SIMULADO OBA
NÍVEL 4

Instruções Gerais

1. A duração da prova é de **três** (3 horas).
2. A prova é composta por 10 questões (totalizando 10 pontos)
3. Autores:
   - Q1: Matheus "CJ"
   - Q2: Murilo Trevisan
   - Q3: Gabriel Hémetrio
   - Q4: Jan Bojan
   - Q5: Gabriel Chalfun
   - Q6: Gabriela Martins
   - Q7: Gabriela Martins
   - Q8: Matheus "CJ"
   - Q9: Gabriel Chalfun
   - Q10: Paulo Portela
4. A prova é individual e sem consultas.
5. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
6. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Como esta prova é um simulado, procure fazer uma solução parecida com aquela que você faria na prova verdadeira.
7. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues e nem serão corrigidas.

1. **(1 ponto)** Vreno Barba de Alho, um pirata intergaláctico, estava em busca de saquear a estação espacial de Brunin Mokotó. Para isso, Vreno precisa checar se Brunin fechou a porta a partir de sua casa em Júpiter. Sabendo que o ladrão tem acesso ao telescópio James Webb, ajude-o a determinar se esse instrumento será suficiente para sanar essa necessidade.

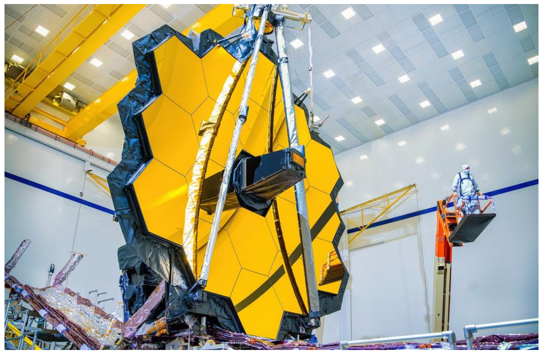


Figura 1: Telescópio Espacial James Webb

Considere que a resolução de um telescópio pode ser calculada utilizando a seguinte relação:

$$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Na qual λ corresponde ao comprimento de onda da luz observada, D ao diâmetro da objetiva do telescópio e θ à sua resolução em radianos. Ajude Vreno a determinar se conseguirá ou não roubar Brunin. Se não for possível, determine qual o diâmetro mínimo aproximado do telescópio necessário para resolver a porta de sua estação.

Dados:

- Resolução necessária $\approx 1,2 \cdot 10^{-6}$ rad;
- Diâmetro do telescópio James Webb $= 6,5$ m;
- Comprimento de onda da luz observada $= 1 \cdot 10^{-5}$ m;

Solução:

(a) Primeiramente vamos analisar a ideia da questão:

Vreno possui um telescópio e quer observar um objeto distante. Devemos então determinar o diâmetro mínimo do espelho do telescópio para conseguir realizar tal observação. Manipulando a equação para isolar D:

$$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{1.22 \cdot \lambda}{\theta}$$

Inserindo os dados do enunciado e realizando o cálculo:

$$\boxed{D \approx 10 \text{ m}}$$

Como $D > D_J$, **não será possível** realizar tal observação com o Telescópio Espacial James Webb, necessitando de um telescópio com um espelho de ao menos 10 metros de diâmetro.

2. **(1 ponto)** Manusleba, uma pesquisadora muito dedicada e curiosa, estava investigando de perto uma supergigante vermelha com sua incrível nave espacial, é claro. Ela, como perita no assunto, sabia que essas estrelas explodiam ao chegar no fim de suas "vidas" (liberando momentaneamente mais energia que galáxias inteiras), mas decidiu correr o risco de observá-la mesmo assim.

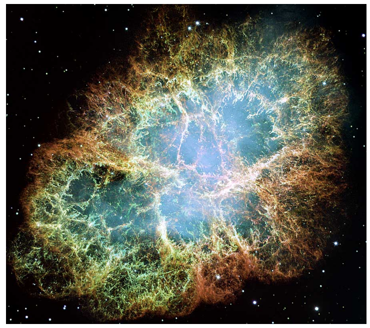


Figura 2: Nebulosa remanescente de supernova

Era um dia comum de estudos para Manusleba, quando subitamente, algo desesperador aconteceu. A estrela, que estava somente a uma distância $d = 1,5 \cdot 10^{11}$ m de nossa pesquisadora, explodiu. Percebendo o perigo iminente, a cientista imediatamente ligou os propulsores de sua nave, que partiu do repouso com aceleração constante $a = 40$ m/s^2, enquanto a nebulosa se expandia com velocidade constante $v = 3,0 \cdot 10^6$ m/s.

(a) **(0,3 ponto)** Manusleba sabia que só estaria segura quando atingisse uma velocidade igual a da explosão. Sendo assim, qual seria a distância percorrida até que ela atingisse tal velocidade?

(b) **(0,4 ponto)** Manusleba conseguiria escapar da supernova?

(c) **(0,3 ponto)** Sabendo que sua nave pesava 50 toneladas, quanta energia precisaria ser liberada pelos motores para a nave atingir a velocidade da explosão?

Dica: A energia cinética de um corpo segue a forma $E_{cin} = \frac{mv^2}{2}$.

Solução:

(a) Para corpos sob aceleração constante, é possível aplicar a equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$

Como a nave parte do repouso, $v_0 = 0$, e assim, para atingir a velocidade da supernova, a distância a ser percorrida é obtida com:

$$v^2 = 2a\Delta S \Rightarrow \Delta S = \frac{v^2}{2a}$$

$$\boxed{\Delta S = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ m}}$$

(b) A maior aproximação entre a supernova e Manusleba será quando sua nave atingir a velocidade da explosão. Isso se deve ao fato de que a partir deste momento, a nave sempre se afastará da supernova. O tempo necessário para atingir tal velocidade é simplesmente $t = \frac{v}{a}$, de tal forma que a supernova viaja uma distância $d' = vt = 2,2 \cdot 10^{11}$ m. Assim, como $d' < d + \Delta S$, a supernova nunca atingirá Manusleba (ufa!).

(c) A energia liberada pelos motores será convertida em energia cinética para a nave, assim, a energia necessária pode ser obtida com $E = E_{cin} = \frac{mv^2}{2}$, em que m deve ser convertido para o SI 50 toneladas $= 5 \cdot 10^4$ kg

$$\boxed{E_{cin} = 2,3 \cdot 10^{17}\ \text{J}}$$

3. **(1 ponto)** Akira Ito, enquanto estudava para a Olimpíada Ibero-Americana de Física, se deparou com diversas afirmações à respeito dos eclipses em seu livro. Quanto às afirmações presentes no livro de Akira, assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

I - Sempre que a Lua está em sua fase de Lua Cheia ocorre um Eclipse Lunar.

II - O Eclipse Solar ocorre quando a Terra está alinhada entre o Sol e a Lua, sendo que a Terra projeta sua sombra na Lua.

III - Se a distância da Terra à Lua fosse maior, o número de eclipses anulares que ocorrem ao longo de um ano aumentariam.

IV - Nos momentos em que o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados, e a Lua está na umbra terrestre, pode-se dizer que ocorre um eclipse lunar total.

V - Se a distância entre a Terra e o Sol aumentasse, e a distância entre a Lua e a Terra permanecesse a mesma, não seria possível dizer se haveriam eclipses solares.

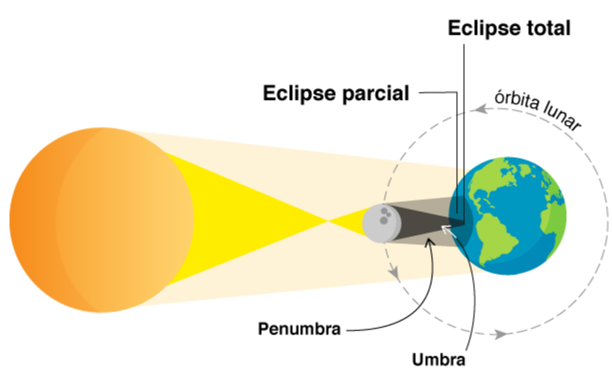
VI - A principal causa pelos eclipses são as forças de maré que são responsáveis pelo movimento da Lua ao redor da Terra.

VII - Não é possível observar eclipses em outros planetas, como Júpiter, já que esse é um fenômeno exclusivo do planeta Terra.

Solução:

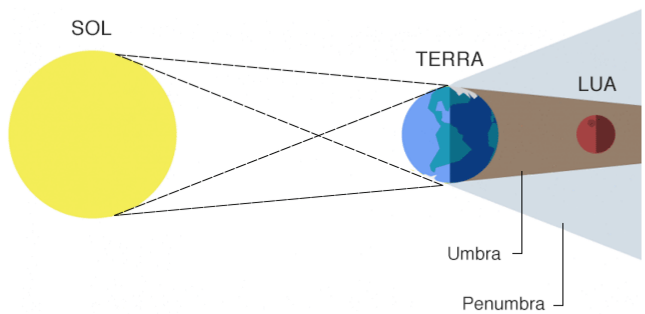
I - Por experiência, sabemos que eclipses lunares não ocorrem todos os meses. Como a lua leva pouco menos de um mês entre uma fase cheia e outra, podemos concluir que nem sempre haverá um Eclipse Lunar quando a Lua estiver cheia. Logo, a afirmativa é **FALSA**.

II - O Eclipse Solar ocorre quando a Lua cobre o Sol para um observador na Terra. Dessa forma, a Lua fica entre a Terra e o Sol, como mostra a imagem a seguir. Na verdade, a afirmativa descreve um Eclipse Lunar. Logo, a afirmativa é **FALSA**.



III - Se a distância entre a Terra e a Lua aumentasse, o tamanho angular da Lua diminuiria. Dessa forma, os eclipse que, na configuração inicial, seriam totais passariam a ser anulares. Portanto, o número de eclipses anulares aumentaria caso a distância entre Lua e Terra fosse maior. Logo, a afirmativa é **VERDADEIRA**.

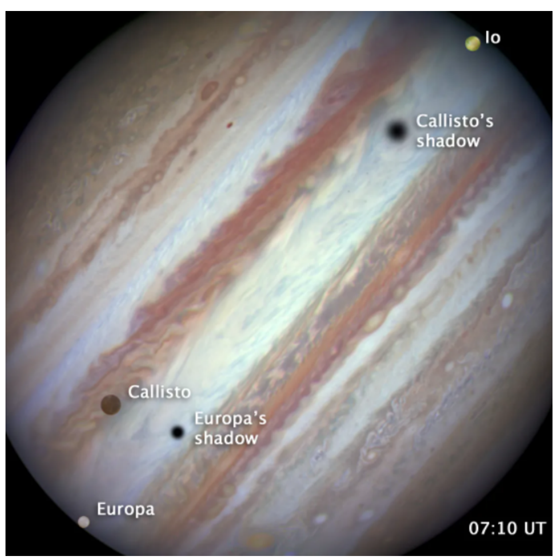
IV - A imagem a seguir ilustra a situação apresentada. Com isso, podemos concluir que, por definição, o eclipse lunar total se dá quando a Lua está na região de umbra da Terra. Logo, a afirmativa é **VERDADEIRA**.



V - Nessa situação, o tamanho angular do Sol diminuiria e o da Lua ficaria constante e maior que o do Sol. Com isso, a Lua continuaria ocultando partes do Sol de tempos em tempos. Logo, a afirmativa é **FALSA**.

VI - Os eclipses são resultados das configurações geométricas entre Lua, Sol e Terra e do comportamento retilíneo da Luz. As formas de maré não estão envolvidas no processo. Logo, a afirmativa é **FALSA**.

VII - Eclipses acontecem em todos os planetas com Luas. A imagem a seguir, mostra eclipses simultâneos em Júpiter. Estes, causados por duas luas diferentes, seriam considerados eclipses solares. Logo, a afirmativa é **FALSA**.



4. **(1 ponto)** Uma coisa curiosa é que quando passamos a luz de uma estrela por um prisma, decompondo-

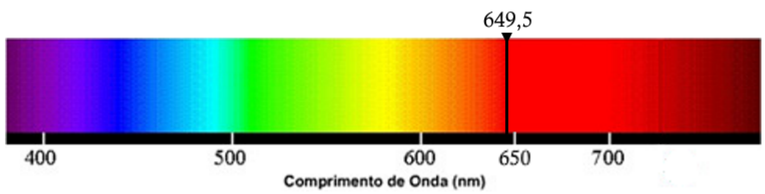
a "no arco-íris"e projetando em algum lugar, como uma folha de papel, podemos perceber a presença de algumas linhas escuras no espectro eletromagnético dessa estrela. A essas linhas é dado o nome de linhas de absorção. O interessante é que cada elemento químico possui um conjunto específico de linhas que ele e apenas ele tem, com um comprimento de onda específico para cada linha.

Essas linhas incrivelmente conseguem nos dizer propriedades da estrela, desde sua composição química até sua velocidade radial (velocidade que a estrela se afasta ou aproxima de nós). A velocidade radial é medida pela diferença percebida entre os comprimentos de onda dessas linhas de absorção para objetos parados na Terra e objetos em movimento no céu, efeito conhecido como Redshift, causado pelo Efeito Doppler. Existe uma fórmula para nos ajudar nos cálculos disso:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_{terra}}{\lambda_{terra}}$$

Em que v é a velocidade radial do objeto, c é a velocidade da luz, λ é o comprimento de onda da linha de absorção do objeto e λ_{terra} é o comprimento de onda da linha de absorção medido na Terra. Adotamos a convenção de que se $v < 0$ o objeto se aproxima do observador e se $v > 0$ o objeto se afasta do observador. (Essa relação não leva em conta efeitos relativísticos, mas considere válida para todos os fins desse exercício).

Jorginho, O Iluminado, ávido pelo céu, acaba de observar uma de suas estrelas favoritas: Vivi, da constelação de Noicus. Ele percebe que a faixa escura conhecida como H_{gabi}, no repouso em 650 nm, está deslocada no espectro de Vivi, podendo ser vista na imagem a seguir:



Jorginho, O Iluminado, sabe que Vivi está a uma distância $d = 12$ pc da Terra, que 1 pc $\approx 3,1 \cdot 10^{13}$ km e que Vivi não possui velocidade tangencial em relação a ele. Com base nessas informações encontre se a estrela está se aproximando ou se afastando de Jorginho, O Iluminado, qual é a sua velocidade radial e quanto tempo (em anos) Vivi levará para se deslocar uma distância d em relação a ele. Considere $c = 3 \cdot 10^5$ km/s e 1 ano $= 3,15 \cdot 10^7$ s.

Solução:

Pelo enunciado vemos que o comprimento de H_{gabi} medido da Terra é de 650 nm e, pela imagem, o comprimento de onda medido de Vivi dessa faixa é de $649,5$ nm. Assim, podemos aplicar a fórmula dada e encontrar a velocidade radial de Vivi:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_{terra}}{\lambda_{terra}} \Rightarrow v = \frac{\lambda - \lambda_{terra}}{\lambda_{terra}} \cdot c$$

$$v = \frac{649,5 - 650}{650} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

$$\boxed{v \approx -231 \text{ km/s}}$$

Perceba que esse é um número negativo, então $v < 0$ e, pelo enunciado, a estrela Vivi está se **APROXIMANDO** de Jorginho, O Iluminado, a 231 km/s.

Com essa velocidade, podemos usar o famoso $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ para encontrar o tempo que leva para Vivi se deslocar uma distância $d = 12$ pc no espaço (perceba que, como a estrela está se aproximando, esse é o tempo que leva para a estrela chegar em Jorginho, O Iluminado):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

$$\Delta t = \frac{12\ \cancel{pc} \cdot 3,1 \cdot 10^{13}\ \cancel{km}/\cancel{pc}}{231\ \cancel{km}/s}$$

$$\Delta t \approx 1,61 \cdot 10^{12}\ \text{s}$$

Como um ano equivale a $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3,11 \cdot 10^{7}$ s, obtemos a resposta em anos através de:

$$\Delta t \approx \frac{1,61 \cdot 10^{12}}{3,15 \cdot 10^{7}}$$

$$\boxed{\Delta t \approx 51000 \text{ anos}}$$

Assim, as respostas que obtemos são: Vivi está se aproximando a 231 km/s e chegará a Jorginho, O Iluminado, (percorrendo a distância d) em aproximadamente 51000 anos.

OBS: Não se preocupe muito se sua resposta na velocidade e no tempo deram um pouquinho diferente. Nesse caso, são aceitáveis respostas próximas desses valores. Por exemplo, usando diferentes aproximações, podemos encontrar 51200 ou 50800 anos, que são igualmente aceitáveis a 51000 anos :D

5. **(1 ponto)** Cristiane, ao deslumbrar o céu estrelado enquanto deitada em seu gramado, resolveu pegar sua câmera 360° e fazer uma foto do céu naquele momento. Obtendo a seguinte imagem:

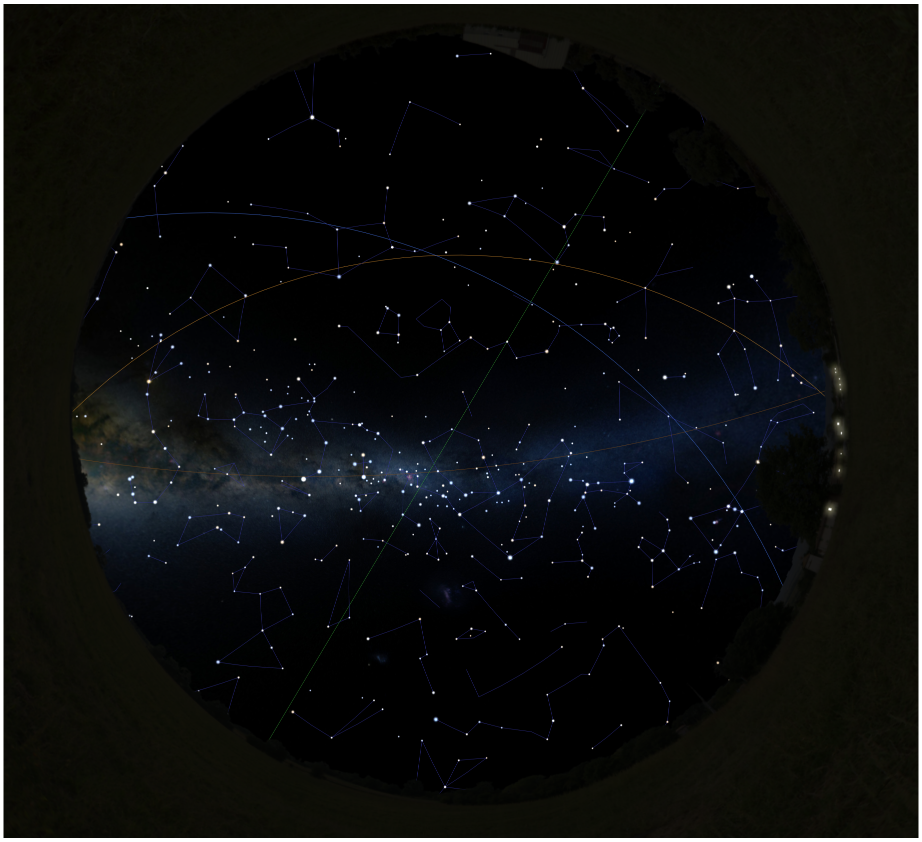


Figura 3: Foto tirada por Cristiane

Além disso, perceba que Cristiane editou a foto colocando as linhas das constelações e alguns elementos importantes da esfera celeste, que possuem seus nomes e descrições embaralhados abaixo:

1 - Meridiano Local
2 - Equador Celeste
3 - Eclíptica
4 - Equador Galático

I - Grande círculo determinado pela trajetória que o Sol aparenta fazer ao longo do ano no céu em relação às estrelas. Os planetas também se encontram perto deste grande círculo.

II - Projeção do Equador terrestre sobre a esfera celeste. O movimento dos astros ao longo do dia aparenta ser paralelo à esse grande círculo.

III - Grande círculo determinado pela projeção da Via Láctea sobre a esfera celeste.

IV - Semi-grande círculo no céu que passa pelo zênite local e pelos pontos cardeais Norte e Sul. É onde os astros atingem sua maior altura no céu.

(a) **(0,2 pontos)** Faça as correspondências dos elementos supracitados com as suas descrições.

(b) **(0,3 pontos)** Identifique cada um deles na foto de Cristiane. (Dica: É uma boa ideia achar o ponto cardeal Sul...)

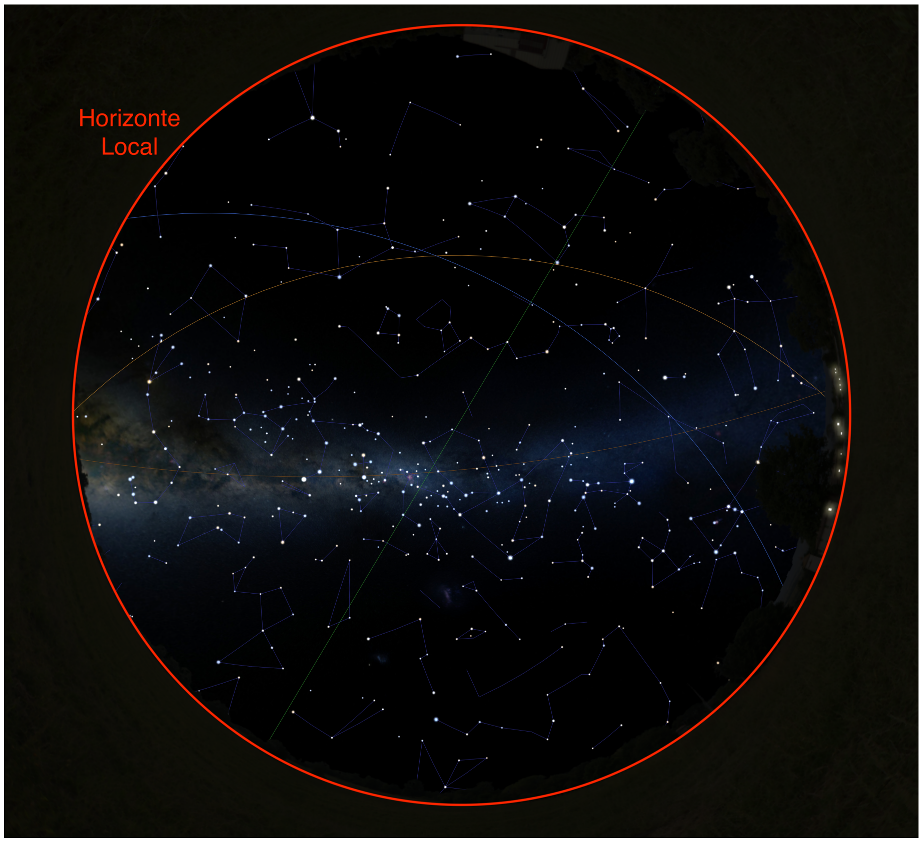
(c) **(0,2 pontos)** Cite 1 constelação passando por cada um deles.

(d) **(0,3 pontos)** Em qual desses elementos se espera encontrar o maior número de estrelas que podem ser vistas à olho nu? Justifique.

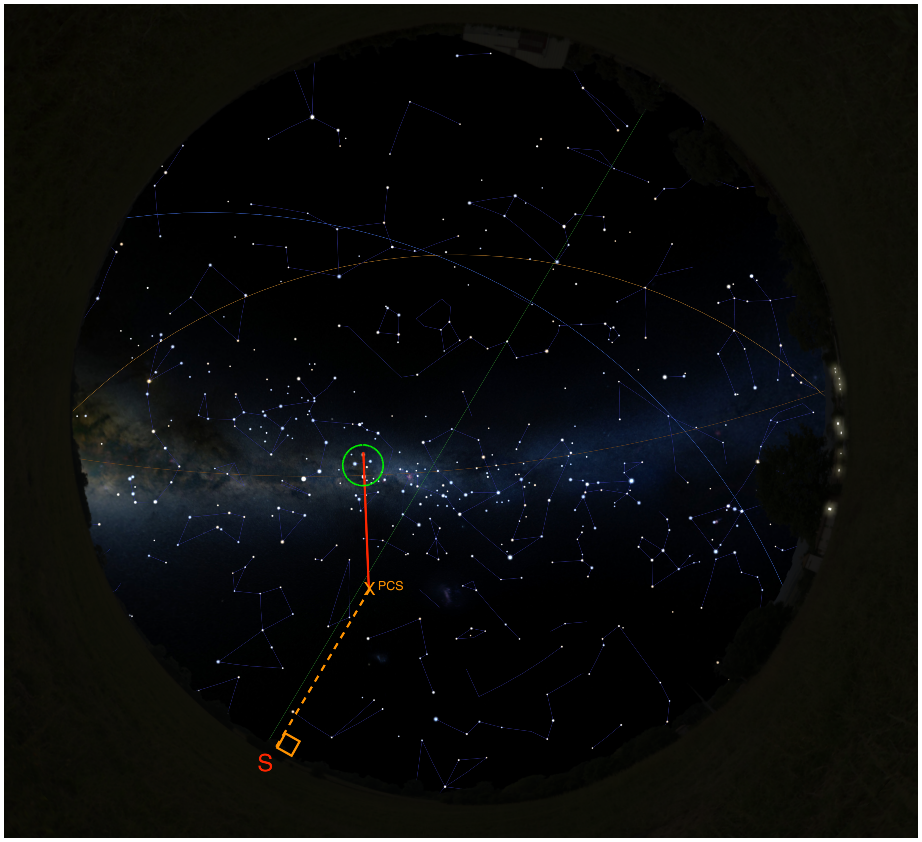
Solução:

(a) 1 - IV ; 2 - II ; 3 - I ; 4 - III

(b) Note primeiramente que a circunferência destacada corresponde ao *horizonte* na foto 360°:

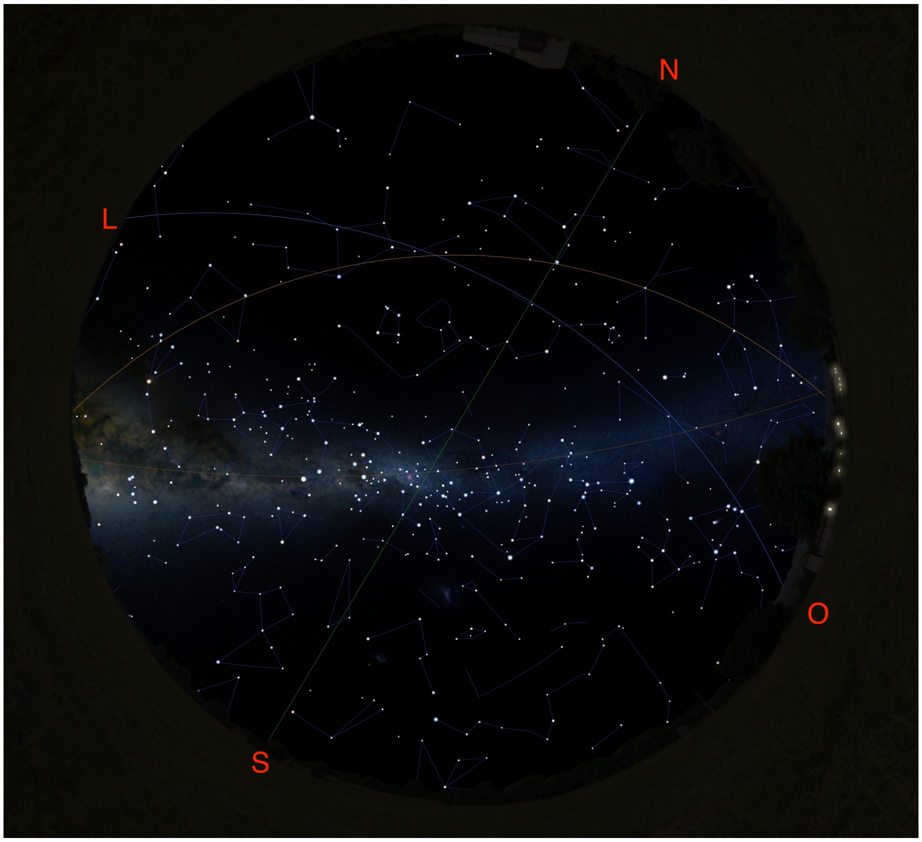


Feito isso, podemos achar o polo celeste sul (PCS) a partir do Cruzeiro do Sul (circulado em verde) estendendo o eixo-maior da constelação em 4,5 vezes. O ponto cardeal sul (S) é achado baixando a perpendicular do PCS ao horizonte:



Achando o ponto cardeal Sul S

Daí, veja que podemos achar todos os outros pontos cardeais. Apenas note que, pela projeção 360° da foto, o Leste está à esquerda do Sul e o Oeste à direita (para entender melhor isso, imagine que você está no zênite olhando a situação de cima; o ponto cardeal leste estará à direita e o oeste à esquerda normalmente...):



Pontos cardeais marcados

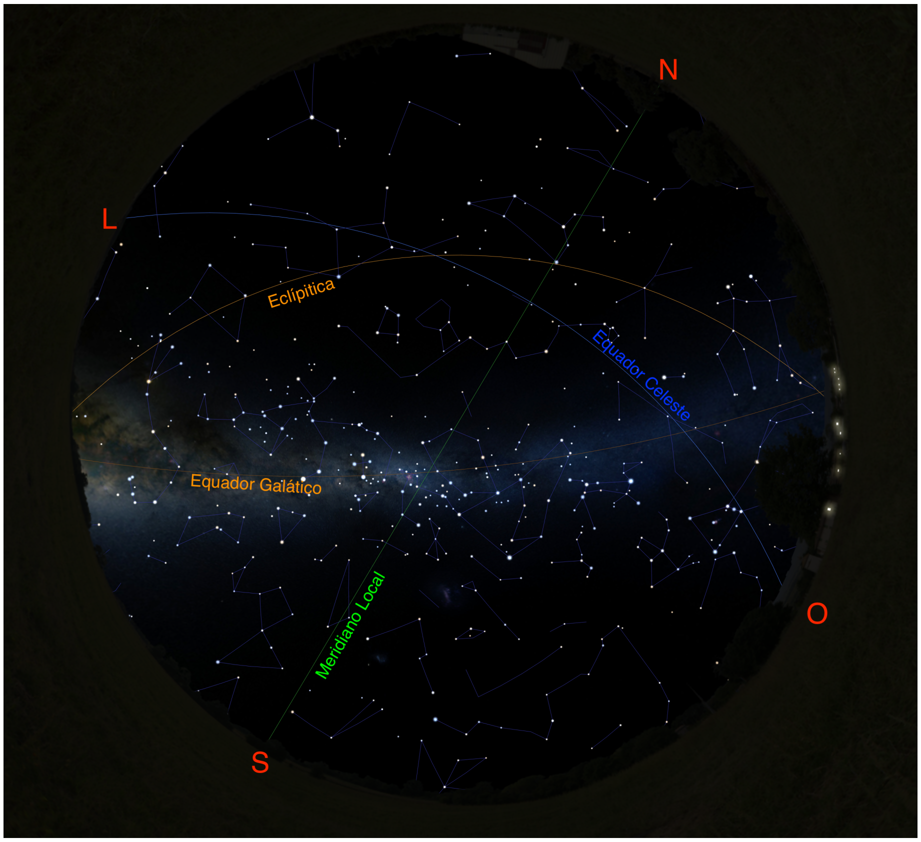
Uma vez que marcamos os pontos cardeais, basta analisar as 4 linhas da figura: O Equador Galático e a Eclíptica podem ser achados sem o uso dos pontos cardeais.

O **Equador Galático** simplesmente é a linha alaranjada que passa pelo braço da Via Láctea. Repare no gás interestelar em azul e parte da clássica imagem do "braço da Via Láctea" à esquerda (busque no Google).

A **Eclíptica** irá passar por constelações do zodíaco, tais como (da esquerda para a direita) Escorpião, Libra, Virgem, Leão, Câncer e Gêmeos.

A linha verde que sai do polo cardeal Sul (na nossa figura, o Sul está um pouquinho deslocado do Sul verdadeiro pois fizemos uma *estimativa* a partir do Cruzeiro do Sul, mas não deixa de estar bem próximo à linha verde) e chega ao ponto cardeal Norte vai ser o **Meridiano Local** pelo item (a).

A linha azul que passa pelo Leste e Oeste será o **Equador Celeste**, pois os astros movimentam-se paralelamente à ele, nascendo na parte Leste e se pondo na parte Oeste (também seria válido achar o Equador por eliminação).



(c) Lembrando que a constelação é uma *área* do céu e não apenas as linhas das constelações, qualquer uma das constelações citadas a seguir para cada elemento será válida:

Eclíptica - Da esquerda para a direita: Escorpião, Libra, Virgem, Leão, Câncer, Gêmeos.

Equador Galático - Da esquerda para a direita: Escorpião, Régua, Compasso, Centauro, Cruzeiro do Sul, Quilha, Vela, Popa, Unicórnio, Órion, Gêmeos.

Meridiano Local - Do sul para o Norte: Tucano, Oitante, Camaleão, Quilha, Popa, Máquina Pneumática, Hidra, Sextante, Leão, Leão Menor, Ursa Maior.

Equador Celeste - Do Oeste para o Leste: Serpente, Virgem, Leão, Sextante, Hidra, Cão Menor, Unicórnio, Órion, Erídano.

(d) Todas as estrelas que vemos à olho nu estão dentro de nossa galáxia. Como a Via Láctea tem um plano preferencial de rotação, o **Equador Galático**, encontraremos a uma densidade de estrelas bem maior nessa nessa região. Para visualizar isso na prática, entre no Stellarium, desabilite o chão - aperte [G], a luminosidade da Via Láctea - aperte [M], e configure a escala de brilho relativa das estrelas para 0.30 - aperte [F4], a configuração da escala relativa está na primeira aba).

6. **(1 ponto)** A atividade solar segue um ciclo de aproximadamente 11 anos caracterizado pela inversão dos polos magnéticos do Sol. O início de um ciclo é dado quando o número de manchas solares no Sol é mínimo, o que significa que o Sol está num momento de baixa atividade. Consequentemente, um grande número de manchas solares indica alta atividade solar. Nesses momentos, é comum a ejeção

de material coronal, o que pode causar uma série de problemas se atingir a Terra.

Com base no gráfico abaixo, classifique as afirmativas abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

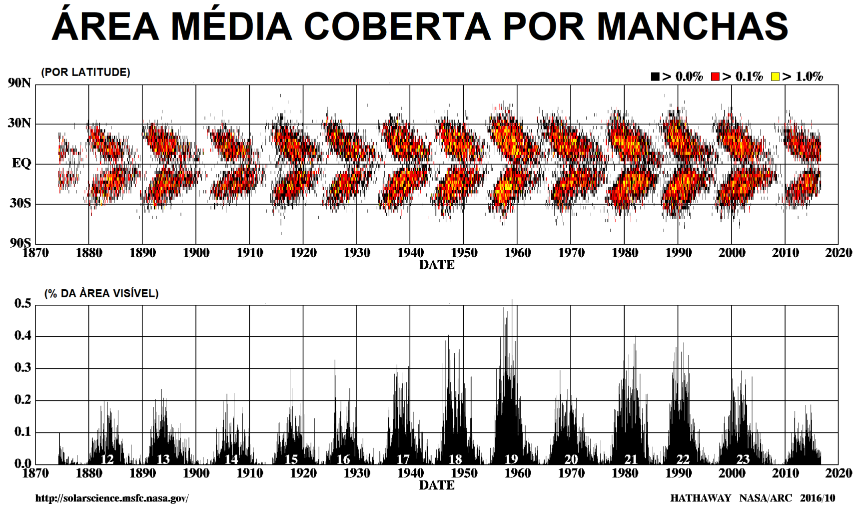


Figura 4: Gráficos que demonstram o ciclo solar

I - A incidência de auroras boreais foi maior em 2009 do que em 2010.

II - Atualmente o Sol está gradualmente ficando mais ativo.

III - O tempo necessário para que os polos magnéticos do Sol voltem a configuração atual é 11 anos.

IV - Quando um novo ciclo inicia, as manchas solares começam a aparecer próximas ao Equador Solar.

V - Em 1894, cerca de 0,25% do hemisfério visível do Sol chegou a ficar coberto de manchas solares, o que diminuiu a magnitude aparente do Sol.

Solução:

I - A ocorrência de auroras boreais é proporcional à atividade solar. Dessa forma, elas serão mais frequentes quanto o Sol estiver bastante ativo. Do gráfico inferior, vemos que a atividade solar em 2010 está gradualmente aumentando. Isso nos leva a concluir que em 2009 o Sol estava menos ativo do que em 2010 e, consequentemente, a incidência de auroras boreais foi menor em 2009 do que em 2010. Logo, a afirmativa é **FALSA**.

II - Do gráfico inferior, vemos que o último pico de atividade ocorreu aproximadamente em 2015. Como o ciclo tem periodicidade de 11 anos, o próximo pico ocorrerá em 2026. Portanto, o Sol continuará ficando cada vez mais ativo até 2026. Logo, a afirmativa é **VERDADEIRA**.

III - Segundo o enunciado da questão, o tempo necessário para os polos inverterem, isto é, o polo magnético sul migrar para o hemisfério norte e o polo magnético norte migrar para o hemisfério sul do Sol, é de 11 anos. Dessa forma, concluímos que o tempo necessário para que eles voltem à configuração inicial é de $11 \cdot 2 = 22$ anos. A figura abaixo mostra isso. Logo, a afirmativa é **FALSA**.

$t = 0$ *anos* $t = 11$ *anos* $t = 22$ *anos*

IV - Segundo o enunciado, os ciclos se iniciam em períodos de baixa atividade. Comparando os dois gráficos, vemos que, no início de um ciclo, as manchas solares aparecem em latitudes intermediárias e migram para o Equador conforme a atividade solar aumenta. Logo, a afirmativa é **FALSA**.

V - Observando o gráfico inferior, vemos que em 1894 o Sol chegou a ter aproximadamente $0,25\%$ de sua área visível coberta por manchas solares. Entretanto, esse evento aumentou a magnitude aparente e não o contrário. Vale ressaltar que, por motivos históricos, magnitudes menores indicam objetos mais brilhantes (*vide* questão 7). Logo, a afirmativa é **FALSA**.

7. **(1 ponto)** Uapyle deseja construir um modelo fiel do Sistema Solar em seu quintal utilizando apenas conceitos fotométricos para obter a distância entre a Terra e alguns astros. De seus tempos de olimpíada, ele lembra que a magnitude aparente m de um astro de fluxo F é dada por

$$m = -2,5 \log \frac{F}{F_0}$$

Onde F_0 é o fluxo de um objeto de magnitude 0, tal que $F_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ W/m². Ele também se recorda que o fluxo é dado por

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Onde L é a potência (ou luminosidade) do objeto analisado e d a distância entre objeto e observador.

(a) **(0,5 pontos)** Ele irá utilizar uma lâmpada de 100 W para representar o Sol. Sabendo que a magnitude aparente do Sol visto da Terra é $m_\odot = -26,74$, determine a distância entre o Sol e Terra no modelo do jovem construtor.

(b) **(0,5 pontos)** Além disso, Uapyle irá utilizar um esfera espelhada que reflete toda a luz incidente para simbolizar a Lua. Sabendo que a Lua, quando cheia, é $4 \cdot 10^5$ vezes menos brilhante que o Sol para um observador na Terra, determine a distância entre Terra e Lua no modelo do Uapyle.

Solução:

Para determinar a posição entre a Terra e outro componente do modelo, é necessário que o fluxo real do astro seja igual ao fluxo do objeto que o representará no modelo. Com isso em mente, podemos resolver os itens da questão.

(a) Sendo d_{T-S} a distância entre a Terra e o Sol no modelo de Uapyle, temos que o fluxo da lâmpada que representa o Sol é:

$$F_S = \frac{100\text{ W}}{4\pi(d_{T-L})^2}$$

Isolando $F = F_S$ da equação para a magnitude tal que $m = m_\odot = -26,74$:

$$m_\odot = -2,5\log\frac{F_S}{F_0} \Rightarrow F_S = F_0 \cdot 10^{\frac{m_\odot}{-2,5}}$$

Igualando as duas equações para o fluxo e isolando d_{T-S} encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{100\text{ W}}{4\pi(d_{T-L})^2} = F_0 \cdot 10^{\frac{m_\odot}{-2,5}}$$

$$d_{T-L} = \sqrt{\frac{100\text{ W}}{4\pi F_0 \cdot 10^{\frac{m_\odot}{-2,5}}}}$$

Substituindo os valores dados no enunciado

$$\boxed{d_{T-L} \approx 0,09\text{ m}}$$

(b) Como apresentado no enunciado, o fluxo é inversamente proporcional à distância ao quadrado, isto é,

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

Denominando d_{T-L} para a distância entre Terra e Lua no modelo e F_L para o fluxo da Lua temos do enunciado que $F_S = 4 \cdot 10^5 F_L$. Portanto, usando a relação de proporcionalidade apresentada:

$$\frac{F_L}{F_S} = \left(\frac{d_{T-S}}{d_{T-L}}\right)^2$$

Isolando d_{T-L} e substituindo os valores encontramos:

$$d_{T-L} = d_{T-S}\sqrt{\frac{F_S}{F_L}}$$

$$\boxed{d_{T-L} = 1,4 \cdot 10^{-4}\text{ m}}$$

8. **(1 ponto)** Em um belo dia, Brunin acordou e foi realizar sua caminhada espacial matinal. Ao sair de sua estação, reparou em um brilho incomum vindo de Júpiter. Entretanto, como estava sonolento, pensou que fosse apenas um sonho. Mesmo após tomar seu café, ele ainda estava perplexo com o fenômeno observado e resolveu apontar seus instrumentos para tal local e elucidar sua curiosidade. Assim que recebeu as imagens de seu telescópio, reconheceu o pirata Vreno Barba de Alho mirando o Telescópio James Webb para sua porta.

Figura 5: Vreno e seu telescópio

Brunin denunciou tal ato à lendária Comechão, a polícia astronômica, forçando Vreno a fugir rapidamente para Zírius B na esperança de que Zírius A, uma estrela extremamente brilhante, ofuscasse seu rastro.

Figura 6: Zírius A e Zírius B

Para a Comechão ir em busca de Vreno eles precisam saber a distância entre as duas estrelas, ou seja, o semi-eixo maior deste sistema binário. Portanto, ajude Brunin a encontrar tal informação.
Dados:

- Período do sistema $\approx$ 50 anos;
- Massa de Zírius A $\approx 2M_{\odot}$;
- Massa de Zírius B $\approx 1M_{\odot}$;
- Excentricidade do sistema $\approx$ 0;

Solução:

Para encontrar tal informação podemos utilizar a 3º lei de Kepler:

$$a^3 = P^2 \cdot M$$

Onde a está em UA, P em anos e M em massas solares. Por se tratar de um sistema binário, $M = M_{Za} + M_{Zb}$), sendo M_{Za} e M_{Zb} as massas de Zírius A e B, respectivamente.

Isolando a:

$$a = \sqrt[3]{P^2 \cdot (M_{Za} + M_{Zb})}$$

Substituindo os dados:

$$a = \sqrt[3]{50^2 \cdot (2 + 1)}$$

$$\boxed{a = 20 \text{ UA}}$$

9. **(1 ponto)** Um conceito bastante importante na astronomia é o chamado tamanho angular, definido como o ângulo compreendido pelos extremos vistos do objeto analisado:

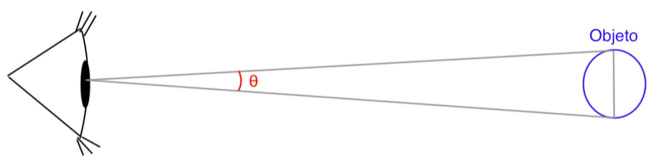


Figura 7: Um objeto qualquer e seu tamanho angular θ

Na astronomia, usualmente estamos lidando com grandes distâncias em comparação ao tamanho dos astros. Então uma boa aproximação é que o arco de circunferência compreendido pelo ângulo θ é igual à corda desse mesmo arco:

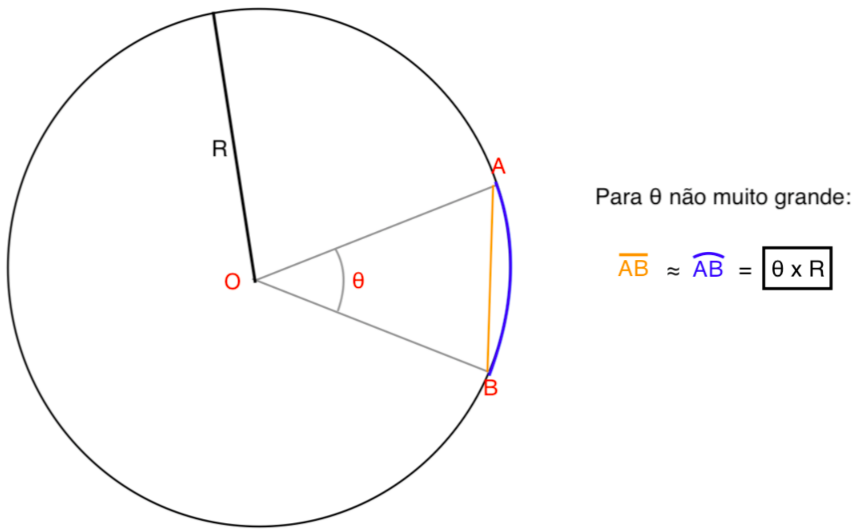


Figura 8: Aproximação do tamanho angular

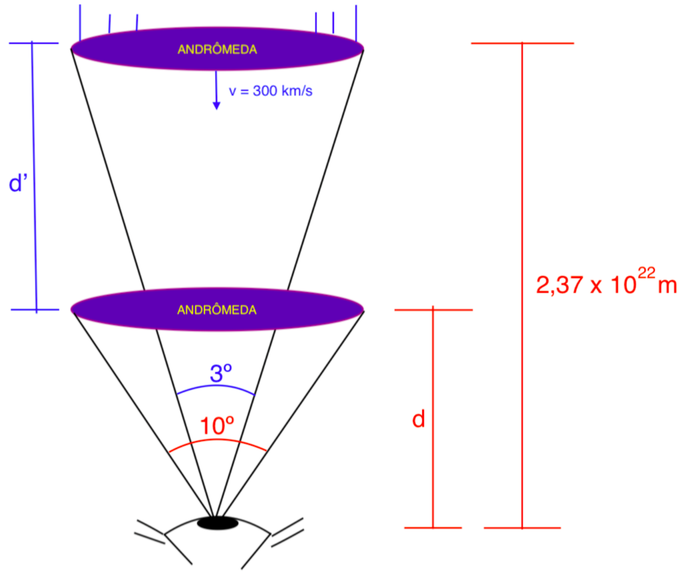
Em outras palavras, o tamanho angular (em radianos) pode ser encontrado dividindo o tamanho real do objeto pela sua distância até o observador.

Sendo assim, verificou-se que a galáxia de andrômeda, a qual possui um eixo-maior com tamanho angular de aproximadamente $3°$ quando observada no céu, está se aproximando de nós a uma velocidade de 300 km/s. Determine em quanto tempo tal eixo-maior terá um tamanho angular de $10°$.
Dados:

- Distância Terra-Andrômeda$= 2,37 \cdot 10^{22}$ m.

Solução:

Temos o seguinte esquema:



Sendo Δt o intervalo de tempo procurado, vemos que a galáxia percorrerá uma distância d' tal que:

$$d' = 2,37 \cdot 10^{22} - d$$
$$d' = v \cdot \Delta t$$

Igualando as duas equações, temos:

$$v \cdot \Delta t = 2,37 \cdot 10^{22} - d$$

Onde $v = 300$ km/s é a velocidade de aproximação de Andrômeda e d sua distância final. Vamos agora encontrar o tamanho físico de Andrômeda. Pelo enunciado, temos que o diâmetro D da galáxia de andrômeda é dado pela seguinte expressão, onde θ_i é o diâmetro angular inicial de Andrômeda, isto é $\theta_i = 3^\circ$:

$$D = 2,37 \cdot 10^{22} \cdot \theta_i \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$
$$D = 1,24 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

Então podemos achar a distância d utilizando a mesma equação, mas agora $\theta_f = 10^\circ$ ao invés de $\theta_i = 3^\circ$, e lembrando de passar para radianos:

$$d = \frac{D}{\theta_f}$$
$$d = \frac{1,24 \cdot 10^{21} \text{ m}}{10\cancel{^\circ} \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{^\circ}}}$$
$$d = 7,11 \cdot 10^{21} \text{ m}$$

Então, substituímos o valor de d na terceira equação apresentada, isolando Δt :

$$v \cdot \Delta t = 2,37 \cdot 10^{22} - d$$

$$\Delta t = \left(\frac{2,37 \cdot 10^{22}\,\mathrm{m} - 7,11 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m}}{300 \cdot 10^{3}\mathrm{m/s}} \right)$$

$$\Delta t = 5,53 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s}$$

Isso é por volta de $\boxed{1,75 \text{ bilhões de anos}}$.

10. **(1 ponto)** A Transferência de Hohmann é uma técnica muito utilizada na astronomia para fazer a transição entre duas órbitas circulares por meio de uma órbita elíptica. Para isso, é necessário fornecer ao objeto 2 impulsos de velocidade: o primeiro faz com que o objeto mude da órbita original para a órbita de transferência e o segundo é responsável pela transição entre a órbita de transferência e a órbita de destino, sendo que esses 2 impulsos ocorrem nos pontos de mínima e máxima aproximação ao corpo central da órbita elíptica.

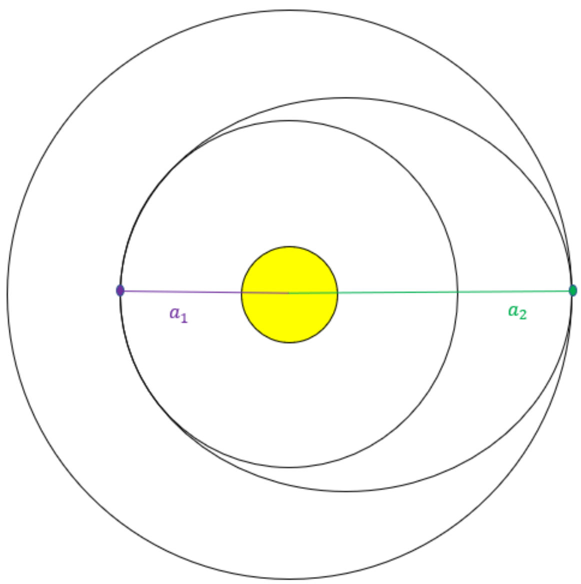
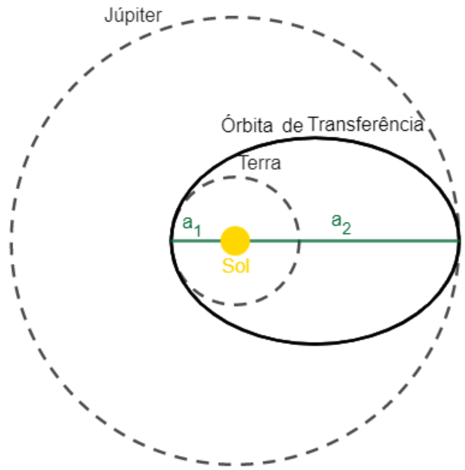


Figura 9: Imagem da Transferência Orbital

Assim, calcule o tempo, em anos, que leva para um satélite lançado da Terra chegar à órbita de Júpiter, executando uma Transferência de Hohmann.
Dados:

- Raio da órbita de Júpiter $= 5,2UA$;

Solução:



Pela questão, temos que $a_1 = 1UA$ e $a_2 = 5,2UA$. Sabendo que o semieixo maior de uma órbita elíptica é dado pela média aritmética das distâncias do afélio e do periélio, podemos calcular o semieixo maior da órbita de transferência:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1 + 5,2}{2} = 3,1\text{UA}$$

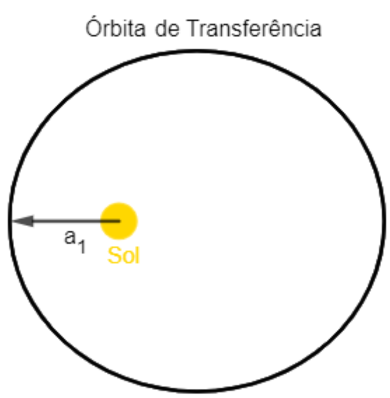
Com o semieixo maior em mãos, podemos calcular o período de um corpo na órbita de transferência pela Terceira Lei de Kepler.
Usando o semieixo maior em UA e o período em *anos*:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \Rightarrow T = \sqrt{a^3}$$

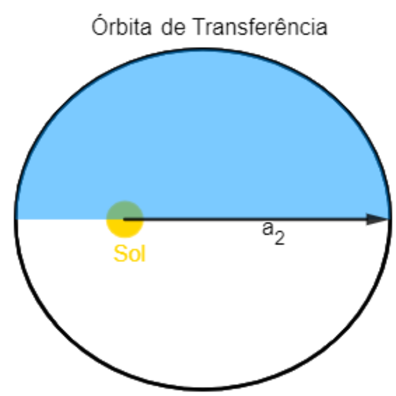
Substituindo o valor encontrado:

$$T = 5,46\,\text{anos}$$

Porém, ao entrar na órbita de transferência, o satélite não completa a translação. Ao invés disso ele percorre só parte da órbita ao redor do Sol



Vetor posição no momento inicial



Área varrida pelo vetor posição

Pelas imagens, percebe-se, pela região azul, que a área que o vetor posição do satélite varre é exatamente metade da área da elipse. Portanto, pela Segunda Lei de Kepler, é possível afirmar que o tempo que o satélite demora para chegar à órbita de Júpiter é metade do período orbital da órbita de transferência. Portanto

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

$$\boxed{\Delta t = 2,73 \text{ anos}}$$