Gabarito

P3 Online

Instruções Gerais

1. Este é o gabarito extra-oficial da P3 das seletivas online, disponível no site da OBA no dia 16 de dezembro de 2022. Esperamos que todos tenham ido bem!
2. Só pra deixar bem claro: esse gabarito não é o oficial feito pela OBA, ok?
3. Comentário sobre a P3: prova difícil e extensa.

1. **(1 ponto)** A Base Scott é uma estação de pesquisa neozelandesa na Antártida, em Pram Point, na Ilha Ross, em uma reivindicação territorial da Nova Zelândia. Foi nomeada em homenagem ao capitão Robert Falcon Scott, líder de duas expedições britânicas para a área do Mar de Ross, na Antártida. A base foi criada como apoio à pesquisa de campo e ao Centro de Pesquisa sobre Ciências da Terra, e agora realiza pesquisas em muitos campos, operados pela Antarctica New Zealand, uma instituição governamental. Suas coordenadas geográficas são: latitude $f = 77°51' S$ e longitude $\lambda = 166°46' L$

   Em um determinado dia, um pesquisador neozelandês desta base mediu a altura mínima que o Sol atingiu acima do horizonte e anotou como $h_{min} = 3°15'$.

   Assinale a alternativa que traz (1) a declinação aproximada do Sol neste dia e, baseado na tabela a seguir, (2) em que dia do ano foi feita esta medida. Para o item (2) arredonde para o dia inteiro mais próximo.

Dia do Mês	NDA	Declinação solar	
15/jan	15	-21,27	
15/fev	46	-13,29	
15/mar	74	-2,82	
21/mar	80	0,00	Equinócio de outono (HS)
15/abr	105	9,41	
15/mai	135	18,79	
15/jun	166	23,31	
21/jun	172	23,45	Solstício de Inverno (HS)
15/jul	196	21,52	
15/ago	227	13,78	
15/set	258	2,22	
20/set	263	0,00	Equinócio de Primavera (HS)
15/out	288	-9,60	
15/nov	319	-19,15	
15/dez	349	-23,34	
20/dez	354	-23,45	Solstício de Verão (HS)
NDA é o número de dia do ano.			

   Considere o Sol como uma fonte puntiforme e ignore a refração atmosférica.

   (a) $-15°24'$ e 7 de fevereiro

   (b) $+15°24'$ e 2 de maio

   (c) $-12°30'$ e 16 de fevereiro

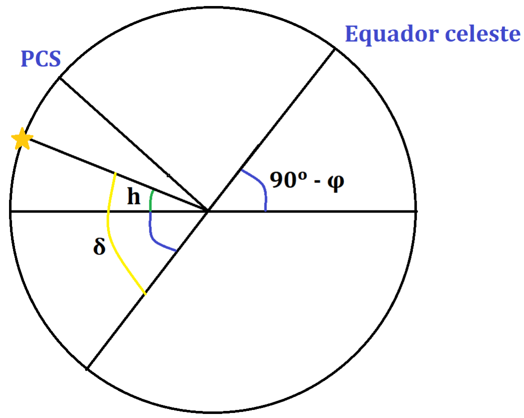
   (d) $+12°30'$ e 23 de abril

   (e) $-15°24'$ e 9 de novembro

Solução:

Na situação de menor altura, o Sol está atravessando o meridiano inferior, logo abaixo do polo visível. A imagem a seguir demonstra essa situação.

Disso, temos que $|\delta| = h + 90° - |\phi|$. Substituindo e sabendo que o Sol está no hemifério sul celeste, temos que $\boxed{\delta = -15°24'}$. Da tabela, vemos que essa declinação pode ser tanto em novembro quanto em fevereiro. Entretanto, fazendo uma regra de três percebemos que a data correta entre as alternativas é 7 de fevereiro.



Alternativa: (a)

2. **(1 ponto)** Considere três estrelas, que vamos denominar de A, B e C e que têm as seguintes propriedades:

   - a estrela A, vista da estrela B, está no limite da visibilidade do olho nu
   - a estrela B, vista da estrela C, está no limite da visibilidade do olho nu
   - a estrela C, vista da estrela A, está no limite da visibilidade do olho nu

   Chamemos as distâncias entre as estrelas A e B de d_1, entre B e C de d_2 e entre C e A de d_3.

   Considere que as magnitudes absolutas de A e B sejam, respectivamente, $M_A = 2,5$ e $M_B = 3,5$ e que o limite de visibilidade de uma estrela para o olho nu seja $m \leqslant 6,0$.

   Marque a opção que traz a magnitude absoluta mínima aproximada da estrela C que satisfaz as condições acima.

   (a) $1,4$

   (b) $4,6$

   (c) $3,5$

   (d) $6,0$

   (e) $1,0$

Solução:

Partiremos da equação de Pogson, que relaciona magnitudes aparente e absoluta de uma uma estrela:

$$m - M = 5log(d) - 5$$

Sabendo que no limite da visibilidade $m = 6,0$, determinaremos as distâncias d_1 e d_2:

$$6 - M_A = 5\log(d_1) - 5 \implies d_1 = 50$$

$$6 - M_B = 5\log(d_2) - 5 \implies d_2 = 32$$

Agora, devemos nos recordar que na condição de existência de um triângulo:

$$d_3 < d_1 + d_2$$

Ou seja, no limite em que M_C é mínima (mais brilhante), d_3 é máxima, logo $d_3 = d_1 + d_2$ (as estrelas estão organizadas em uma linha reta). Com isso, calculamos que:

$$6 - M_C = 5\log(d_3) - 5 = 5\log(d_1 + d_2) - 5 \implies \boxed{M_C = 1,4}$$

Alternativa: (a)

3. **(1 ponto)** As estrelas variáveis pulsantes radiais são estrelas cuja luminosidade varia com o tempo, devido a variações no seu tamanho. Elas podem ser reconhecidas facilmente, observando a sua variação em luminosidade, que se dá de maneira muito regular. Dois tipos de variáveis são importantes como indicadores de distância: as Cefeidas e as RR Lyrae.

   A magnitude absoluta M de uma Cefeida de período P (em dias) pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$M = -1,40 - 2,76\log(P)$$

   Se as Cefeidas podem apresentar períodos de pulsação entre 1,2 e 100 dias, com amplitudes de pulsação entre 0,3 e 3,5 magnitudes, e assumindo que um determinado telescópio possa fazer observações profundas e precisas até magnitude 23, assinale a alternativa que traz a distância máxima que podemos inferir com esta técnica e este telescópio.

   (a) $9,64\ Mpc$

   (b) $758,58\ kpc$

   (c) $838,89\ kpc$

   (d) $5,06\ Mpc$

   (e) $11,07\ Mpc$

Solução:

A distância máxima corresponderá àquela que apresente a estrela mais brilhante, ou seja, de magnitude absoluta mínima:

$$M = -1,40 - 2,76\log(100) = -6,92$$

Utilizando a equação de Pogson:

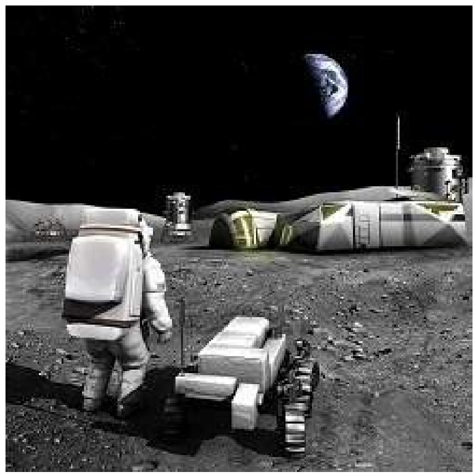
$$m - M = 5\log d - 5$$

$$23 - (-10,4) = 5\log - 5 \implies d = 9,64 \cdot 10^6 pc = \boxed{9,64\,\text{Mpc}}$$

Comentário: Eu particularmente discordo dessa solução, para critérios de observação. Seria necessário que toda a amplitude da variação estivesse contida dentro do limite de 23 mag, afinal sem conseguir medir esses dados não seria possível determinar qual é a magnitude aparente correspondente à magnitude absoluta, calculada com o período de variação.

Alternativa: (a)

4. **(1 ponto)** Considere que a humanidade já tenha uma base permanente na Lua, localizada perto do Mar da Tranquilidade, onde pousou a missão Apollo 11.



Marque V (Verdadeiro) ou F (Falso) na frente de cada afirmação.

I - Para estes colonos as estrelas nascem no horizonte leste e se põe no horizonte oeste da Lua.

II - Para estes colonos, a Terra nasce no horizonte leste e se põe no horizonte oeste da Lua.

III - O céu para estes colonos é idêntico ao céu da Terra.

IV - Por conta da paralaxe, as constelações mais próximas se mostram com uma ligeira deformação.

V - Quando na Terra a Lua estiver em Quarto Minguante, na Lua a Terra também estará em Quarto Minguante.

Solução:

I - A lua rotaciona no mesmo sentido que a Terra. Para perceber isso, note que ela translada no mesmo sentido da rotação do planeta, e como ela se encontra sincronizada por forças de maré, sua rotação também é nesse sentido. Assim, as estrelas irão nascer e se pôr em horizontes similares ao da Terra, Leste e Oeste respectivamente.

II - Note que por efeitos de força de maré, a lua tem sua rotação sincronizada com a translação, ou seja, sempre apresenta a mesma face voltada para a Terra. Consequentemente o planeta não nasce nem se põe no céu.

III - A distância entre a Terra e a Lua é ínfima se comparada a distância até outros astros, consequentemente, o céu não deve sofrer alterações.

IV - As deformações paralácticas não apresentam ordem de grandeza significativa para serem observadas deformando uma constelação.

V - Quando a Terra estiver em Quarto Minguante, a Lua estará se aproximando da metade noturna da Terra, ou seja, a Lua estará se encaminhando a fase Cheia, correspondendo portanto ao Quarto Crescente

Alternativa: V - F - V - F - F

5. **(1 ponto)** No dia 7 de março de 2022, a Equação do Tempo, definida como Tempo Solar Verdadeiro (TSV) menos Tempo Solar Médio (TSM) era de ET = -11 minutos. Neste dia, um morador de uma cidade brasileira observou que o relógio de Sol instalado na praça marcava exatamente 10h00, enquanto o seu relógio de pulso, perfeitamente sincronizado com a hora legal brasileira (Hora de Brasília), marcava 10h20min.

   Sabendo que o meridiano central do fuso horário relativo à Hora de Brasília tem longitude $\lambda_{central} = 45°O$, assinale a opção que traz a cidade onde mora este observador.

   (a) Limeira/SP ($\lambda = 47°15'\ O$)

   (b) Marília/SP ($\lambda = 50°\ O$)

   (c) Nova Aurora/PR ($\lambda = 53°15'\ O$)

   (d) Bom Conselho/PE ($\lambda = 36°45'\ O$)

   (e) Teixeira de Freitas/BA ($\lambda = 40°\ O$)

Solução:

O relógio marca o tempo solar verdadeiro. Logo, $TSV = 10h00m$. Da equação do tempo dada, temos então

$$TSV - TSM = -11\ min \Rightarrow TSM = 10h11m$$

A diferença entre o TSV e a hora no fuso é a diferença de longitude entre a longitude central e a do observador. Portanto,

$$\Delta\lambda = |10h11m - 10h20m| \Rightarrow \Delta\lambda = 00h09m$$

Como o horário local é menor que o do fuso, o fuso está a leste do observador. Dessa forma,

$$\lambda = 45° + 00h09m \cdot 15°/h\ O$$

$$\boxed{\lambda = 47°15'\ \text{O}}$$

Alternativa: (a)

6. **(1 ponto)** Suponha um sistema binário composto por duas estrelas de nêutrons perfeitamente esféricas e idênticas, cada uma com densidade média $\rho = 1,96 \cdot 10^{11} kg/cm^3$ e massa $M = 2,80 \cdot 10^{30} kg$. As duas estrelas giram em uma órbita circular com um período P = 7,75 horas.
   Assinale a opção que traz os valores aproximados para (1) o raio R destas estrelas e (2) o semieixo

maior a, em UA.
Dado: Constante da Gravitação Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

(a) 15 km e $0,013\, UA$

(b) 8 km e $0,013\, UA$

(c) 15 km e $0,026\, UA$

(d) 10 km e $0,006\, UA$

(e) 8 km e $0,026\, UA$

Solução:

Calculando o raio da estrela:

$$\rho V = M$$

$$\rho \frac{4\pi R^3}{3} = M$$

$$\boxed{R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} = 15 \text{ km}}$$

Já para calcular o semi-eixo maior, pode-se utilizar a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Como $M_1 = M_2 = M$, têm-se:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{2\pi^2}{GM}$$

$$\boxed{a = \left(\frac{GMP^2}{2\pi^2}\right)^{1/3} = 0,013 \text{ UA}}$$

Alternativa: (a)

7. **(1 ponto)** O Telescópio VLT do ESO consiste em quatro telescópios, cada um com um espelho primário de diâmetro d = 8,2 m, que pode enviar a luz coletada por cada um deles para um foco comum.

Suponha que o VLT esteja observando uma estrela de magnitude m = 22,0. Assinale a opção que traz a ordem de grandeza (10^n) do número de fótons desta estrela que são coletados pelos quatro telescópios do VLT a cada segundo. Considere que a energia média dos fótons seja $E = 4,8 \cdot 10^{-19}\ J$.

Dados: Magnitude aparente do Sol m = -26,74; Constante Solar = 1.366 W/m^2

(a) 10^4

(b) 10^5

(c) 10^3

(d) 10^6

(e) 10^2

Solução:

O fluxo incidente sobre os telescópios pode ser calculado com a equação das magnitudes:

$$m - m_\odot = -2,5 \log\left(\frac{F}{F_\odot}\right)$$

$$F = F_\odot 10^{-\frac{m-m_\odot}{2,5}} = 136610^{-19,5} = 4,35 \cdot 10^{-17}\ W/m^2$$

O que corresponde a uma potência de:

$$4,35 \cdot 10^{-17} \cdot 4\frac{\pi d^2}{4} = 9,21 \cdot 10^{-15}\ W$$

Cada fóton transporta $4,8 \cdot 10^-19\ J$, logo para atingir tal potência serão necessários $1,92 \cdot 10^4$ fótons por segundo. Correspondendo à ordem de grandeza de $\boxed{10^4}$.

Alternativa: (a)

8. **(1 ponto)** Um telescópio com um espelho de 3,80 metros de diâmetro tem um detetor na faixa do infravermelho, entre os 20 e os 640 micrômetros. Este telescópio foi capaz de detectar, no seu limite de resolução, um disco protoplanetário com um raio de 12 UA em torno de uma estrela. Assinale a alternativa que traz a distância máxima aproximada a que essa estrela pode se encontrar da Terra.
Dado: $1\ pc = 3,086 \cdot 10^{16}\ m$

   (a) $18,20\ pc$

   (b) $9,10\ pc$

   (c) $0,56\ pc$

   (d) $1,12\ pc$

   (e) $6,84\ pc$

Solução:

Nesse caso, pelo critério de Rayleigh:

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{2R}{d}$$

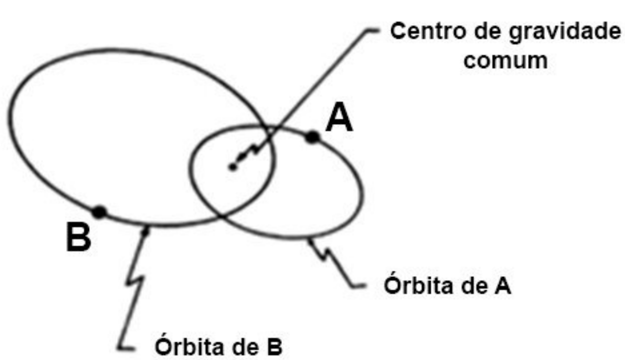
$$d = \frac{2RD}{1,22\lambda}$$

Para maximizar a distância d deve-se minimizar o comprimento de onda, tal que $\lambda = 20\ \mu$m, logo, substituindo os valores:

$$\boxed{d = 18,20\ \text{pc}}$$

Alternativa: (a)

9. **(1 ponto)** Suponha duas estrelas constituindo um sistema duplo, cada uma delas orbitando em torno do centro de massa comum do sistema. Por observações astronômicas, sabe-se que o tamanho angular do semi-eixo maior da órbita relativa verdadeira vale a = 10,0” (segundos de arco), que a distância do binário ao Sol vale r = 2,0 pc e que o período orbital do sistema vale P = 28,2 anos.



Sabendo que uma das estrelas está 4 vezes mais distante do centro de massa comum do que a outra, assinale a opção que traz a massa de cada uma destas estrelas. **Dado:** 1 pc = 206.265 UA

   (a) $M_A = 8,0\ M_{Sol}$ e $M_B = 2,0\ M_{Sol}$

(b) $M_A = 10,0\ M_{Sol}$ e $M_B = 2,5\ M_{Sol}$

(c) $M_A = 22,4\ M_{Sol}$ e $M_B = 5,6\ M_{Sol}$

(d) $M_A = 7,0\ M_{Sol}$ e $M_B = 3,0\ M_{Sol}$

(e) $M_A = 8,9\ M_{Sol}$ e $M_B = 1,1\ M_{Sol}$

Solução:

Podemos encontrar a massa total do sistema em massas solares pela terceira lei de Kepler para sistemas binários:

$$M_t = \frac{a^3}{P^2}$$

$$M_t = 10M_\odot$$

Agora, utilizando a relação massa-distância:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

Como o enunciado diz que uma das estrelas está 4 vezes mais distante que a outra podemos concluir que uma será quatro vezes mais massiva que a outra também. Como descobrimos que a soma das massas é $10M_\odot$ somente a alternativa a) $\boxed{8\ M_\odot}$ e $\boxed{2\ M_\odot}$ pode ser a correta.

Alternativa: (a)

10. **(1 ponto)** Para calcular o campo de visão de um telescópio (FoV), utilizou-se o método de deriva (drift method), ou seja, mediu-se o tempo de passagem de uma estrela diametralmente pelo campo de visão aparente da ocular (AFoV), com o acompanhamento do telescópio desligado.
A estrela escolhida foi Achernar (α Eri), AR = 1h 38min e $\delta = -57°15'$, e o campo de visão do telescópio foi calculado como sendo FoV = 2,46°.
Assinale a opção que traz o tempo total, aproximado, que Achernar levou para cruzar totalmente o campo de visão da ocular.

(a) 18,1 min

(b) 9,8 min

(c) 39,8 min

(d) 11,7 min

(e) 19,4 min

Solução:

Nesse caso:

$$FoV = \omega \Delta t$$

como a declinação da estrela é não nula:

$$\omega = \omega_\oplus \cos\delta$$

Portanto:

$$\boxed{\Delta t = \frac{FoV}{\omega_\oplus \cos\delta} = 18,1\text{ min}}$$

Alternativa: (a)

11. **(1 ponto)** Considere uma estrela variável do tipo RR Lyrae. Os astrônomos determinaram que o seu período de pulsações é de 12 horas, a sua magnitude aparente tem uma variação de $\Delta m = 0,7$ e a razão entre a temperatura no máximo de brilho T1 e no mínimo de brilho T2 é T1/T2 = 1,3.

    Assinale a opção que traz a razão (R1/R2) aproximada entre os raios da estrela no brilho máximo e no brilho mínimo, respectivamente.

    (a) 0,818

    (b) 0,873

    (c) 1,300

    (d) 0,436

    (e) 1,746

Solução:

Utilizando a relação das magnitudes:

$$m_2 - m_1 = \Delta m = -2,5 \log \left(\frac{F_2}{F_1} \right)$$

Assumindo a estrela como um corpo negro, podemos escrever que $F = 4\pi R^2 \sigma T^4 / d^2$, portanto:

$$\Delta m = -2,5 \log \left(\frac{R_2^2 T_2^4}{R_1^2 T_2^4} \right) = 5 \log \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + 10 \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$$

Substituindo:

$$\log \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \frac{0,7}{5} - 2 \log \left(\frac{1}{3} \right) \implies \boxed{\frac{R_1}{R_2} = 0,818}$$

Alternativa: (a)

12. **(1 ponto)** Artemis 1 é o primeiro estágio de uma série de missões projetadas para enviar humanos à Lua como parte do programa Artemis. A NASA lançou com sucesso o Artemis 1 em 16 de novembro, do Kennedy Space Center, na Flórida/USA.

    A cápsula não tripulada Orion do Artemis 1 tem transmitido muitas fotos da Terra e de seu satélite natural e no dia 28 de novembro de 2022 ela capturou esta foto da passagem da Lua na frente da Terra, quando ela se encontrava a uma distância de 432.210 km da Terra. Distância recorde para uma espaçonave projetada para transportar seres humanos.

Assinale a opção que traz quantos quilômetros deveriam se somar aos 432.210 km de distância da Terra para que a Orion pudesse capturar uma imagem da Lua e do nosso planeta com o mesmo tamanho aparente.

Dados: Raio da Terra $R_T = 6.378,1\ km$; Raio da Lua $R_L = 1.737,4\ km$ e Distância centro a centro Terra-Lua $d_{TL} = 384.400\ km$

(a) $96.102,9\ km$

(b) $143.912,9\ km$

(c) $528.312,9\ km$

(d) $240.015,8\ km$

(e) $24.146,4\ km$

Solução:

Nesse caso:

$$\theta_L = \frac{D_L}{d - d_{TL}}$$

e

$$\theta_T = \frac{D_T}{d}$$

Como são iguais:

$$\frac{D_L}{d - d_{TL}} = \frac{D_T}{d}$$

$$d - d_{TL} = \frac{D_L}{D_T} d$$

$$d\left(1 - \frac{D_L}{D_T}\right) = d_{TL}$$

$$d = \frac{d_{TL}}{\left(1 - \frac{D_L}{D_T}\right)}$$

Logo:

$$\Delta d = d - d_0 = \frac{d_{TL}}{\left(1 - \dfrac{D_L}{D_T}\right)} - d_0 = 96.102,9 \text{ km}$$

Alternativa: (a)

13. **(1 ponto)** Considere que para estrelas da Sequência Principal (SP), com massas próximas à do Sol, a relação entre a luminosidade e a massa segue a seguinte lei de potência: $L = kM^4$, onde k é uma constante. Considere, também, que toda a energia liberada ao longo da vida de uma estrela é proporcional à massa dessa estrela. No caso do Sol, o seu tempo de vida na SP é avaliado em de cerca de 10 bilhões de anos.

Para uma estrela da SP, consideramos seu tempo de vida como o seu tempo de permanência na SP t_{SP}, que pode ser calculado em termos do tempo de vida do Sol na mesma fase através da seguinte relação

$$t_{SP} = \frac{E_{SP}^{*}/E_{SP}^{Sol}}{L_{*}/L_{Sol}} \times 10^{10} \; anos,$$

onde E_{SP}^{*} é a energia total liberada durante sua fase na Sequência Principal e L* é a sua luminosidade.

Na tabela a seguir são indicadas as massas das estrelas para tipos específicos de classe espectral. Cada classe de letra é subdividida usando um dígito numérico com 0 (zero) sendo o mais quente e 9 (nove) sendo o mais frio (por exemplo, A8, A9, F0 e F1 formam uma sequência do mais quente para o mais frio).

Para facilitar as contas, suponha que as subclasses espectrais variam linearmente com M, dentro de cada classe.

Classe Espectral	O5	B0	A0	F0	G0	K0	M0
Massa (M_{Sol})	60,00	17,50	2,90	1,61	1,06	0,79	0,51

Se considerarmos que a vida inteligente na Terra demorou, aproximadamente, $4,6 \cdot 10^9$ anos para evoluir, assinale a opção que traz a classe espectral da estrela mais massiva possível, com precisão até ao nível da subclasse, em torno da qual os astrônomos podem procurar por vida inteligente, como nós a conhecemos.

Dicas:

Equacione a relação entre energia e massa; Equacione a relação entre E_{SP} e t_{SP}; Utilize a relação luminosidade-massa para achar a relação entre t_{SP} e a massa da estrela.

(a) F6

(b) F2

(c) F4

(d) F8

(e) A0

Solução:

A energia de repouso armazenada em um corpo é dada por:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Tal que, substituindo o valor obtido na expressão dada no enunciado:

$$\frac{t}{t_\odot} = \frac{M}{M_\odot}\frac{L_\odot}{L}$$

Pela relação Massa-Luminosidade:

$$\frac{t}{t_\odot} = \frac{M}{M_\odot}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^4$$

$$\frac{t}{t_\odot} = \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^3$$

Ou seja:

$$M = \left(\frac{t_{odot}}{t}\right)^{1/3} M_\odot = 1,29\ M_\odot$$

Por fim, consultando a tabela e, realizando uma regra de três simples:

$$1,61 - 1,29 = N\frac{1,61 - 1,06}{10}$$

Logo:

$$\boxed{N \approx 6}$$

E, portanto, a classe espectral necessária é a F6.

Alternativa: (a)

14. **(1 ponto)** Numa futura base lunar, localizada na latitude selenográfica de f = 65° N, um colono resolveu registrar o nascer do Sol. Ele tem uma visão para o horizonte desimpedida, plana e horizontal

Assinale a opção que traz a duração aproximada do nascer do Sol para este observador.

Para simplificar, vamos considerar que a Lua orbita a Terra no plano da Eclíptica e que a rotação em torno do seu eixo seja perpendicular ao plano da sua órbita.

Considere o nascer do Sol como começando quando a borda do Sol começa a surgir no horizonte e termina quando o Sol está completamente acima do horizonte.

Dados:

Diâmetro angular do Sol $\oslash_{Sol}$ = 32,0' (minutos de arco); Período Sideral da Lua P = 27,3 dias; Período Sinódico da Lua S = 29,5 dias.

(a) 2,5 h

(b) 1,1 h

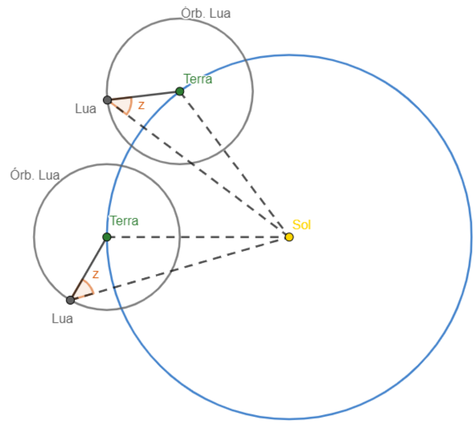
(c) 2,3 h

(d) 1,5 h

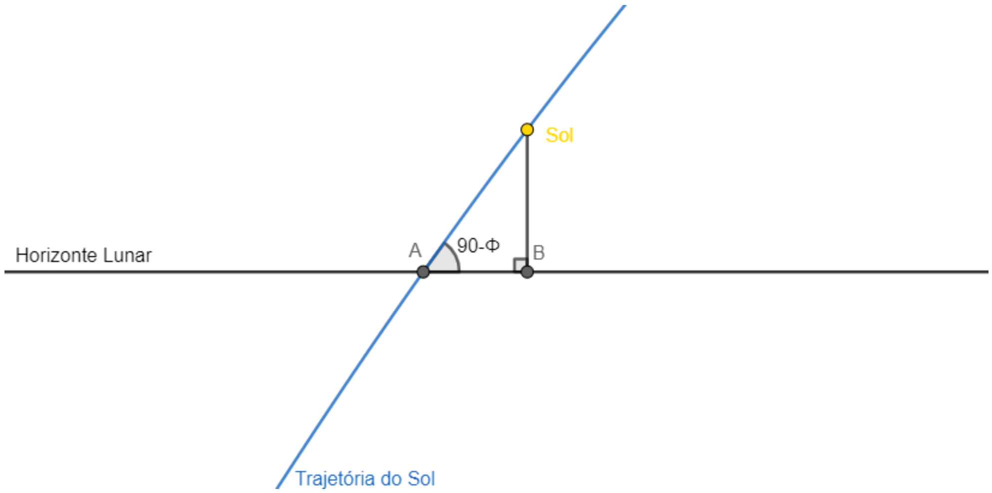
(e) 2,0 h

Solução:

Primeiro, precisamos calcular a velocidade angular ω_s do Sol para um observador na Lua. Para facilitar as contas, consideremos um observador no centro do lado visível da Lua. Assim, o zênite desse observador está contido na reta Lua-Terra.
Considere que o Sol, num certo momento, tem uma distância zenital z. Após o período corresponde a essa velocidade angular, $\frac{2\pi}{\omega_s}$, o Sol estará com distância zenital z novamente.
Esquematizando a situação:



Onde a órbita de cima corresponde, fora de escala, a um período de $\frac{2\pi}{\omega_s}$ após a órbita de baixo. Podemos perceber que os dois triângulos com vértices em Terra-Lua-Sol antes e depois, são congruentes. Com isso, podemos concluir que a configuração orbital entre Terra, Sol e Lua é igual nos dois casos $\Rightarrow$ o intervalo de tempo que passou entre as duas situações é igual ao período sinódico da Lua.
Para um observador na Lua, o Sol terá uma "declinação selenográfica"nula, uma vez que a questão nos diz que o eixo de rotação é perpendicular à eclíptica, ou seja, o Equador da Lua coincide com a Eclíptica.
Assim, para um observador com latitude selenográfica $\phi = 65°; \text{N}$, a trajetória do Sol estará inclinada em um ângulo igual a $90° - 65° = 25°$ em relação ao horizonte.
Esquematizando a situação do nascer do Sol:



O ponto A corresponde à intersecção entre a **borda superior** do Sol no momento em que ele começa a nascer e o horizonte, enquanto que o ponto B corresponde à intersecção entre a **borda inferior** do Sol no momento em que ele finaliza o nascer(representado em amarelo) e o horizonte.
Portanto, chamando a duração do nascer do Sol de T, sabendo que a velocidade angular do Sol é praticamente constante durante todo o evento, e sabendo que o diâmetro angular do Sol é $32'$, podemos dizer que o segmento que liga o ponto A e o Sol é $\omega_s T$ e que o segmento que liga o ponto B e o Sol é $32'$. Como ao final do nascimento a borda do Sol tangencia o horizonte, o segmento Sol-B faz um ângulo reto com o horizonte.
Agora, o certo seria utilizar trigonometria esférica, porém, como os lados desse triângulos são relativamente pequenos($32'$), podemos resolver com simples trigonometria.

$$\text{sen}(90^\circ - \phi) = \frac{32'}{\omega_s T}$$

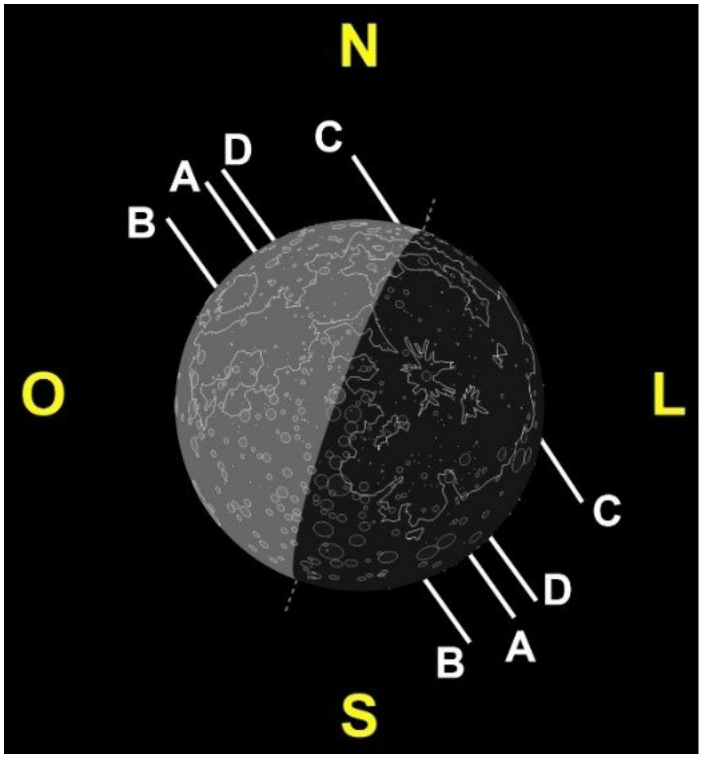
$$T = \frac{32'}{\omega_s \cos(\phi)}$$

$$T = \frac{T_{sin}}{360^\circ} \times \frac{32^\circ}{60\cos(65^\circ)}$$

$$\boxed{T = 2,48 \text{ h} \approx 2,5 \text{ h}}$$

Alternativa: (a)

15. **(1 ponto)** Ocultação é o fenômeno de desaparecimento temporário de um astro, devido à passagem de outro com maior diâmetro aparente à sua frente, a partir de um determinado ponto de vista. A Lua, em sua trajetória aparente pelo céu, passa ocasionalmente em frente a uma estrela brilhante, ocultando-a da nossa vista.
A imagem a seguir traz a ocultação de Eta Leonis, de maio de 2023. As linhas brancas indicam as trajetórias de Eta Leonis, em relação à Lua, do ponto de vista de quatro capitais brasileiras: A, B, C e D.



(a) A/São Paulo, B/Florianópolis, C/ Palmas, D/Rio de Janeiro

(b) A/Rio de Janeiro, B/Florianópolis, C/ Palmas, D/São Paulo

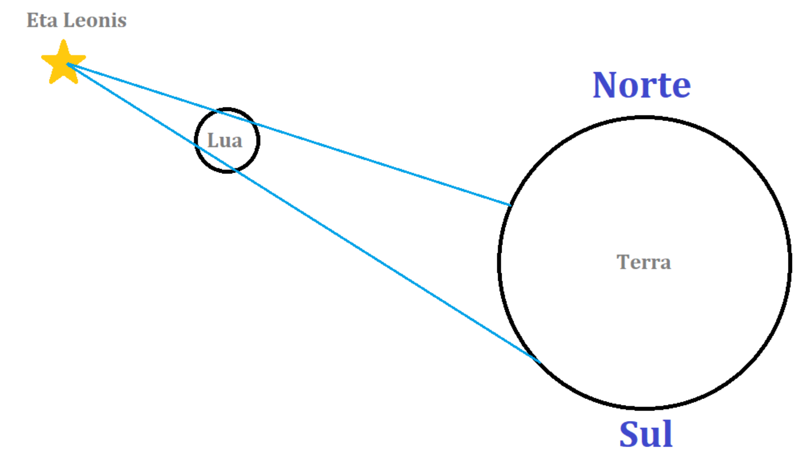
(c) A/Rio de Janeiro, B/Palmas, C/ Florianópolis, D/São Paulo

(d) A/Florianópolis, B/São Paulo, C/ Palmas, D/Rio de Janeiro

(e) A/São Paulo, B/Palmas, C/ Florianópolis, D/Rio de Janeiro

Solução:

O desenho a seguir ilustra a situação. A partir dele, vemos que observadores mais ao norte viram a estrela mais ao norte da lua e observadores mais ao sul viram a estrela mais ao sul. Em ordem crescente de latitude, temos Florianópolis, São Paulo, Rio de Janeiro e Palmas. Portanto, vemos que a alternativa “a” é a correta.



Alternativa: (a)

16. **(1 ponto)** Considere uma estrela cuja paralaxe mede p = 0,317" (segundos de arco) e que, apesar da sua proximidade, só pode ser vista ao telescópio, pois é 300 vezes menos brilhante que o limite de nossa percepção visual a olho nu, que corresponde à magnitude 6,0.

Assinale a opção que traz a que distância, aproximadamente, deveria estar essa estrela para ser percebida visualmente sem um telescópio, supondo as melhores condições de observação.

Dado: $1\ pc = 3,086 \cdot 10^{16}\ m$; $1\ ano - luz = 9,461 \cdot 10^{15}\ m$

(a) 0,58 anos-luz

(b) 1,8 anos-luz

(c) 10,27 anos-luz

(d) 3,15 anos-luz

(e) 6,00 anos-luz

Solução:

Teremos:

$$\frac{F_{limite}}{300} = \frac{L}{4\pi d^2}$$

$$F_{limite} = \frac{300L}{4\pi d^2}$$

mas:

$$F_{limite} = \frac{L}{4\pi d_{limite}^2}$$

Logo:

$$\frac{L}{4\pi d_{limite}^2} = \frac{300L}{4\pi d^2}$$

$$d_{limite} = \frac{d}{\sqrt{300}}$$

mas:

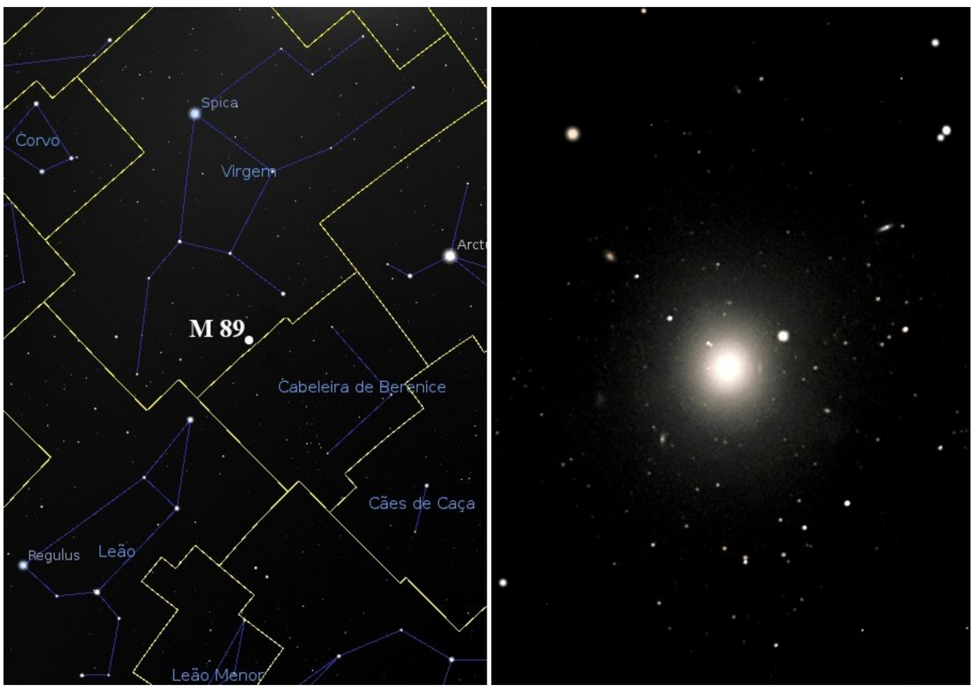
$$d = \frac{1}{p}$$

Logo:

$$\boxed{d_{limite} = \frac{1}{p\sqrt{300}} = 0,18 \text{ pc} = 0,58 \text{ anos} - \text{luz}}$$

Alternativa: (a)

17. **(1 ponto)** M89 é uma das oito galáxias do aglomerado de Virgem que Charles Messier descobriu em 1781. Esta galáxia é elíptica do tipo E0, ou seja, M89 é praticamente esférica. Está localizado a cerca de 50 milhões de anos-luz de distância na constelação de Virgem.



Seu diâmetro aparente de 4' (minutos de arco) corresponde a um diâmetro real de D = 70.000,0 anos-luz. M89 contém aproximadamente N = 100 bilhões de estrelas e sua magnitude aparente vale m = 9,8. Assinale a opção que corresponde, aproximadamente, à distância média $\langle d \rangle$ entre duas estrelas de M89. Assuma, em primeira aproximação, que a distribuição das estrelas é uniforme em todo o volume.

(a) 12,2 anos-luz

(b) 9,8 anos-luz

(c) 17,5 anos-luz

(d) 7,0 anos-luz

(e) 4,0 anos-luz

Solução:

Calculando o volume total da galáxia:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi D^3}{6}$$

Agora, definindo η como a densidade númerica de estrelas, teremos:

$$\eta = \frac{N}{V} = \frac{6N}{\pi D^3}$$

Logo, para calcular a distância média entre as estrelas, podemos considerar um modelo em que cada estrela ocupa o centro de um cubo de lado a, tal que:

$$\eta a^3 = 1$$

$$\frac{6N}{\pi D^3} a^3 = 1$$

$$a = \left(\frac{\pi D^3}{6N}\right)^{1/3}$$

Por fim, a distância entre o centro de dois cubos é dada por $\langle d \rangle = a$, logo, substituindo os valores:

$$\boxed{\langle d \rangle = \left(\frac{\pi D^3}{6N}\right)^{1/3} = 12,2 \text{ anos} - \text{luz}}$$

Alternativa: (a)

18. **(1 ponto)** Duas estrelas A e B têm, respectivamente, magnitudes absolutas $M_A = 3{,}0$ e $M_B = 5{,}0$. Porém elas são observadas com o mesmo brilho (magnitude aparente).

Assinale a opção que traz a razão aproximada entre as distâncias, r_A e r_B, destas estrelas até nós.

(a) $r_A = 2,5 r_B$

(b) $r_B = 2,5 r_A$

(c) $r_A = 2,0 r_B$

(d) $r_B = 2,5 r_A$

(e) $r_A = 3,0 r_B$

Solução:

Nesse caso:

$$M_A - M_B = -2,5 \log\left(\frac{L_A}{L_B}\right)$$

Logo:

$$\frac{L_A}{L_B} = 10^{\frac{M_B - M_A}{2,5}}$$

Então:

$$m_A - m_B = -2,5 \log\left(\frac{L_A/4\pi r_A^2}{L_B/4\pi r_B^2}\right) = 0$$

Ou seja:

$$\frac{L_A r_B^2}{L_B r_A^2} = 1$$

Por fim:

$$\frac{r_A}{r_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}}$$

Substituindo os valores:

$$\boxed{r_A = 10^{\frac{M_B - M_A}{5}} r_B = 2,5 r_B}$$

Alternativa: (a)

19. **(1 ponto)** A Lua Cheia, nas melhores condições de observação, tem uma magnitude aparente média de m = -12,74.

Sob as mesmas condições observacionais, qual é a magnitude aparente da Lua quando ela está em Quarto Crescente?

(a) -11,99

(b) -10,45

(c) -6,37

(d) -13,49

(e) -9,18

Solução:

Pela Equação de Pogson:

$$m_{crescente} - m_{cheia} = -2,5 \log\left(\frac{F_{crescente}}{F_{cheia}}\right)$$

mas:

$$F_{crescente} = \frac{F_{cheia}}{2}$$

logo:

$$m_{crescente} = m_{cheia} - 2,5 \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Substituindo os valores:

$$\boxed{m_{crescente} = -11,99}$$

Alternativa: (a)

20. **(1 ponto)** Até outubro de 2018 foram descobertos em torno de 3 mil pequenos corpos do Sistema Solar com órbitas além da órbita de Netuno, denominados Objetos Transnetunianos.

Vamos supor, em primeira aproximação, que a massa de cada um destes objetos é $m = 10^{17}\ kg$ e que todos sejam formados por rochas com uma densidade média $r = 3,0\ g/cm^3$.

Assinale a opção que traz o raio aproximado do astro se todos estes objetos estivessem agrupados formando um único corpo celeste esférico com a mesma densidade dos objetos originais.

(a) 300 km

(b) 200 km

(c) 460 km

(d) 370 km

(e) 510 km

Solução:

Quando os corpos celestes se juntarem, a massa total do sistema será:

$$M = 3000m$$

Logo:

$$M = \rho V$$

$$3000m = \rho V$$

$$V = \frac{3000m}{\rho}$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{3000m}{\rho}$$

$$\boxed{R = \left(\frac{9000m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \approx 300 \text{ km}}$$

Alternativa: (a)