para m.

Observe que não adianta apenas mostrar que tal sequência é crescente, pois não há uma garantia que ela não tenha um máximo. Afinal, ela pode se aproximar arbitrariamente de um real S. A ideia aqui é mostrar que existe algum real ϵ de modo que $a_{n+1} \geq a_n + \epsilon$ para todo inteiro $n \geq 2$, pois nesse caso:

$$a_{n+1} \geq a_n + \epsilon \geq a_{n-1} + 2\epsilon \geq \cdots \geq a_1 + n\epsilon = n\epsilon$$

De modo que se tomarmos $n \longrightarrow \infty$, teremos $n\epsilon \longrightarrow \infty$ e logo $a_n \longrightarrow \infty$, fazendo com que tal sequência fosse ilimitada.

Vamos definir a sequência $\{\delta_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\delta_n = a_{n+1} - a_n$. Veja que:

$$\delta_n = (a_n - x)^2 - a_n = a_n^2 - (2x+1)a_n + x^2$$

Olhemos para a quadrática $f(y) = y^2 - (2x+1)y + x^2$ em que $x < 0$ é uma constante. O discriminante Δ é:

$$\Delta = (2x+1)^2 - 4x^2 = 4x + 1$$

Observe que se $\Delta < 0$, então $f(y)$ assume um mínimo positivo, digamos que esse mínimo seja $\epsilon_x > 0$. Temos $\Delta < 0 \iff 4x + 1 < 0 \iff x < \frac{-1}{4}$. Segue que se $x < \frac{-1}{4}$ teremos $\delta_n \geq \epsilon_x \implies a_{n+1} \geq a_n + \epsilon_x$ para todo inteiro n. Como dito anteriormente, isso implica que a_n é ilimitada, logo A também é ilimitado, absurdo. Portanto $x \geq \frac{-1}{4}$, e basta construir um conjunto com $\frac{-1}{4}$.

Isso não é tão difícil, veja que no intervalo $I = (\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$ temos que $a,b \in I \implies (a-b)^2 \leq (\frac{1}{4} - (\frac{-1}{4}))^2 = \frac{1}{4}$, portanto I é de fato limitado e enquadrado. $\blacksquare$