PROVA AUXÍLIO NOIC

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

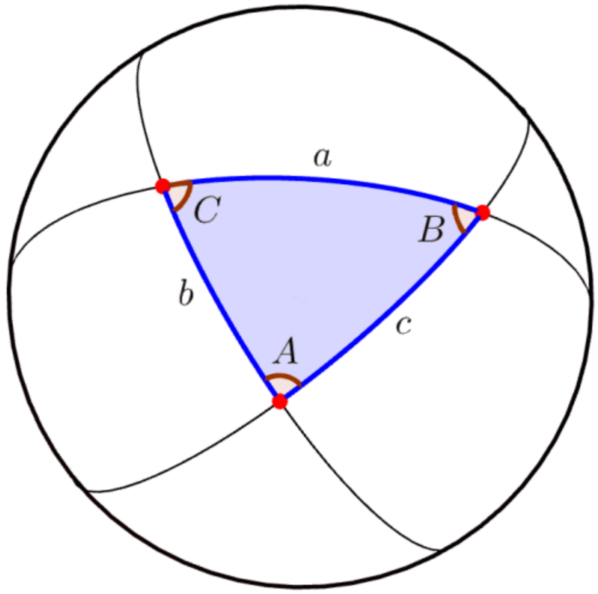
1. A duração da prova é de **quatro** (4 horas).
2. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **4 questões**
   - Questões Médias - **4 questões**
   - Questões Longas - **2 questões**
3. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2;
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet. Além disso, é recomendado e permitido o uso de compasso, régua e transferidor (apesar de o último não ser necessário).
5. Para a questão de Análise de Dados, será necessário papel milimetrado.
6. Uma versão maior da Carta Celeste foi disponibilizada com antecedência, assim como um pdf do papel milimetrado para impressão.
7. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa.
8. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues e nem serão corrigidas.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	

Formulário

- Para um triângulo esférico:



Lei dos Senos:

$$\frac{sen(a)}{sen(A)} = \frac{sen(b)}{sen(B)} = \frac{sen(c)}{sen(C)}$$

Lei dos Cossenos:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$$

Lei dos Quatro-Elementos:

$$\cot(a)\,\mathrm{sen}(b) = \cot(A)\,\mathrm{sen}(C) + \cos(b)\cos(C)$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22\frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Hubble:

$$v_{rad} = H_0 d$$

- Equação polar da elipse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}$$

- Efeito doppler clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

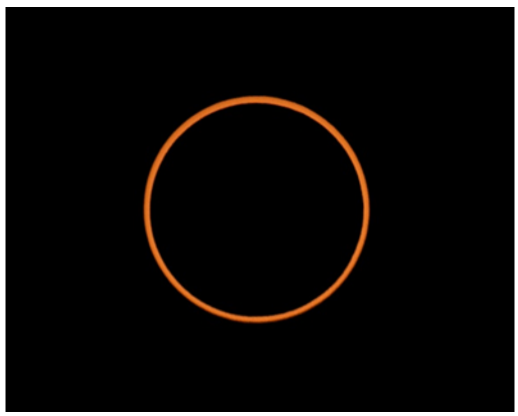
- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Questões Curtas

1. **(Sonda Espacial - 15 pontos)** Uma sonda, que está em uma órbita elíptica heliocêntrica que é coplanar e gira no mesmo sentido da órbita terrestre, é vista, no momento de sua passagem periélica, em oposição com a Terra. Observadores da Terra sabiam que, nessa configuração, a luz emitida da sonda demorava $33,244$ minutos para chegar até a Terra. Passados 50 dias, a separação angular entre a sonda e o Sol, vista da Terra, era de $\theta = 118°$ e, nessa nova configuração, a luz emitida pela sonda demorava $70,062$ minutos para chegar até a Terra. Com base nisso, determine a excentricidade da órbita da sonda.

2. **(Eclipse Solar 15 pontos)** Dia 14 de outubro de 2023 acontecerá um eclipse solar anular que será visível do território brasileiro! E como a grande astrofotógrafa Olga não podia perder essa oportunidade viajou para a região norte do Brasil para fotografar o eclipse, já que nesta região sua observação será mais propícia. Chegando lá ela tirou a seguinte foto com seu telescópio e sua câmera.



   Registrou também, naquele instante, alguns dados sobre o Sol (magnitude aparente durante o eclipse $m_e = -23,53$ e diâmetro aparente $\theta = 0.5°$). Porém, na correria de não errar a fotografia e perder esta oportunidade única, esqueceu de registrar alguns dados sobre a Lua! Portanto, ajude Olga a descobrir o diâmetro aparente da lua no momento da fotografia.

3. **(Eclipse Lunar - 15 pontos)** O renomado físico e astrônomo Paulo Otávio, visando estudar melhor como ocorria os eclipses, criou uma simulação caseira desse evento. A simulação de Paulo consistia de um poste à qual, em seu topo, estava fixada uma grande esfera de raio R. Junto à isso, também era ligado ao poste uma haste de massa desprezível e comprimento L, na qual se fixava uma esfera menor de raio r em sua extremidade, e, assim, a haste era posta à girar em torno do poste com velocidade angular ω. De tal maneira, Paulo conseguia simular a órbita da Lua ao redor da Terra com precisão. Além disso, o grande físico sabia que, para simular perfeitamente o fenômeno, deveria-se reproduzir, em seu experimento, as pequenas pertubações que são causadas na órbita da Lua devido à presença de outros corpos celestes. Com isso, Paulo certificou-se que, a partir do momento em que a haste sofresse uma pequena pertubação, uma força vertical, com sentido contrário à gravidade, e uma força horizontal atuariam na esfera menor visando, assim, controlar a amplitude das oscilações do sistema. Sabe-se que, por causa disso, o ângulo entre a linha horizontal e a haste seguia uma função períodica do tipo $\theta = \theta_0 \cos(\Omega t)$, em que θ_0 e Ω são valores conhecidos. Sabendo disso, responda:

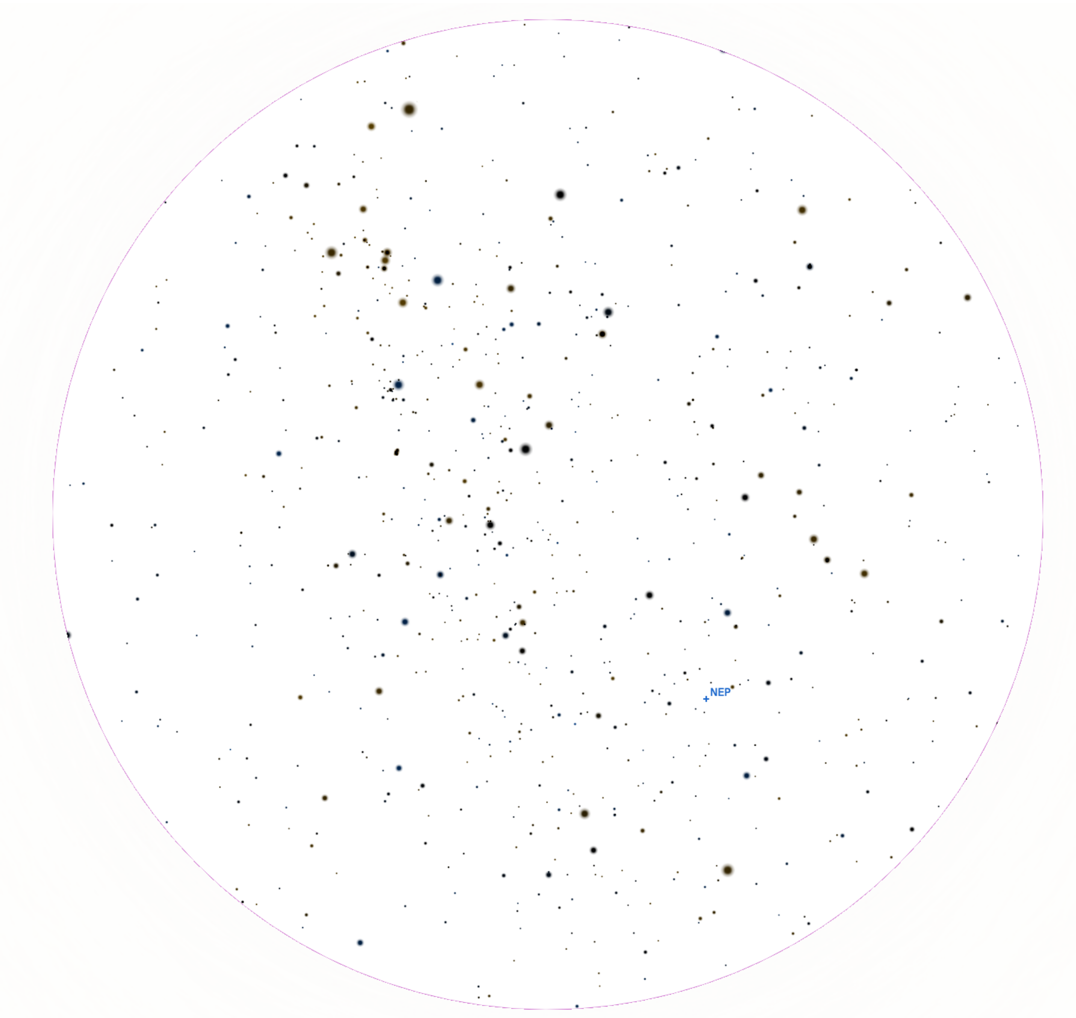
   (a) (7 pontos) Calcule o valor máximo de $\theta_{0_{max}}$ para que, na simulação de Paulo, sempre seja possível ocorrer eclipses lunares totais.

   (b) (8 pontos) Considerando o caso em que $\theta_0 = \theta_{0_{max}}$, calcule o tempo entre dois eclipses lunares consecutivos, no qual a inclinação da haste em relação à horizontal é nula.

4. **(15 pontos)** Um estudante percebe que, no mesmo instante em que o ponto vernal está culminando superiormente, o Sol possui ângulo horário H = 9,00h. Desprezando a excentricidade da órbita da Terra, encontre a data de observação.

Questões Médias

5. **(25 pontos)** Na carta celeste a seguir, é mostrada a projeção *estereográfica* do céu de alguma localidade (o ano é 2000). Esse tipo de projeção tem como característica a preservação dos ângulos formados entre círculos máximos, dessa forma mantendo a forma de figuras de pequenas extensões. Dessa forma, considere nessa questão apenas a projeção de **escala**, e não de **forma**, dos elementos projetados. Além disso, saiba que a distância zenital de um astro nesse tipo de carta é dada por $\boldsymbol{z = 2\arctan(r/R)}$, onde R é o raio da carta e r a distância do astro até o centro da carta. A marcação "NEP" em azul denota o Polo Norte Eclíptico.



(a) **(2,5 pontos)** Escreva o nome usual e constelação pertencente de 5 estrelas mostradas na carta, enumerando-as. Indique-as na carta com o número atribuído.

(b) **(2,5 pontos)** Indique na carta os objetos de céu profundo M1, M31, M33, M42 e M57.

(c) **(7 pontos)** Indique os pontos cardeais e dê a latitude local.

(d) **(13 pontos)** Desenhe o **Círculo de Precessão Norte**, isto é, o lugar geométrico dos pontos que foram/serão o Polo Celeste Norte em algum momento durante o período de precessão terrestre. Encontre o valor para a inclinação do eixo de rotação da Terra.

6. **(30 pontos)** "Onze-horas"é o nome popular da Portulaca grandiflora, planta nativa da América do Sul, que recebeu esse apelido porque se abre por volta das 11h da manhã. Visando comprovar se o nome faz jus a planta, Margarida resolveu estudar essa planta, anotando o horário em que as onze-horas de seu jardim em Lisboa ($\phi = 38,72°N$; $\lambda = 9,14°W$, GMT+0) abriram. A tabela a seguir mostra os dados coletados por ela.

Data	Horário
04/03/22	11h54m
06/04/22	11h21m
15/05/22	10h45m
30/06/22	11h45m
09/07/22	10h39m
24/09/22	11h40m
06/11/22	12h19m
26/01/23	12h29m

(a) **(18 pontos)** Plote um gráfico representando os dados da tabela.

(b) **(1 pontos)** Com base no gráfico, qual o horário que as flores se abriram no equinócio de março?

(c) **(4 pontos)** Qual o tempo solar verdadeiro no local quando as flores abriram no equinócio de março? Considere que a Equação do Tempo neste dia valia $ET = -6$ minutos e que Portugal não utiliza horário de verão.

Margarida cansou-se de Portugal e decidiu vir morar em Brasília ($\phi = 15,80°S$; $\lambda = 47,90°W$, GMT-3). Obviamente, ela trouxe suas flores consigo.

(d) **(7 pontos)** Estime a altura do Sol quando as flores abrirem na nova casa de Margarida no dia 02/02/2023, assumindo que as flores sempre abrem no mesmo tempo solar local e que o equinócio de março ocorreu dia 20. Considere que a declinação do sol é aproximadamente uma função senoidal.

7. **(30 pontos)** Com aplicações nas mais diversas partes da astronomia, o conceito de **ângulo sólido** também pode ser muito útil em gravitação. Considere uma esfera de raio R e centro O. Escolha nela uma região D delimitada por um contorno fechado γ, e tome a união de todos os raios com origem em O que intersectam a região D. Como resultado, tem-se o ângulo sólido $O\gamma$, cujo valor (em esferorradianos - sr) é definido como

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

Onde S é a área da região D.

(a) **(3 pontos)** Considere um plano α. Defina os pontos $A \in \alpha$ e $P \notin \alpha$, tais que o segmento PA, de medida r, faça um ângulo agudo θ com a normal do plano. Ao traçar um pequeno contorno γ em torno de A, com comprimento muito menor que r e delimitando uma área ΔA, obtém-se um ângulo sólido $P\gamma$. Encontre uma expressão para o o valor $\Delta\Omega$ desse ângulo sólido.

(b) **(4 pontos)** Tome uma dada seção do plano que, vista a partir do ponto P, possua um ângulo sólido Ω. Encontre a componente perpendicular ao plano $g_{\perp}$ da aceleração gravitacional produzida por essa seção em P, sabendo que a densidade superficial de massa é σ.

(c) **(3 pontos)** A partir dos resultados anteriores, encontre o módulo da aceleração gravitacional produzida pelo plano α em P considerando que suas dimensões são muito maiores do que a distância ao ponto considerado.

(d) **(10 pontos)** Considere um planeta na forma de prisma triangular equilátero com aresta da base medindo a. Sabendo que sua densidade de massa volumétrica é ρ e que sua altura l é muito maior que a, encontre o valor da aceleração gravitacional em uma de suas arestas laterais.

(e) **(10 pontos)** Considere o mesmo planeta do item anterior, mas com sua massa redistribuída entre suas três faces laterais, de forma que elas possuam densidades de massa superficial σ_1, σ_2 e σ_3. Encontre o valor da aceleração gravitacional no eixo do planeta.

8. **(35 pontos)** Olga estava praticando suas técnicas de astrofotografia em Barra do Piraí e utilizou um poste de luz (considerado uma fonte puntual) a uma distância L para focar sua câmera variando a distância entre a lente e o CCD. Ela observa que todas as estrelas são perfeitamente nítidas e que o poste mais próximo que permanece nítido está a uma distância p. Considere que o diâmetro da lente da câmera é D, sua distância focal é f e que o tamanho máximo de uma imagem nítida no CCD é ℓ.

(a) **(8 pontos)** Encontre o menor valor possível de L e chame-o de H.

(b) **(7 pontos)** Ache o valor de p correspodente.

(c) **(20 pontos)** Prove que se Olga tivesse usado um poste a uma distância H/n para focar a câmera, com $n > 1$, a região de nitidez estaria aproximadamente entre $H/(n+1)$ e $H/(n-1)$. Assuma que $D \gg \ell$.

Questões Longas

9. **(60 pontos)** Patheus JC, um astrofotógrafo de primeira linha, vê a nebulosa esférica H3M5 no limite da magnitude de seu gigante telescópio de $D = 100$ m de diâmetro. Pesquisando mais a respeito de tal nebulosa em seu catálogo de DSO's, ele encontra que ela tem magnitude superficial $\mu = 22$ mag/arcsec^2. O coeficiente de extinção do meio interestelar é $\alpha = 0,5$ mag/kpc

(a) **(4 pontos)** Calcule a magnitude aparente de H3M5.

(b) **(8 pontos)** A magnitude superficial é uma grandeza muito utilizada para catalogar o brilho de um corpo extenso. Considerando que μ seja a magnitude associada a uma unidade de ângulo sólido do corpo em questão, prove que

$$\mu = m + 2,5\log(\Omega)$$

Onde m é a magnitude total do corpo e Ω o seu ângulo sólido.

Em seu catálogo, dizia ainda que, no centro da nebulosa, há uma estrela de luminosidade $L = L_\odot$ que, quando vista da terra, apresentava magnitude $m_0 = 20$.

(c) **(10 pontos)** Usando a relação do item acima, ache uma relação entre o raio da nebulosa R e sua distância d até a Terra. Considere que não há outras fontes de extinção e que o raio da nebulosa é muito menor que sua distância à Terra.
Dica 1: Para calcular a magnitude superficial em mag/arcsec^2, precisa-se usar o ângulo sólido em arcsec^2.
Dica 2: Se necessário, use que $\cos\beta \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$ e $\tan\beta \approx \beta$, para β muito pequeno, em radianos.

(d) **(6 pontos)** Usando os outros dados do enunciado, ache o valor de d.

(e) **(2 pontos)** Calcule numericamente o valor do raio da nebulosa H3M5.

Ainda, em seu catálogo, Patheus acha que as coordenadas eclípticas da nebulosa são $(b, l) = (44,9°, 79,8°)$. Como tais coordenadas são bem incovenientes para descobrir coisas como altura e azimute, JC decide mudar para o sistema equatorial.

(f) **(10 pontos)** Encontre uma expressão que relaciona a declinação de um astro em função de suas coordenadas eclípticas.

(g) **(10 pontos)** Encontre uma expressão que relaciona a ascensão reta de um astro em função de suas coordenadas eclípticas.

(h) **(2 pontos)** Encontre as coordenadas equatoriais da nebulosa.

JC é um businessman, por isso está sempre viajando para todos os cantos do mundo. Preocupado por talvez não poder continuar a observação de H3M5 a fim de descobrir mais propriedades da nebulosa, Patheus JC decide calcular onde ele conseguirá conseguir ver a nebulosa.

(i) **(2 pontos)** Calcule o intervalo de latitudes em que é possível ver H3M5 ao menos uma vez no ano.

(j) **(6 pontos)** Determine a porcentagem da superfície terrestre em que a nebulosa H3M5 fica visível dentro de um período de um ano.

10. **(60 pontos)** Forças de maré são o produto da diferença de atração gravitacional entre as extremidades de um corpo extenso. Sua atuação é importante para entender o comportamento de satélites naturais, envolvendo conceitos como o Limite de Roche para a quebra destes objetos em anéis planetários.

Parte A: Limite de Roche para corpo "líquido"

Considere um objeto esférico de raio r e de densidade uniforme com massa m. Seu centro se localiza a uma distância a de um atrator gravitacional massivo, como um planeta, de massa M e raio R. Para esse corpo trate qualquer resistência plástica como desprezível, como um líquido invíscido e sem tensão superficial.

(a) **(4 pontos)** Desconsiderando a rotação do objeto, determine e esboce as forças atuantes em uma massa teste μ no centro e na superfície mais próxima do atrator.

(b) **(10 pontos)** Utilizando a aproximação binomial: $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $x \ll 1$, demonstre que a diferença das acelerações entre a superficie e o centro é dada por:

$$\Delta F = \frac{2\mu GMr}{a^3} - \frac{\mu Gm}{r^2}$$

(c) **(8 pontos)** Mostre que para qualquer massa teste a uma distância x do centro do satélite, a diferença de forças com o centro recorre a uma expressão proporcional à equação do item b). Considere que a densidade do satélite ρ_m é constante.

(d) **(4 pontos)** Tomando o resultado do item b), encontre a expressão para a distância ao atrator na qual a diferença de forças é maior que 0, em termos das densidades dos corpos (ρ_m e ρ_M) e do raio do atrator R. Discuta os efeitos físicos observados em um corpo que ultrapasse esse limite.

(e) **(10 pontos)** Consideremos agora um corpo real, que possui uma rotação síncrona com sua órbita, assim como a Lua, de densidade $\rho_m = 3,3 \cdot 10^3 kg/m^3$, que orbita a Terra ($\rho_M = 5,6 \cdot 10^3 kg/m^3$). Determine o limite de Roche para esse corpo.

Parte B: Buracos negros esfomeados

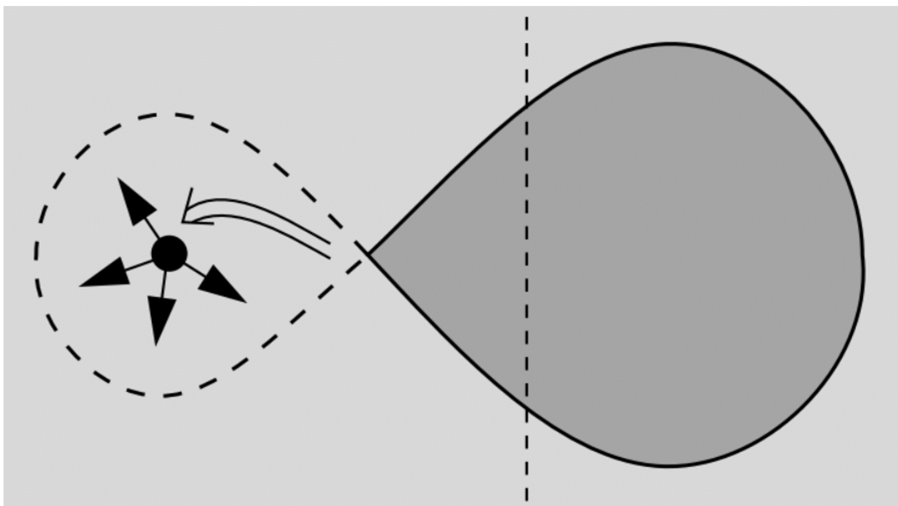
Uma grande diferença entre a situação de um planeta atingindo o limite de ruptura e de uma estrela se trata do comportamento do gradiente de pressão. Na parte anterior, esse termo foi desprezado junto às outras interações moleculares, entretanto, por possuir um papel fundamental na manutenção da estrela, este não pode ser ignorado nesse outro caso.

(f) **(9 pontos)** O gradiente de pressão dentro de uma estrela obedece a relação:

$$\frac{dP}{dr} = \rho g(r)$$

Em que $g(r)$ é a aceleração gravitacional experienciada por uma massa teste no raio r. Determine o equivalente a $g(r)$ para o caso de uma estrela de densidade aproximadamente constante ρ_m e raio R, que se encontra a uma distância a de um Buraco Negro de massa M.

(g) **(15 pontos)** Considere que ao se aproximar o suficiente desse Buraco Negro de massa $2,0 \cdot 10^{31}$, uma fina atmosfera com densidade $\rho_c = 0,15 kg/m^3$ se projeta, formando um envoltório ao redor da estrela:



Fundamental Astronomy - Hannu Karttunen et al.

Supondo uma estrela de massa $2,0 \cdot 10^{30}$, raio $R = 6,0 \cdot 10^8 m$ e que possua pressão $P_0 = 7,0 \cdot 10^{10} N/m^2$ em sua superfície, encontre a distância r para a qual as partículas que estejam nessa zona estudada (na extremidade mais próxima do atrator) se desprendem da estrela.
Dica: Utilize que para um gradiente do tipo $\frac{dP}{dx} = ax + b$, a função de P é dada por: $\frac{ax^2}{2} + bx + C$. Em que c é uma constante que pode ser determinada substituindo $P(r = R) = P_0$.