

Problema 03: “Sirene”

Fulano 1, Fulano 2, e Fulano 3

Equipe: NOIC

(Data: 24 de abril de 2023)

Neste relatório analisamos o Problema 03 - *Sirene*, da 36^a IYPT. A resolução do problema visa a construção de um tipo específico de sirene, que consiste em um disco rotacionando com orifícios, no qual direcionamos um fluxo de ar, e um som é produzido.

Durante a Seção II iremos explicar mais claramente o fenômeno de produção do som, para desenvolver algebricamente um modelo que o defina na Seção II. Em seguida, na Seção III, descreveremos o aparato e o método do uso de *softwares* especializados em áudio para analisar as características do som, além de explicar as incertezas aplicadas e os cuidados sistemáticos.

Os dados coletados foram discutidos na Seção IV, tal como a influência de cada parâmetro na frequência, amplitude e timbre da onda sonora produzida. Os próximos passos a serem tomados são a adição de uma análise teórica voltada para a relevância de outros parâmetros do sistema, como geometria do orifício ou material do disco.

I. INTRODUÇÃO

O som pode ser definido como um padrão de vibração das moléculas em um meio. No ar, podemos entendê-lo como um padrão de compressão e descompressão das moléculas em estado gasoso, que são interpretadas pelo cérebro humano, se estiverem na faixa de frequências audíveis.

Este relatório visa o estudo dos fenômenos envolvidos durante produção do som por um tipo específico de sirene, chamada de "*Siren disc*" ou de "*Seebeck Siren*" (Figura 1).



Figura 1: Sirene

O aparato trata-se de um disco rotacionando, que possui orifícios de igual diâmetro e distribuídos igualmente em formato de anel, para facilitar o controle das variações experimentais. Para que o sistema produza som, um fluxo de ar é direcionado a esse disco, e o movimento de compressão e descompressão do ar devido à disposição dos orifícios criará um padrão.

Esse padrão é definido por dois fenômenos principais; ou o fluxo de ar será bloqueado ao encontrar o material do disco durante a rotação, ou o fluxo encontrará um dos orifícios que permitem sua passagem. No primeiro caso, boa parte da energia do impacto será dissipada em forma de calor, e no segundo caso o fluxo de ar passará parcial ou totalmente. A diferença de alta pressão (no primeiro caso) e de baixa pressão (no segundo) definirão uma oscilação

que produz um som, que será estudado mais detalhadamente por nós ao longo das próximas seções.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A onda sonora produzida por nosso sistema, possuirá a mesma amplitude que o som produzido em cada um dos orifícios da sirene. Esta amplitude dependerá da área do orifício pelo qual o fluxo de ar passa em um período de tempo, sem ser totalmente bloqueado.

Partindo desta análise, visamos encontrar a amplitude deste som produzido pelo aparato, mais especificamente, a amplitude dos harmônicos de cada onda sonora.

Deste modo, definimos uma função $A(x)$, que representa a área em comum entre a abertura do canal de ar e o orifício, representada pela parte mais escura da Figura 2.

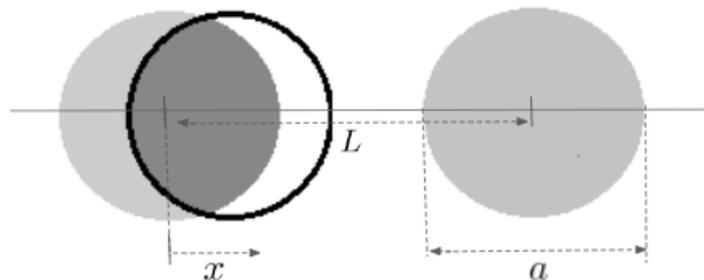


Figura 2: Esquema para demonstração de variáveis

Sendo a o diâmetro do orifício, L a distância de um centro até o outro e x o deslocamento do orifício em relação ao canal de ar.

De início, iremos definir $L = 2a$, então também podemos representar função $A(x)$ como:

$$A(x) = A(L - x) \quad (1)$$

De modo que, $A(x)$ se anula quando $x = a$.

$$A(a) = A(L - a) = 0 \quad x = a \quad (2)$$

Esta função pode ser expressa em uma série de Fourier.

$$A(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \quad (3)$$

O coeficiente é dado pela Equação (4). E o desenvolvimento deste método pode ser melhor encontrado na referência [1].

$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^a A(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \quad (4)$$

Ao substituir L por a na Equação (4), e a integrando por partes, temos:

$$a_n = \frac{-2}{\pi n} \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \frac{dA(x)}{dx} dx \quad (5)$$

E podemos encontrar geometricamente o valor de $dA(x)$ como sendo:

$$dA(x) = -2 \left(\frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (6)$$

Deste modo, adicionamos isto na Equação (5), e integramos por substituição para obtermos um termo que represente o tempo em nossa função, encontrando a Equação (8):

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (7)$$

$$a_n = \frac{4a^3}{2\pi na} \int_0^1 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi nat}{L} \right) (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (8)$$

Assumimos $z = 2\pi na/L$ para que a função se torne mais concisa.

$$a_n = \frac{4a^3}{L} \frac{1}{z} \int_0^1 \operatorname{sen} zt(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (9)$$

E desta maneira, podemos notar que o coeficiente que buscamos encontrar, depende dos resultados de uma nova função em z , que definimos como $S(z)$.

$$S(z) = \frac{1}{z} \int_0^1 \operatorname{sen} zt(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (10)$$

Para encontrar os valores de $S(z)$, devemos expandir o seno e integrar termo a termo, obtendo:

$$S(z) = \frac{\pi}{8} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)} \quad (11)$$

E essa expressão pode ser escrita por completo como uma série infinita que converge para certos valores de z .

$$S(z) = \frac{1}{1^2 \cdot 3} - \frac{z^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{z^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{z^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9} \dots \quad (12)$$

Logo, é possível um plotar gráfico da função supracitada, e encontrar os valores de $S(z)$ para cada z utilizado em nosso experimento.

Desde modo, encontramos que o coeficiente será dado pela Equação (13), e o valor efetivo da área do orifício ocupada será representada pela Equação (14).

$$a_n = \frac{4a^3}{L} \left[\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} S \left(\frac{2\pi na}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right] \quad (13)$$

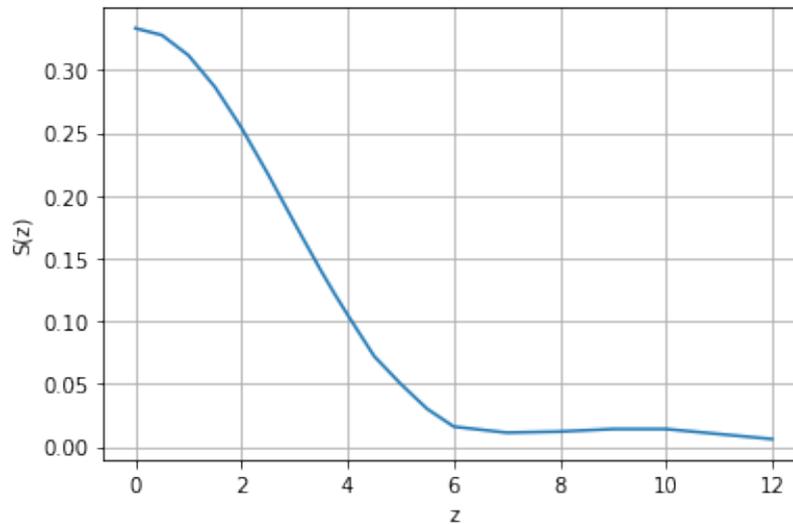


Figura 3: Resultados numéricos de $S(z)$

$$A(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} S\left(\frac{2\pi na}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \quad (14)$$

E a intensidade será proporcional ao quadrado da amplitude da função anterior.

$$\left[nS\left(\frac{2\pi na}{L}\right) \right]^2 \quad (15)$$

Assim, definimos a frequência fundamental - ou harmônico fundamental - de cada onda sonora como " $n = 1$ ", e a partir disto, analisamos a razão entre as amplitudes dos harmônicos para cada valor de a/L . Com os resultados, obtivemos a Tabela 1.

a/L	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0,32	1	0,684	0,067	0,036	0,076
0,40	1	0,213	0,025	0,014	-
0,48	1	0,055	0,060	0,021	-
0,50	1	0,054	0,058	-	-
0,64	1	0,052	0,034	-	-

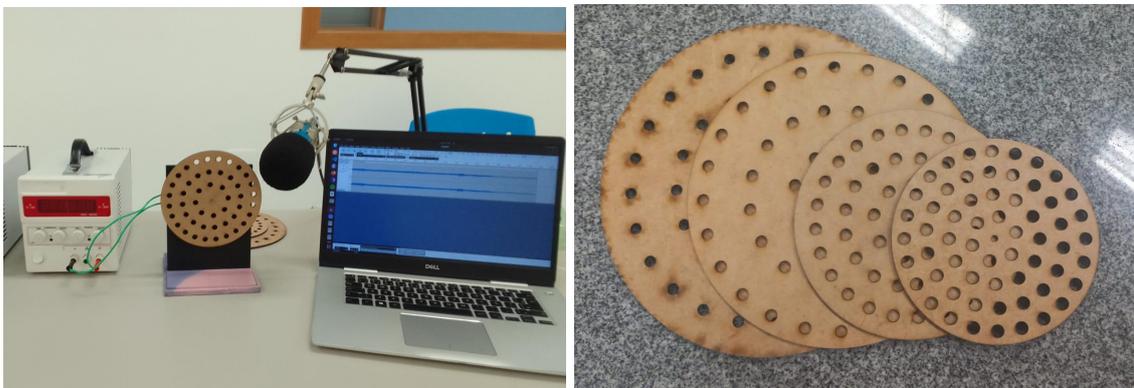
Figura 4: Tabela 1 - Razão entre as amplitudes dos harmônicos

Os valores que não estão marcados na Tabela 1 representam uma situação na qual z é maior do que 12. Para esses casos, a função $S(z)$ se torna majoritariamente negativa, logo, não é possível calcular a amplitude.

III. DESCRIÇÃO EXPERIMENTAL

A. Equipamentos Utilizados e Procedimento

Para executarmos o experimento, utilizamos os seguintes equipamentos: [I] Um motor de 12V ligado à uma fonte de energia *MAXWELL* para controlar a velocidade de rotação; [II] O microfone de um celular *iPhone 8*; [III] Um soprador de ar *COMPACT 220V*, ligado à uma mangueira de 12m; [IV] Os discos, recortados em MDF, com 3 anéis de 8, 16 e 24 furos (q), de raio 3.95mm, e razão de a/L igual à 0.32, 0.40, 0.48, 0.50 e 0.64:



(a) Arranjo Experimental

(b) Discos utilizados

Figura 5

Para que o som do soprador não interferisse nos dados, conectamos a mangueira de modo que o aparelho pudesse ficar em outro ambiente fechado. Além disso, o experimento foi realizado em um ambiente silencioso e vazio - com exceção de quem controlava o aparato - e o canal de ar era posicionado a aproximadamente 1cm do disco.

B. Análise no Software Audacity

De início, o canal de ar converge com os orifícios mais internos do disco ($q = 8$), e após gravação clara do áudio, o posicionamos de modo a atingir os outros anéis ($q = 16$ e $q = 24$), para que cada áudio possua 3 diferentes frequências com as mesmas condições.

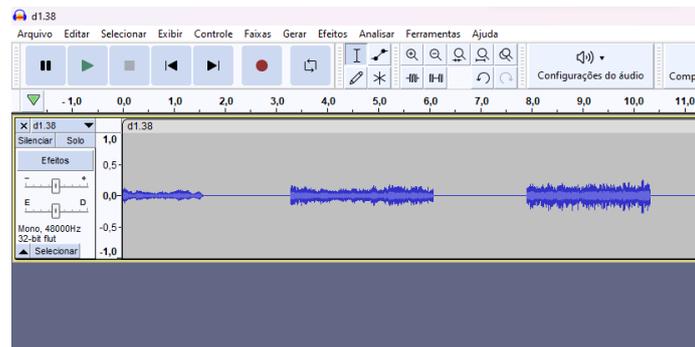


Figura 6: Perfil de cada áudio

Após gravarmos os áudios, retiramos todo o ruído externo e encontramos o Espectro da frequência (Figura 7), que é processado através de uma Transformada de Fourier (*Fast Fourier Transform*). Na qual as frequências de maior intensidade representam os harmônicos principais que compõem a onda sonora.

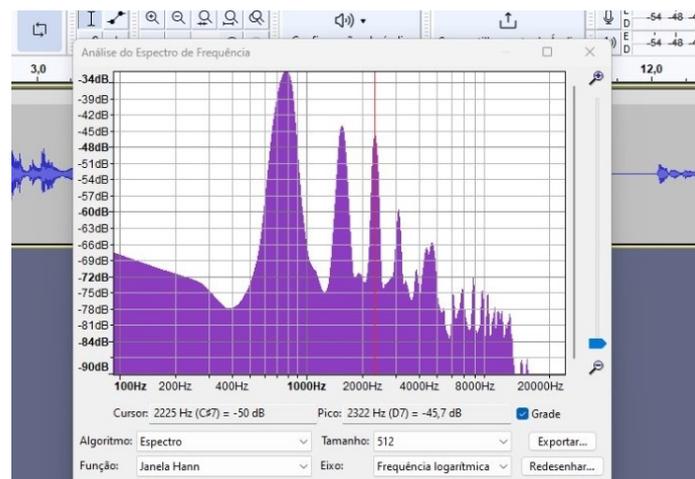


Figura 7: Espectro de frequência

Através do Espectro, obtivemos os valores da intensidade dos harmônicos, em decibéis (dB), e calculamos a potência da onda sonora (η) de cada um.

$$dB = 10 \cdot \log\left(\frac{\eta}{10^{-12}}\right) \quad (16)$$

Por fim, para encontrar a proporção entre a amplitude dos harmônicos prevista em nossa teoria, - com valores presentes na Tabela 1 - calculamos a raiz quadrada da razão de cada η encontrado pelo η da frequência fundamental.

$$\sqrt{\frac{\eta}{\eta_{fund}}} \quad (17)$$

C. Incerteza das Frequências coletadas

Sabemos que a 'largura à meia altura' - procedimento estatístico conhecido como *Full Width at Half Maximum (FWHM)* - é uma maneira de estimar o desvio padrão de uma variável distribuída no entorno de um valor central de forma bi-caudal. No caso de uma distribuição normal, a qual muitas grandezas na natureza tendem a seguir em alguma medida, a largura à meia altura corresponde à aproximadamente 2.5 vezes o desvio padrão daquela distribuição normal.

Tendo isso em mente, decidimos estimar a incerteza na frequência como aproximadamente 1/3 da largura à meia altura dos picos em torno das frequências fundamentais (picos que podem ser bem observados na Figura 7).

Um cuidado que precisamos destacar é que a altura do pico é medida em dB, ou seja, em escala logarítmica. Logo, para encontrar a "meia altura", precisamos primeiro converter o eixo y a um eixo em escala linear, através do próprio software *Audacity*.

IV. DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A. Intensidades dos harmônicos

Utilizamos as Equações (16) e (17) para calcular as Intensidades teóricas (em decibéis), utilizando a Tabela 1 como referência (esta Tabela contém os valores de η sobre o η_{fund}).

Ou seja, assumimos a Intensidade do Primeiro harmônico ($n=1$) encontrada experimentalmente como verdadeira para o modelo experimental e teórico, e seguimos analisando o comportamento dos próximos harmônicos baseado neste.

Em seguida, plotamos gráficos para cada a/L da Tabela, que descrevem a variação da frequência dos harmônicos principais em razão das Intensidades encontradas experimentalmente.

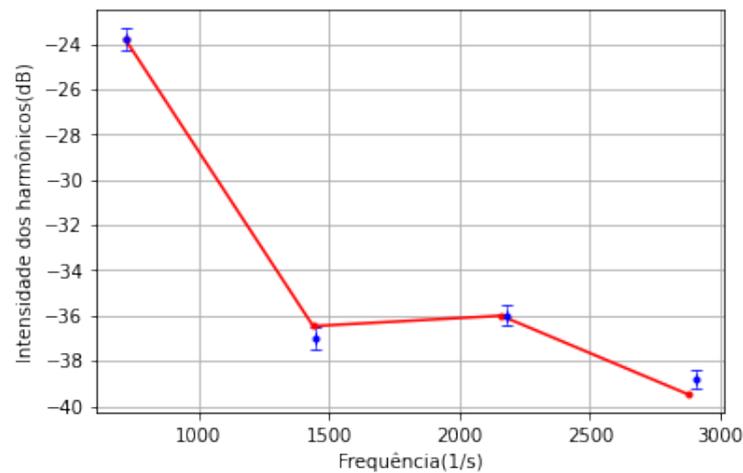


Figura 8: Frequência x Intensidade para $a/L=0.50$

A linha em vermelho conecta os pontos teóricos, e os pontos experimentais são representados em azul, com suas respectivas incertezas.

Para encontrar a incerteza da Intensidade dos harmônicos, calculamos a variância de cada

ponto, obtendo uma função do tipo $I = -a.f$. Logo, utilizamos essa relação para estimar as incertezas da Intensidade (I) através de uma propagação da incerteza da frequência (f), estimada na seção anterior.

Vale notar que, este método transfere a incerteza de f para uma apenas em I , restando unicamente as incertezas na vertical.

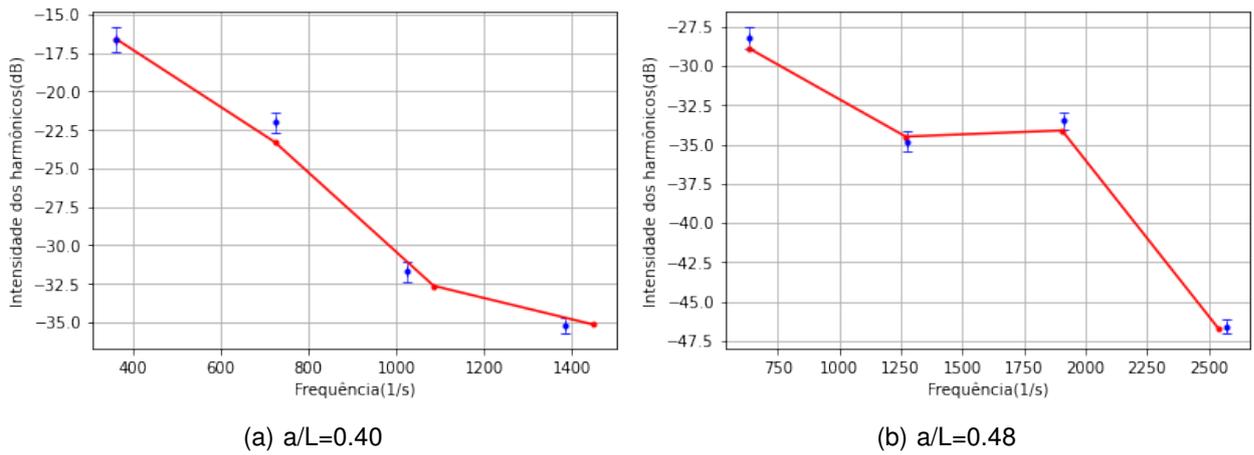


Figura 9

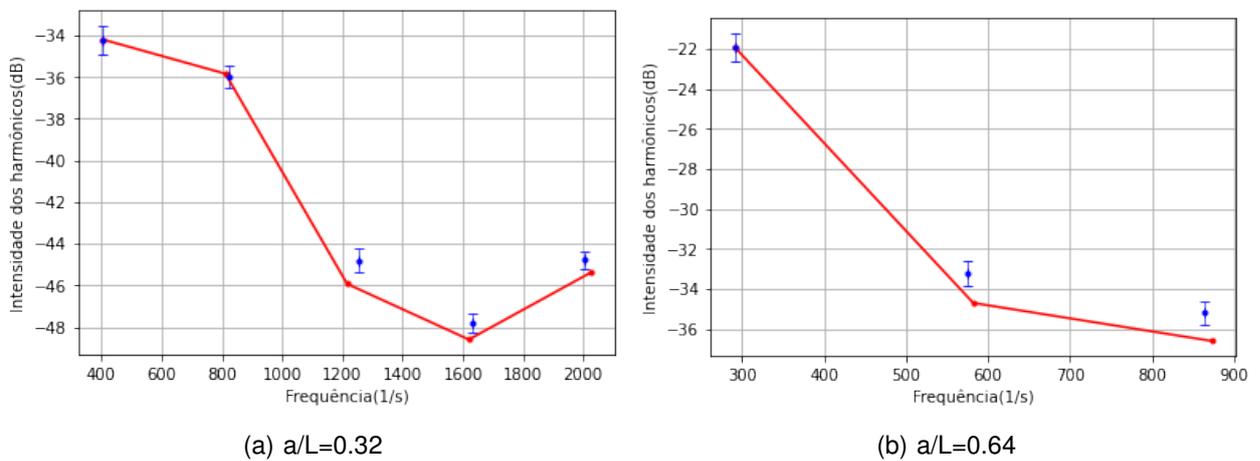


Figura 10

B. Teste Chi-Quadrado Reduzido

A fim de avaliar se proporções observadas nos gráficos anteriores mostram ou não diferenças significativas do esperado, utilizaremos uma ferramenta da Mecânica Estatística que compara duas variáveis categóricas independentes entre si, chamada de Teste Chi-Quadrado.

Em seguida, iremos dividir o valor de Chi-Quadrado pelo número de graus de liberdade (ou número de pontos, neste caso) para encontrar o resultado do Teste Chi-Quadrado Reduzido, que nos dará uma melhor intuição a respeito da compatibilidade dos dados.

Para calcularmos o Chi-Quadrado, subtraímos o valor da Intensidade teórica do valor da Intensidade experimental (para cada ponto), em seguida, dividimos este valor pela incerteza na Intensidade no ponto correspondente. E ao fim, basta somar os quadrados dos resultados encontrados para cada gráfico de a/L .

$$\sum \frac{(x_t - x_e)^2}{\sigma^2} \quad (18)$$

Com os resultados em mãos, obtivemos a Tabela 2.

a/L	0,32	0,40	0,48	0,50	0,64
CHI	9.04	4.30	1.35	2.64	1.31
CHI-red	1.81	1.07	0.34	0.66	0.47

Figura 11: Tabela 2 - Resultados do Teste Chi-Quadrado Reduzido

Nos casos em que o resultado vale menos do que 1, podemos afirmar que os dados seguem fielmente o modelo teórico. No entanto, vale ressaltar que já se era esperado algum nível de flutuação nos resultados anteriores, devido ao baixo número de dados e dependência de diversos valores que possuem sua própria incerteza.

C. Velocidade de rotação do disco

Para analisar mais um parâmetro que envolve o nosso sistema, plotamos um gráfico da variação da frequência (para os 3 anéis de furos) em razão da velocidade de rotação do disco.

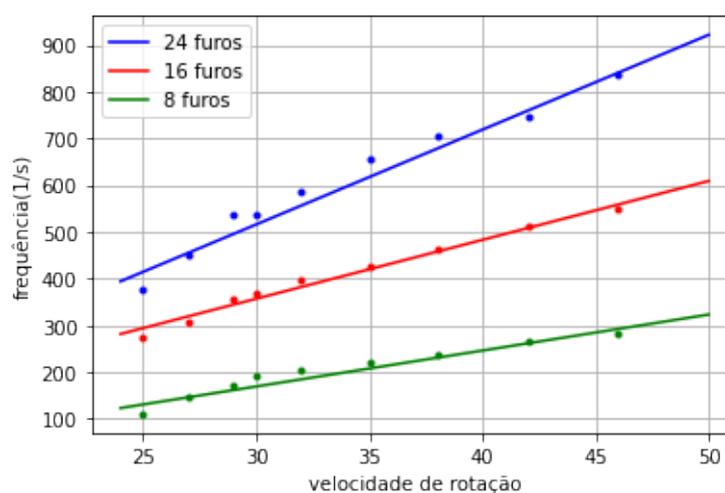


Figura 12: Variação da velocidade

Após coletarmos os dados, realizamos um ajuste linear que se enquadrou com excelência na tendência de crescimento dos dados. Confirmando a parte da teoria que prevê o crescimento linear da frequência (f), pois podemos descrevê-la apenas com variáveis de primeiro grau.

$$f = \frac{1}{T} \cdot L \cdot q \quad (19)$$

Sendo T o período de uma volta completa do disco.

V. CONCLUSÃO

Ao longo deste relatório, descrevemos o processo de construção de um tipo específico de Sirene, definida como um disco com orifícios e em rotação. Como também, realizamos

uma análise da amplitude dos harmônicos principais, da frequência e da intensidade das ondas sonoras produzidas por tal aparato. Somado a uma detalhada descrição a respeito da metodologia científica empregada durante todo o procedimento.

Através da observação dos gráficos, podemos inferir que existirá uma tendência nos valores das Intensidades, que sofrem grande diminuição entre o Primeiro ($n = 1$) até o Terceiro ($n = 3$) harmônico, porém não necessariamente prosseguem fiéis a este padrão de decréscimo para os próximos harmônicos ($n = 4$ adiante).

Não foi possível realizar uma análise dos harmônicos posteriores devido ao limite teórico, e também pela falta de acurácia na coleta de dados para harmônicos muito distantes do principal. Logo que, sua baixa intensidade permite que seja confundido ou influenciado por quaisquer ruídos presentes nos áudios analisados.

Em geral, o dados experimentais apresentaram grande compatibilidade com o modelo teórico e com nossas previsões iniciais, comprovada através do uso de ferramentas da Mecânica Estatística, de modo que apresentamos uma explicação dos fenômenos envolvidos e tivemos êxito em relacionar o vivenciado experimentalmente com os fundamentos teóricos.

Para os próximos passos, acreditamos que seria importante uma outra abordagem partindo de Mecânica dos Flúidos para realizar uma análise isolada da velocidade do fluxo de ar.

Tendo em mente que o valor da pressão aplicada pelo fluxo de ar define a quantidade de energia perdida pelo arrasto do ar com o orifício, poderíamos encontrar um meio de relacionar - através da Equação de Euler Linearizada - o valor da pressão com a amplitude da onda sonora, e conseqüentemente, realizar outras variações de parâmetro que independem da

frequência, como geometria do orifício, grossura do disco ou material do disco. .

[1] Nussenzveig, H. M., Curso de Física Basica II: Fluidos, Oscilacoes e Ondas, Calor. Edgard Blucher, 1983.

[2] Kieth R. Symon, Mecânica, Addison-Wesley, 1971.

[3] Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character

[4] Whittaker and Watson, Modern Analysis, 2nd Vol. 98, No. 694 (Mar. 3, 1921), pp. 414-427 - pag.54