Comentário NOIC
Prova experimental da 3ª Fase - Nível I

19 DE JANEIRO DE 2023

Escrito por Gabriel Hemétrio, Lucas Tavares, Vitória Bezerra Nunes e Ualype de Andrade Uchôa

Experimentos com a Lei de Hooke

Questão 1.

(1.a) Para haver equilíbrio estático, a força elástica da mola deve-se igualar ao peso das arruelas, logo:

$$F_{elastica} = P$$

$$k\Delta x = Nmg$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{mg}{k}N}$$

(1.b) Pode-se determinar o valor da constante elástica da mola k a partir de medidas de Δx por N. Os dados dessas medidas podem ser utilizados para obter uma curva linear que fornecerá o valor de k pelo valor de seu coeficiente angular.

(1.c) Pode-se determinar a posição inicial das medidas de distensão como o ponto em que o gancho é fixado na mola, estando esta fixada na base vertical. Além disso, pode-se usar o ponto em que o gancho da mola se encontra como segundo extremo para calcular o comprimento.

(1.d) Deve-se calcular o comprimento x_0 da mola quando não há arruelas presentes e, com isso, descobrir o valor da elongação Δx da mola subtraindo o valor de seu comprimento x, quando com arruelas, do seu comprimento natural sem arruelas: $\Delta x = x - x_0$.

(1.e) De início, veja que o valor usado na incerteza das medidas de distância é de $0,1\,cm$. Perceba que as medições de comprimento são feitos por uma régua milimetrada (vide figura abaixo, retirada do anexo experimental A da prova), cuja precisão (menor medida) - como o nome sugere - é de $0,1$ cm, o que logicamente sugere que esse (a precisão da régua) foi o critério adotado para determinar-se a incerteza.

Figura 1: Régua utilizada no experimento

OBS: É importante ressaltar que a incerteza se propagaria quando realizado a subtração $x - x_0$. Note, entretanto, que, na tabela apresentada na prova, foi convencionado o erro da elongação Δx como o valor da menor medida da régua, o que não é - estritamente falando - sempre válido, já que depende do contexto do experimento e das convenções feitas pelo experimentador (nosso caso). No geral, o mais recorrente valor para incertezas com medições de régua milimetrada é $\sigma_x = 0,05$ cm $= 0,5$ mm, que é justamente a metade do valor da menor medida do instrumento.

Questão 2.

(2.a) Para associações de molas em série, teremos que a força ao longo das molas será constante ($F_1 = F_2 = F_{eq}$), portanto:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_{eq}$$

Pela Lei de Hooke:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{eq}}$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_{eq}}$$

Para o experimento em questão, $k_1 = k_2 = k$. Logo, a constante elástica equivalente do sistema será:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \rightarrow k_{eq} = k_s = \frac{k}{2}$$

Por fim:

$$k_{eq}\Delta x = Nmg$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{2mg}{k}N}$$

(2.b) Para associações de molas em paralelo, ambas as molas possuirão uma mesma deformação ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_{eq}$), portanto:

$$F = F_1 + F_2$$

Pela Lei de Hooke:

$$k_{eq}\Delta x = k_1\Delta x + k_2\Delta x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

No caso do experimento em questão, $k_1 = k_2 = k$ Portanto:

$$k_{eq} = k + k \rightarrow k_{eq} = k_p = 2k$$

Por fim:

$$k_{eq}\Delta x = Nmg$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{mg}{2k}N}$$

Questão 3.

Tabela 1

Número de arruelas	Elongação ($\pm 0,1$cm)
1	1,8
2	4,8
3	8,4
4	11,9
5	15,5
6	18,7
7	22,1

Tabela 2

Número de arruelas	Elongação ($\pm 0,1$cm)
1	0,5
2	2,2
3	4,0
4	5,6
5	7,4
6	9,2
7	11,0
8	12,8
9	14,3
10	16,1

Tabela 3

Número de arruelas	Elongação ($\pm 0,1$cm)
1	0,1
2	0,4
3	1,2
4	2,1
5	2,9
6	3,8
7	4,7
8	5,7
9	6,6
10	7,4

$Y = A + BX$
$A = -(1,80 \pm 0,14) \times 10^{-2}$ m
$B = (1,740 \pm 0,009) \times 10^{-2}$ m

$Y = A + BX$
$A = -(1,26 \pm 0,06) \times 10^{-2}$ m
$B = (3,42 \pm 0,03) \times 10^{-2}$ m

$Y = A + BX$
$A = -(1,19 \pm 0,15) \times 10^{-2}$ m
$B = (0,850 \pm 0,022) \times 10^{-2}$ m

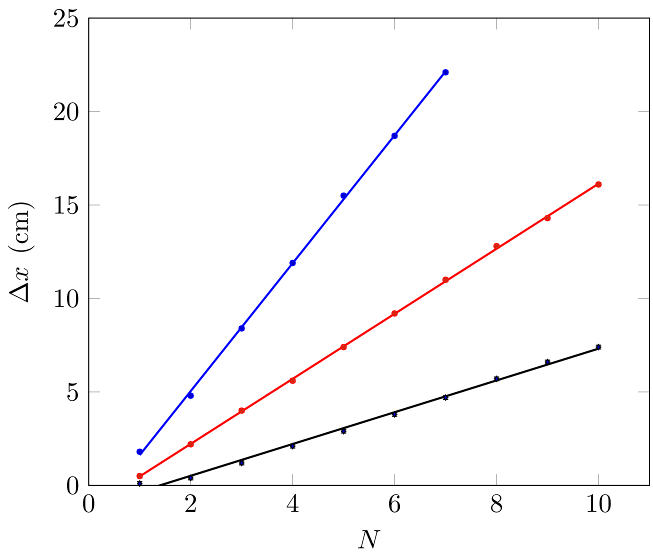

Gráfico 1: Elongação da mola versus número de arruelas

Questão 4.

Utilizamos a regressão linear na calculadora (método dos mínimos quadrados) para calcular a reta que melhor se adequa aos pontos experimentais, a qual está traçada no gráfico. Vale ressaltar que o aluno poderia utilizar também o método gráfico, caso preferisse.
Aos pontos das 3 curvas ajustamos retas do tipo:

$$Y = A + BX$$

As incertezas dos coeficientes são calculadas utilizando-se as seguintes equações, provenientes do método dos mínimos quadrados:

$$\sigma_B = \left| B\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}} \right| \qquad \sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N}} \tag{1}$$

Onde N é o número de pontos experimentais, r é o coeficiente de correlação obtido com a calculadora, e $\Sigma X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + ... + X_N^2$ é o somatório dos quadrados das coordenadas horizontais dos pontos experimentais.
OBS: É válido mencionar o fato de que a OBF, em seu anexo experimental, usa a notação $Y = B + AX$ para a equação da reta, em vez de $Y = A + BX$. Optamos pela última por ser também a mesma notação usada, em geral, pelas calculadoras.

Questão 5.

- Curva azul: duas molas em série.
- Curva vermelha: uma mola.
- Curva preta: duas molas em paralelo.

Questão 6.

(6.a) A curva que melhor se ajusta ao gráfico é do tipo:

$$Y = A + BX$$

Cujos coeficientes são

$$\boxed{B = (1,740 \pm 0,009) \times 10^{-2} \text{ m}} \qquad \boxed{A = -(1,26 \pm 0,06) \times 10^{-2} \text{ m}}$$

Logo, comparando a equação da reta com aquela obtida em **(1.a)**, identificamos:

$$B = \frac{mg}{k}$$

Então:

$$k = \frac{mg}{B}$$

E, para obter a incerteza de k, devemos utilizar a propagação de incertezas. Podemos utilizar a expressão:

$$\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2$$

Logo:

$$\boxed{k = (3,26 \pm 0,08)\ \text{N/m}}$$

(6.b) Semelhantemente, a curva que melhor se ajusta ao gráfico é do tipo:

$$Y = A + BX$$

Cujos coeficientes são

$$\boxed{B = (3,42 \pm 0,03) \times 10^{-2}\ \text{m}} \qquad \boxed{A = -\,(1,80 \pm 0,14) \times 10^{-2}\ \text{m}}$$

Logo, comparando a equação da reta com aquela obtida em **(2.a)**, identificamos:

$$B = \frac{mg}{k_s}$$

Então:

$$k_s = \frac{mg}{B}$$

E, para obter a incerteza de k_s, devemos utilizar a propagação de incertezas. Podemos utilizar a seguinte expressão:

$$\left(\frac{\sigma_{k_s}}{k_s}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2$$

Logo:

$$\boxed{k_{s_{exp}} = (1,66 \pm 0,04)\ \text{N/m}}$$

Ao fim, utilizamos o subscrito "exp" para denotar que este é o valor da quantidade k_s obtido experimentalmente.

(6.c) Novamente, a curva que melhor se ajusta ao gráfico é do tipo:

$$Y = A + BX$$

Cujos coeficientes são

$$\boxed{B = (0,850 \pm 0,022) \times 10^{-2}\ \text{m}} \qquad \boxed{A = -\,(1,19 \pm 0,15) \times 10^{-2}\ \text{m}}$$

Logo, comparando a equação da reta com aquela obtida em **(2.b)**, identificamos:

$$B = \frac{mg}{k_p}$$

Então:

$$k_p = \frac{mg}{B}$$

E, para obter a incerteza de k_p, devemos utilizar a propagação de incertezas. Assim como nos itens passados, podemos utilizar a seguinte expressão:

$$\left(\frac{\sigma_{k_p}}{k_p}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2$$

Logo:

$$\boxed{k_{p_{exp}} = (6,67 \pm 0,24)\ \text{N/m}}$$

Assim como no item passado, utilizamos, ao fim, o subscrito "exp" para denotar que este é o valor da quantidade k_p obtido experimentalmente.

Questão 7.

(7.a) Isso ocorre porque há diferentes constantes elásticas para a mola.

(7.b) Isso ocorre pois as diferentes constantes elásticas alteram as condições iniciais.

(7.c) Isso deve-se ao fato de que, na vida real, a mola possui uma espécie de "pré-tensão", que dificulta a sua deformação inicial. Na prática, podemos observar isso ao colocar uma massa muito leve na ponta da mola, como um clipe. Você irá notar que a distensão da mola se tornará notória apenas a partir de um certo número de clipes - i.e., uma determinada massa mínima. Antes disso, observa-se pouca ou praticamente nenhuma distensão - ou seja, é necessário uma massa mínima para "quebrar" a pré-tensão da mola e iniciar o regime linear previsto pela Lei de Hooke. No gráfico abaixo, você pode acompanhar um esquema ilustrado do fenômeno ocorrendo: mesmo com uma força não nula, o deslocamento da mola é ínfimo, e a partir de uma força mínima aplicada à mola o comportamento linear surge. É fácil ver que isto prevê um coeficiente linear não-nulo no gráfico 1 da Questão 3, como observamos experimentalmente.

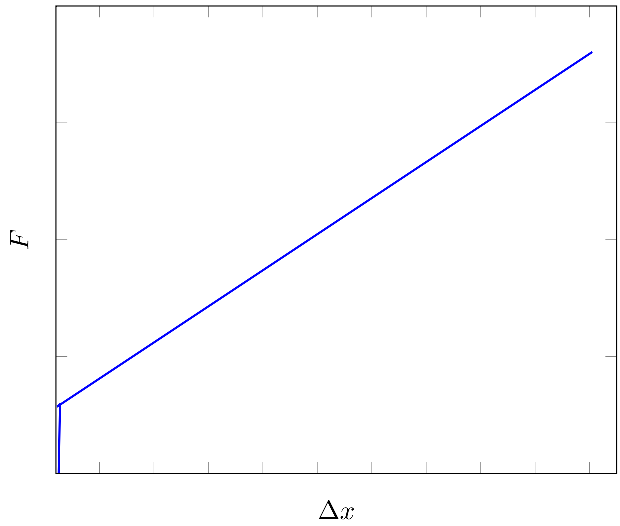

Gráfico 2: Força versus elongação da mola

Vale ressaltar que a pré-tensão aparece pois, quando a mola está relaxada, as suas espiras estão encostadas umas nas outras, gerando assim uma força de compressão. Após a mola conseguir obter um deslocamento inicial, suas espiras se separam e essa força deixa de existir.

Questão 8.

(8.a) Utilizando dos cálculos da questão **(2.b)**, temos o seguinte resultado:

$$\boxed{k_{p_{teo}} = 2k = (6,52 \pm 0,16)\ \text{N/m}}$$

(8.b) Da mesma forma, utilizando dos cálculos da questão **(2.a)**, temos o seguinte resultado:

$$\boxed{k_{s_{teo}} = \frac{k}{2} = (1,63 \pm 0,04)\ \text{N/m}}$$

Questão 9.

(9.a) Devemos comparar os valores esperados com os obtidos experimentalmente. A melhor forma de fazê-lo é computando o erro relativo da medida experimental em relação àquele esperado (teórico). Para isso, usamos a expressão abaixo, na qual calculamos o erro absoluto, dividimos pelo valor esperado:

$$\left(\frac{k_{p_{teo}} - k_{p_{exp}}}{k_{p_{teo}}}\right) \times 100\%$$

$$\left(\frac{2k - k_p}{2k}\right) \times 100\%$$

Dessa forma,

$$\left(\frac{6,67 - 6,52}{6,67}\right) \times 100\%$$

$$\boxed{2,2\%}$$

Logo, há um erro de $2,2\%$ do k equivalente da associação em paralelo obtido experimentalmente em relação ao seu valor teórico esperado.

(9.b) Utilizando a mesma expressão da **(9.a)** para verificar o erro relativo da medida obtida:

$$\left(\frac{k_{s_{teo}} - k_{s_{exp}}}{k_{s_{teo}}}\right) \times 100\%$$

$$\left(\frac{k/2 - k_s}{k/2}\right) \times 100\%$$

$$\left(\frac{1,66 - 1,63}{1,66}\right) \times 100\%$$

$$\boxed{1,8\%}$$

Logo, há um erro de $1,8\%$ do k equivalente da associação em série obtido experimentalmente em relação ao seu valor teórico esperado.

Questão 10.

Os resultados obtidos ao longo do experimento comprovam a Lei de Hooke. Podemos observar que, pelas medidas e gráficos obtidos, a curva da força elástica por elongação é linear, o que está de acordo com o modelo teórico de Hooke.