Análise?

Como trabalhar com caras grandes

João Rafael

2023

1 Introdução

O objetivo desse material **não** é de ensinar análise ou cálculo (esse ainda vai existir, tenham calma). O objetivo é fazer sentido de ideias de comparar grandezas, olhar para extremos e monovariantes de forma esperta com o fim de concluir fatos importantes ou até mesmo problemas completos. Aprender a ter as ideias intuitivas que envolvam análise é o principal fim desse artigo.
Adiante veremos maneiras de aplicar essas ideias em problemas olímpicos de maneira mais natural possível.

2 Definições e notações

Como um grande matemático me disse, "cálculo é corolário de análise". Dessa maneira, usaremos extensivamente linguagens e notações de cálculo, como as de limite.

Se $a_1, a_2, \ldots$ é uma sequência de reais, dizemos que a sequência é limitada inferiormente se existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq C_1$, para todo n, e dizemos que a sequência é limitada superiormente se existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq C_2$, para todo n.
Dizemos, ainda, que a sequência é limitada se for limitada superiormente e inferiormente ao mesmo tempo. Chamamos C_1 de um ponto inferior e C_2 um ponto superior.

Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma sequência de reais. Se ela for limitada superiormente, chamamos de $M = \sup(a_k)_{k\geq 1}$ o supremo da sequência (ele existe pelo axioma do supremo) se M é um ponto superior e $M \leq C_2$, para todo C_2 ponto superior. Definimos analogamente $m = \inf(a_k)_{k\geq 1}$ como o ínfimo da sequência, caso seja limitada inferiormente.

Três notações que usaremos muito serão as de *Big-O*, *Big-theta*, *Big-omega* e *Little-O*, denotadas por $\mathcal{O}, \Theta, \Omega$ e o, respectivamente.

Sendo f e g são funções que tomam valores reais, dizemos que:

- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ se:
$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$
ou, em outras palavras, se existem constantes C e x_0, com $C > 0$, tais que $f(x) \leq Cg(x)$, para todo $x \geq x_0$.
- $f(x) = \Omega(g(x))$ se $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$.
- $f(x) = \Theta(g(x))$ se existem C_1, C_2 constantes positivas tais que:
$$C_1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e } \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq C_2,$$

isto é, se existem x_0, C_1, C_2 com $C_1 g(x) \leq f(x) \leq C_2 g(x)$, para todo $x \geq x_0$.

- $f(x) = o(g(x))$ se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Além disso, dizemos que uma sequência a_n diverge se $lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.
Se $S \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$, denotamos por $S_{\leq n}$ o maior subconjunto de S com elementos menores ou iguais que n.
Dados A e B conjuntos de inteiros positivos, dizemos que $d_B(A)$ é a densidade de A sobre B se

$$d_B(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_{\leq n} \cap B_{\leq n}|}{|B_{\leq n}|}.$$

3 Teoremas e fatos notáveis

3.1 Teoremas de Análise e Cálculo

Teorema 1. (Teorema do confronto) Sejam $a < c < b$ reais e f, g, h funções definidas no intervalo I, com $(a, c) \cup (c, b) \subseteq I$. Suponha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (a, c) \cup (c, b)$. Se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Teorema 2. (Teorema do valor intermediário) Sejam $a < b$ reais e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então para todo c entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um x_c tal que

$$f(x_c) = c.$$

Teorema 3. (Teorema do valor médio) Sejam $a < b$ reais e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ um função contínua e derivável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Teorema 4. (Regra de L'Hopital) Sejam f, g funções deriváveis numa união de intervalos I com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Se a pertence ao fecho de I e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 5. (Bolzano-Weierstrass) Se (a_n) é uma sequência de reais limitada então tem uma subsequência convergente, i.e, existe uma sequência estritamente crescente de inteiros (b_n) e um real c tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = c.$$

Fato 1. Se um real não negativo a é tal que que para todo b positivo temos $a \leq b$ então $a = 0$.
Fato 2. Se duas funções f, g são deriváveis num intervalo I são tais que

$$f(a) = g(a)$$

e $f'(x) \geq g'(x)$ para $x \geq a$, então $f(x) \geq g(x)$ para $x \geq a$.
Fato 3. Se ϵ é um real positivo e (a_n) é uma sequência de reais eventualmente monótona (crescente ou decrescente a partir de certo ponto) tal que existe um N inteiro positivo de modo que

$$|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon,$$

para todo $n \geq N$, então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty.$$

Fato 4. Se P e Q são polinomios de coeficientes reais de grau a e b, respectivamente, com $a < b$, e m, n reais não nulos, com $|m| < 1$ e $|n| > 1$, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{m^x}{P(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{n^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n^x}{x!} = \lim_{x\to\infty} \frac{x!}{x^x} = 0.$$

Fato 5. Se P é um polinômio de coeficientes reais tal que existam a, b reais com $P(a) < 0$ e $P(b) > 0$, então P tem alguma raíz real.
Fato 6. Se P é um polinômio de coeficientes reais e grau ímpar, então P tem raíz real.
Fato 7. Se x_n, y_n são sequências de inteiros e (a_n) e (b_n) são sequências de reais com

$$|\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n| < 1,$$

e

$$x_n + a_n = y_n + b_n,$$

para todo n suficientemente grande, então $x_n = y_n$ e $a_n = b_n$, para todo n suficientemente grande.
Fato 8. Se $\alpha > 0$ é um irracional, então para todo $m, \epsilon > 0$ existem um a, b inteiros tais que

$$|a\alpha + b - m| < \epsilon.$$

Fato 9. Sejam m e n inteiros positivos. Então existem exatamente $\lfloor m^{1/n} \rfloor$ potências n-ésimas menores

ou iguais que m.

Fato 10. Se $k > 1$ é um real, então

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k}$$

converge. Caso $k \leq 1$ então o somatório diverge.

Fato 11. Seja p_k o k-ésimo primo. Então

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$$

diverge e

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^2} < \frac{1}{2}.$$

Fato 12. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Fato 13. Se um conjunto A de inteiros positivos tem densidade sobre $\mathbb{Z}_{>0}$ positiva então ele tem infinitos elementos.

Fato 14. Se um conjunto A de inteiros positivos tem densidade sobre $\mathbb{Z}_{>0}$ igual a 0, então existem intervalos arbitrariamente grandes de inteiros sem nenhum elemento de A.

4 Problemas com solução

ATENÇÃO: Tente os problemas antes de ler as soluções!

Problema 1. Um conjunto de números reais A é dito *enquadrado* se é limitado e para todos $a, b \in A$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Ache o menor real pertencente a um conjunto *enquadrado*.

Solução. Como A é limitado, o conjunto tem supremo e ínfimo. Sejam s e i esses, respectivamente. Como $(a-a)^2 = 0$ está em A, temos que $(a-0)^2 = a^2$ está em A, para todo $a \in A$. Isso nos dá diretamente que

$$s \geq (s-i)^2.$$

Isto se dá pelo fato de que existem subsequências (a_n) e (b_n) contidas em A tais que $lim_{n\to\infty} a_n = s$ e $lim_{n\to\infty} b_n = i$, donde $lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)^2 = (s-i)^2$, que não pode superar s já que $(a_n - b_n)^2 \in A$. Porém, analisando a inequação $s \geq (s-i)^2$, temos que seu delta será

$$\Delta = (2i+1)^2 - 4i^2 = 4i + 1 \geq 0 \implies i \geq \frac{-1}{4}.$$

O conjunto $A = [\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}]$ satisfaz o enunciado e as condições, e portanto o menor real num conjunto enquadrado é o $\boxed{\frac{-1}{4}}$.■

Problema 2. Ordene o conjunto das potências perfeitas em uma sequência crescente (a_n). Mostre que existem infinitos n tais que $2023 \mid a_{n+1} - a_n$.

Solução. Mostraremos que existem infinitos quadrados perfeitos consecutivos nessa sequência que deixam o mesmo resto por 2023. Primeiramente, veja que para isso devemos ter k^2 e $(k+1)^2$ de modo que $2023 \mid (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, donde $k \equiv 1011 \pmod{2023}$. Assim, mostraremos que existem infinitos n para os quais não existe nenhuma potência perfeita entre $(2023n+1011)^2$ e $(2023n+1012)^2$. Suponha que existem apenas finitos. Veja que até N temos exatamente $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ quadrados perfeitos e no máximo

$$S_N = \sum_{k \geq 3} \lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor = \sum_{3 \leq k \leq \lfloor \log_2 N \rfloor} \lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor$$

potências perfeitas que não são quadrados perfeitos. Porém

$$\sum_{3 \leq k \leq \lfloor \log_2 N \rfloor} \lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor \leq \log_2 N \sqrt[3]{N} = o(\sqrt{N}) \implies S_N = o(\sqrt{N}).$$

Pela nossa suposição, como existem apenas finitos n satisfazendo a condição que queremos, existe um certo n_0 tal que, para todo $n > n_0$, existe uma potência perfeita entre $(2023n+1011)^2$ e $(2023n+1012)^2$. Porém, como nenhuma nenhuma dessas potências é um quadrado perfeito, então até $(2023n+2012)^2$ deveríamos ter no mínimo $n - n_0$ potências perfeitas tirando os quadrados perfeitos. Assim, sendo $(2023n+1012)^2 = q_n$:

$$n - n_0 \leq \#(\text{pot. perfeitas exceto quadrados até } q_n) \leq S_{q_n} = o(\sqrt{q_n})$$

$$\implies n - n_0 = o(\sqrt{q_n}),$$

que é um absurdo, já que $\sqrt{q_n} = 2023n + 1012$ cresce linearmente, assim como $n - n_0$. Assim, nossa suposição de que existem apenas finitos n é falsa e segue o problema. ■

Problema 3. Seja n e $\alpha \geq 1$ um real. Considere o conjunto

$$A(\alpha) = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \dots\}.$$

Suponha que $A(\alpha)$ contenha todos os inteiros positivos exceto os que deixam um certo resto r por n. Ache todos os possíveis valores de α.

Solução. Seja r o resto que não aparece. Pela condição do enunciado, sabemos que, para todo $k \geq 1$, $\lfloor \alpha(k+n-1) \rfloor - \lfloor \alpha k \rfloor = n$. Assim, deduzimos que

$$\lfloor \alpha k \rfloor = k \cdot \left(\frac{n}{n-1} \right) + C_k = k \cdot \left(\frac{n}{n-1} \right) + O(1),$$

onde C_k é uma constante que depende apenas do resto que k deixa por $n-1$.
Dessa maneira

$$\alpha k - \{\alpha k\} = \lfloor \alpha k \rfloor = k \cdot \left(\frac{n}{n-1} \right) + O(1)$$

$$\implies \alpha = \frac{n}{n-1} + \frac{O(1) + \{\alpha k\}}{k} = \frac{n}{n-1} + \frac{O(1)}{k}.$$

Tomando $k \to \infty$:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n}{n-1} + \frac{O(1)}{k} \right) = \frac{n}{n-1},$$

pois $O(1)$ é limitado. Assim, o único valor para α é $\frac{n}{n-1}$, que é fácil checar que funciona. ■

Problema 4. Sejam $p, q > 1$ inteiros positivos primos entre si. Mostre que existe um inteiro positivo n tal que o resto de p^n na divisão por q^n é maior que 10^{2023}.

Solução. Para esse problema, provaremos um lema muito útil que pode, inclusive, ser usado em outros problemas deste artigo.

Lema: Seja $c \neq 0$, $x \in \mathbb{Q}_{>1}$ e (m_n) uma sequência de inteiros. Se

$$\lim_{n\to\infty} cx^n - m_n = 0,$$

então x é inteiro.

Prova: Escreva $x = \frac{p}{q}$, com $(p, q) = 1$. Seja $\epsilon < \frac{1}{p+q}$ e n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $\left| c\left(\frac{p}{q}\right)^n - m_n \right| < \epsilon$. Então, multiplicando por p e por q, valem

- $|cpx^n - pm_n| < \epsilon p$;
- $\left|cqx^{n+1} - qm_{n+1}\right| < \epsilon q$.

Somando as duas equações usando o fato de que $cpx^n = cqx^{n+1}$ e desigualdade triangular, concluímos que

$$|pm_n - qm_{n+1}| < \epsilon(p+q) < 1.$$

Como os termos da diferença são inteiros, concluímos que $pm_n = qm_{n+1}$, para $n \geq n_0$

$$\implies m_{n+1} = m_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \implies m_{n_0+k} = \left(\frac{p}{q}\right)^k m_{n_0}.$$

Porém, como (m_n) só tem inteiros, temos que $q^k \mid m_{n_0}$ para todo $k \geq 1$.

Veja que $m_{n_0} \neq 0$ pois senão teríamos $m_n = 0$ para $n \geq n_0$, o que implicaria que $lim_{n\to\infty} cx^n = 0$, que é falso já que $c \neq 0$ e $x > 1$. Assim, devemos ter que $q = 1$, e portanto x é inteiro, como queríamos demonstrar. □

Com o lema provado, voltemos ao problema. Primeiramente, veja que se $p < q$, então p^n é o próprio resto na divisão por q^n, e como $p > 1$, esse valor cresce arbitrariamente, como queremos provar. Então, suponha que $p > q$. Fazendo a divisão euclidiana, para cada n existem k_n e r_n, com $0 \leq r_n < q^n$ tais que

$$p^n = k_n q^n + r_n \implies \left(\frac{p}{q}\right)^n - k_n = \frac{r_n}{q^n}.$$

Caso (r_n) seja limitada superiormente, temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q^n} = 0$, e logo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^n - k_n = 0 \implies \frac{p}{q} \in \mathbb{Z},$$

que é um absurdo já que $(p, q) = 1$ e $q > 1$. Então (r_n) é ilimitada superiormente, como queríamos demonstrar. ■

5 Problemas

Problema 1. Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes reais. Prove que existem inteiros n e k tais que k tem n digitos e mais de $P(n)$ divisores positivos.

Problema 2. Considere o polinômio de segundo grau $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P_n(x)}{2016}$ para $n \geq 1$.

a) Prove que existe um número real r tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo n.

b) Determine a quantidade de inteiros m tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos valores de n.

Problema 3. Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo inteiro positivo n, a equação $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$ tem pelo menos uma solução real.

Problema 4. Encontre todas as funções sobrejetoras $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que:

$$2x \cdot f(f(x)) = (f(f(x)) + x) \cdot f(x)$$

para todo x real positivo.

Problema 5. Ache todos os polinômios P de coeficientes inteiros tais que para todo inteiro positivo n, todas as raízes de $P^n(x) = \underbrace{P(P(\ldots(P(}_{n \text{ vezes}}x))\ldots)$ são inteiras .

Problema 6. Para cada inteiro positivo n definimos por $S(n)$ as somas dos algarismos de n. Ache todos os polinômios $P(x)$ de coeficientes inteiros tais que para todo n suficientemente grande $P(n) > 0$ e:

$$P(S(n)) = S(P(n)).$$

Problema 7. Determine todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_{2011})$ de inteiros positivos tais que para todo inteiro positivo n existe um a tal que:

$$x_1^1 + 2x_2^n + 3x_3^n + \cdots + 2011x_{2011}^n = a^{n+1} + 1.$$

Problema 8. Defina a função $f : (0, 1) \to (0, 1)$ por

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} \text{ se } x < \frac{1}{2}; \\ x^2 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam a e b reais com $0 < a < b < 1$. Definimos as sequências a_n e b_n por $a_0 = a$, $b_0 = b$, e $a_n = f(a_{n-1})$ e $b_n = f(b_{n-1})$ para $n > 0$. Mostre que existe um inteiro positivo n tal que:

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Problema 9. *a*) Prove que dadas constantes a, b com $1 < a < 2 < b$, não existe partição do conjunto dos inteiros positivos em dois subconjuntor A_0, A_1 tal que: se $j \in \{0, 1\}$ e m, n pertencem a A_j, então $n/m < a$ ou $n/m > b$.

b) Determine todos os pares de reais (a, b) com $1 < a < 2 < b$ para os quais vale a seguinte propriedade: existe uma partição do conjunto dos inteiros positivos em três subconjuntos A_0, A_1, A_2 tal que se $j \in \{0, 1, 2\}$ e m, n pertencem a A_j, então $n/m < a$ ou $n/m > b$.

Problema 10. Existe alguma potência de 2 que comece (pela esquerda) com 7?

Problema 11. Ache todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que para todo x real positivo, existe um único y real positivo tal que:

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Problema 12. Suponha que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz:

i. $x < y \implies f(x) < f(y)$;

ii. $f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para todos $x, y \in (0, +\infty)$.

Prove que existe $x_0 \in (0, +\infty)$ tal que $f(x_0) < 0$.

Problema 13. Ache todas as constantes reais $c > 0$ para as quais existe uma função estritamente decrescente $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$f(x) \geq cf(x + f(x)),$$

para todo real positivo x.

Problema 14. Mostre que para todo inteiro positivo n existe um inteiro positivo k tal que $k, k^2, \ldots, k^n$ todos tem algum bloco de 2022 na sua representação decimal. Por exemplo: 10**2022**819 e 140**2022**229 tem blocos de 2022 na sua representação decimal.

Problema 15. Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes reais tal que $P(x) > 0$ pra todo $x > 0$. Mostre que o polinômio $Q(x) = (x + 1)^n P(x)$ só tem coeficientes não negativos para n suficientemente grande.

Problema 16. Considere o polinômio $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\ldots(x+d_9)$, onde $d_1, d_2, \ldots, d_9$ são inteiros distintos. Prove que $P(x)$ é divisível por um primo maior que 20 para todo x suficientemente grande.

Problema 17. Seja k um inteiro positivo e (a_n) uma sequência de inteiros positivos tais que $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros positivos distintos dois a dois e para cada $n > k$, a_n é o menor inteiro que não pode ser escrito como soma de elementos distintos da sequência (possivelmente de um só). Mostre que $a_n = 2a_{n-1}$ para todo n suficientemente grande.

Problema 18. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que:

i. Para cada inteiro positivo n, temos que $f(n) < f(n + 1) < f(n) + 2020$;

ii. Para cada inteiro positivo n, temos que $f(S(n)) = S(f(n))$, onde $S(k)$ é a soma dos dígitos de k na base 10.

Problema 19. Sejam $a, b > 1$ inteiros positivos tal que para todo inteiro positivo n, temos

$$b^n - 1 \mid a^n - 1.$$

Mostre que $a = b^k$, para algum inteiro positivo k.

Problema 20. Sejam a e b inteiros positivos distintos e maiores que 1. Prove que existe um inteiro positivo n tal que $(a^n - 1)(b^n - 1)$ não é um quadrado perfeito.

Problema 21. Ache todos os inteiros positivos k para os quais existem um irracional positivo $\alpha > 1$ e um inteiro positivo N tal que $\lfloor \alpha^n \rfloor = m^2 - k$, para algum m inteiro, para todo $n > N$.

Problema 22. Seja $q_0, q_1, \ldots$ uma sequência de inteiros que satisfaz:

- Para todos $m > n \geq 0$, $m - n$ divide $q_m - q_n$;
- Existe um polinômio P tal que $|q_n| < P(n)$, para todo n.

Mostre que existe um polinômimo Q tal que $Q(n) = q_n$, para todo n.

Problema 23. Seja p um polinômio de coeficientes reais de grau maior que 1. Mostre que existem infinitos inteiros positivos que não podem ser escritos como $p(n+1) + p(n+2) + \cdots + p(n+k)$, para certos inteiros positivos n e k.

Problema 24. Para cada real $r > 1$, definimos

$$A(r) = \{\lfloor nr \rfloor \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Seja α um irracional maior que 2 e β um real tal que $A(\beta) \subset A(\alpha)$. Mostre que $\frac{\beta}{\alpha}$ é um inteiro.

Problema 25. Um inteiro positivo n é livre de quadrados se não existe inteiro positivo $k > 1$ tal que $k^2 \mid n$. Ordene os inteiros livres de quadrados em ordem crescente na sequência $a_1, a_2, \ldots$. Mostre que existem infinitos n tais que $a_{n+1} - a_n = 2022$.

Problema 26. Seja $C > 1$ um real e (a_n) uma sequência de reais positivos tal que:

i. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

ii. Para todo par de inteiros positivos (m, n), vale que $a_{mn} = a_m a_n$;

iii. Para todo par de inteiros positivos (m, n), vale que $a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$.

Prove que $a_n = n$, para todo inteiro positivo n.

Problema 27. Para a inteiro positivo, defina $F_1^{(a)} = 1, F_2^{(a)} = a$ e, para $n > 2$, $F_n^{(a)} = F_{n-1}^{(a)} + F_{n-2}^{(a)}$. Um inteiro positivo é dito fibonático se é igual a $F_n^{(a)}$ para algum a inteiro positivo e $n > 3$. Mostre que existem infinitos inteiros positivos não fibonáticos.

Problema 28. Mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ é livre de quadrados.

Problema 29. Dado um inteiro positivo $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, sua falsa derivada é definida por

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}.$$

Mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que $f(n) = f(n-1) + 1$.

Problema 30. Mostre que existe um conjunto de n pontos no plano que formam ao menos n^2

quadriláteros harmônicos.

Problema 31. Um polinômio não constante P de coeficientes reais não negativos é dito *cheiroso* se existe uma função $f : \mathbb{R}_{>}0 \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$f(x + P(x)f(y)) = (y + 1)f(x),$$

para todos os reais positivos x e y. Ache todos os polinômios *cheirosos*.

Problema 32. Ache todos os polinômios P de coeficientes inteiros tais que para todos os reais r e s, se $P(r)$ e $P(s)$ são inteiros, então $P(rs)$ também é inteiro.

Problema 33. Sendo n inteiro positivo, defina $S(n)$ como o menor inteiro positivo tal que $S(n)$ e n têm a mesma paridade, $S(n) \geq n$ e tais que não existam inteiros positivos $k, x_1, x_2, \ldots, x_k$ tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ e $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_k^2 = S(n)$. Prove que existem uma constante real $c > 0$ e um inteiro positivo n_0 tal que $S(n) \geq cn^{3/2}$ para todo $n > n_0$. (sim, esse problema tem uma solução com ideias de análise)

6 Dicas

Problema 1. Mostre que $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ funciona, onde (p_j) é a sequência dos primos e k é um inteiro suficientemente grande. Use que $p_{i+1} < 2p_i$, para $i \geq 1$.

Problema 2. Para o item a), procure um ponto fixo da função e cheque que ele é negativo. Para o item b), complete quadrado para chegar num produto telescópico. Para concluir, use que existem infinitos n e tome um limite de $n \to \infty$ para achar uma condição de tamanho necessária e suficiente para que um m funcione.

Problema 3. Cheque que $f^n(0) > 0$ e ache um real r negativo esperto tal que $f^n(r) < 0$. Então, conclua com o teorema do valor intermediário usando que todo polinômio é contínuo.

Problema 4. Suponha que $f(x) \neq x$, para certo x. Tome a sequência $a_n = \frac{1}{f^n(x)}$, e argumente que a sequência se estende para n negativo pela sobrejetividade. Conclua achando alguém na imagem de de f que é negativo, chegando num absurdo.

Problema 5. Chame um polinômio P de bom se todas as suas raízes são inteiras. Prove que se $degP \geq 3$, então existem finitos k inteiros tais que $P + k$ é bom e veja o que ocorre se um polinômio bom tem grau maior que 2 e uma raiz não nula. Com isso, separe em casos para o grau sendo $1, 2$ ou maior que 2.

Problema 6. Tome $n = 10^k - 1$ com k muito grande e olhe para tamanho.

Problema 7. Divida pelo maior x_i^n e olhe para tamanho, usando o fato de que são inteiros para concluir igualdades a partir de desigualdades tomando $n \to \infty$.

Problema 8. Suponha por absurdo que o enunciado é falso. Olhe para $a_n - b_n$ e cheque que essa diferença fica maior que $1/2$.

Problema 9. No item a), veja que se x é de um conjunto, então (ax, bx) são todos do outro conjunto. Então tome x e $x + 1$ grandes de conjuntos distintos (por que eles existem?) e encontre um absurdo. Para o item b), use a mesma ideia do item a) de que se x é de um conjunto, então (ax, bx) estão em outro conjunto. Porém, tome interseção desses conjuntos com x e $x + 1$ grandes de conjuntos diferentes e conclua uma condição de tamanho de a e b.

Problema 10. Existe. Veja que $2^n = 10^{\lfloor \log_{10} 2 \rfloor} \cdot 10^{\{\log_{10} 2\}}$ e então basta que $\log_{10} 7 < \{\log_{10} 2\} < \log_{10} 8$. Use o Fato 8!

Problema 11. Esse daí caiu na IMO 2022. Só brinca com tamanho. Faça o de sempre e uma hora você vai saber quando brincar com o tamanho das coisas.

Problema 12. Quase igual ao problema 4.

Problema 13. Se $c \leq 1$, qualquer função decrescente funciona. Se $c > 1$, faça $x \to x + f(x)$ uma quantidade suficiente de vezes para chegar num absurdo por tamanho.

Problema 14. Esse problema tem uma solução simples, sem ideias de análise. Porém, eu achei uma solução bem maneira dele. Prove que existe esse número de modo que o número comece com 2022 já de cara. Para isso, use a base indutiva colocando vários 0's no meio do número no passo indutivo.

Problema 15. Como você pode usar a condição $P(x) > 0$ para $x > 0$?

Problema 16. Quantos primos existem até 20?

Problema 17. Limite os termos por tamanho. A cota $a_n \geq 2a_{n-1}$ é simples. Prove que $a_n > 2a_{n-1}$ não pode acontecer muito.

Problema 18. Mostre que $f(1) = 1$ e $f(10^n) = 10^n$, para n suficientemente grande.

Problema 19. Esse é difícil. Uma ideia é usar o fator de que vale para todo n junto ao lema do exemplo 4.

Problema 20. Esse é mais difícil ainda... A dica é supor que tal n não existe e portanto $\sqrt{(a^n - 1)(b^n - 1)}$ é sempre inteiro. Então, abra o binômio de Newton generalizado (tem mais sobre isso no material de funções geratrizes) e olhe para tamanho para chegar num absurdo.

Problema 21. Adivinha só? Mais difícil ainda. Esse problema é uma união de vários refinamentos pra cotar tamanho. Crie uma sequência auxiliar dos quadrados e tente cotar a distância dessa sequência com uma recorrência esperta. Refine essa cota o suficiente para concluir que essa sequência auxiliar é, de fato, a recorrência e conclua.

Problema 22. Tome $d = deg(P)$ e tome Q um polinômio tal que $Q(i) = q_i$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, d$. Prove que esse polinômio satisfaz $Q(n) = q_n$, para todo n.

Problema 23. Olhe para a soma dos inversos dos números que são escritos da forma do enunciado. Prove que essa soma diverge mais lentamente que a soma harmônica, chegando num absurdo por tamanho, já que se apenas finitos números não pudessem ser escritos dessa forma, então as somas cresceriam na mesma velocidade.

Problema 24. Use o Fato 8 várias vezes. Primeiro para provar que $\frac{\beta}{\alpha}$ é racional e depois que é inteiro, tudo isso usando o Fato 8.

Problema 25. Prove que a densidade dos números livres de quadrados é maior que $1/2$ e faça PCP infinito.

Problema 26. Use o segundo fato diversas vezes para cotar a_n por cima. A moral principal é cotar as coisas com isso e concluir. Não é fácil, mas é essa a moral.

Problema 27. Ache uma condição necessária e suficiente para que um número seja fibonático que envolva apenas uma relação congruência. Prove que a densidade dos números com essa condição é menor que 1 e portanto existem infinitos não fibonáticos.

Problema 28. Use o fato de que os livres de quadrado tem densidade menor que $1/2$ e olhe para a quantidade de soluções de $p^2 \mid n^2 + 1$.

Problema 29. Observe que $f(cn) = f(n)$ se c é livre de quadrados e $(n, c) = 1$. Com isso, usando a

densidade dos livres de quadrados, mostre que, dadas duas p.a's (a_n) e (b_n), existem infinitos n para os quais a_n e b_n são livres de quadrados. Use, Bézout para concluir usando o lema anterior.

Problema 30. Prove que tal conjunto existe com todos os pontos no círculo unitário. Para isso, projete os pontos do círculo unitário a partir a partir de $(0, 1)$ na reta real. Então basta achar um conjunto de n pontos na reta real formando ao menos n^2 quádruplas harmônicas. Prove que o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ funciona para n suficientemente grande.

Problema 31. Prove que P é linear. Então, prove que f é bijetora, contínua, monótona e que seu ínfimo é 0. Depois de manipular suficientemente, você vai chegar na equação de Cauchy exponencial um pouco diferente. Esse problema é bem difícil.

Problema 32. Veja que se $P(s)$ é inteiro, então $P(ns)$ é inteiro, onde n é inteiro. Se $degP = n$, tome uma combinação linear de $P(0)$, $P(x)$, $\ldots$, $P(nx)$ resultando em $a_n x^n$, onde a_n é o coeficiente líder de P. Então prove que $P(s)$ é inteiro se, e somente se, s é uma raiz n-ésima. Conclua a partir disso.

Problema 33. Prove que existe tal constante para todo inteiro positivo n. Para isso, prove que $S(n) \geq 2n$ e faça indução. Se tudo correr certo, uma hora você vai achar o quão pequeno você precisa que o c seja, e então conclua.

7 Referências

- Análise Real - Vol.1 - Elon Lages Lima
- Wikipédia (kkkkkkkk)