

XXIX Olimpíada Internacional de Física

Reykjavík, Islândia

Parte teórica

Sábado 4 de Julho de 1998

Duração: 8 H – 13 H

Lê isto primeiro:

1. Utiliza apenas a esferográfica que te foi dada.
2. Usa um só lado das folhas de respostas.
3. Usa o *mínimo texto possível* nas tuas respostas; exprime-te de preferência com equações, números e desenhos. **Sumaria os teus resultados nas folhas de respostas.**
4. Para tudo, excepto as respostas finais e os gráficos, utiliza as folhas de papel em branco. Tal aplica-se, por exemplo quando se te pede *mostra que ...* e também para todos os cálculos que queres que sejam considerados na correcção.
5. Podes muitas vezes resolver partes posteriores de um problema sem teres resolvido partes anteriores. Nesses casos podes utilizar o resultado de uma parte anterior tal como vem no enunciado.
6. Indica em todas as folhas o teu nome, o número de estudante, o número da página e o número total de páginas. Indica também o número do problema nas folhas brancas.
7. No final no exame põe por ordem as folhas de respostas. Podes deixar sobre a mesa todo o material que não queiras entregar para correcção.

Este conjunto de enunciados contém 12 páginas (com esta incluída).

Exame preparado em:

Universidade da Islândia, Departamento de Física, em colaboração com físicos da Agência Nacional da Energia.

Problema 1: Um prisma hexagonal a rolar

Considera um prisma hexagonal regular sólido, longo e rígido, como um lápis comum (Figura 1.1). A massa do prisma é M e está uniformemente distribuída. O comprimento do lado da base hexagonal é a . O momento de inércia I do prisma hexagonal em torno do seu eixo de simetria longitudinal é

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$

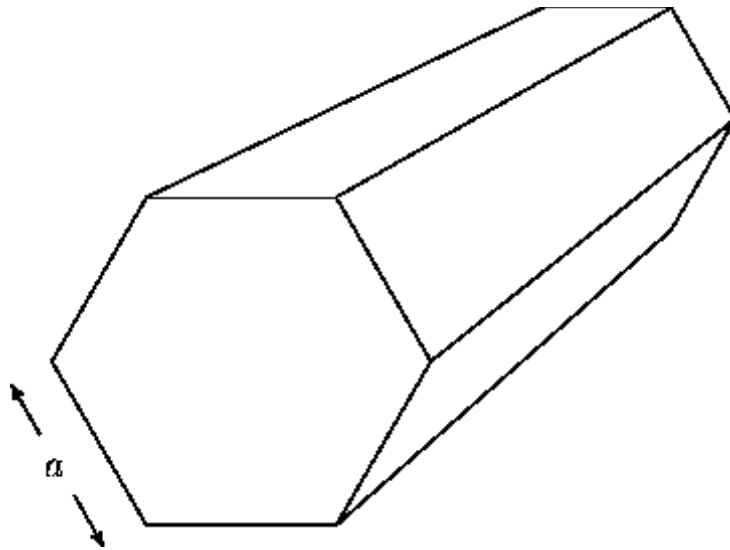


Figure 1.1: Um prisma sólido regular cuja base é um hexágono.

O momento de inércia I' em torno de uma aresta do prisma é

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

a) (3,5 pontos) O prisma encontra-se inicialmente em repouso, com o seu eixo na posição horizontal, sobre um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal (Figura 1.2). Considera que as faces do prisma são ligeiramente côncavas pelo que o prisma apenas toca o plano nas arestas. O efeito destas concavidades no momento de inércia pode ser ignorado. É dado um empurrão ao prisma pondo-o a rolar, descendo o plano inclinado “rolando aos solavancos”, havendo em cada instante uma só aresta em contacto com o plano. Considera que o atrito evita o escorregamento do prisma e que este não deixa nunca o contacto com o plano. A velocidade angular imediatamente antes de uma dada aresta tocar o plano é ω_i e a velocidade angular imediatamente após o impacto é ω_f .

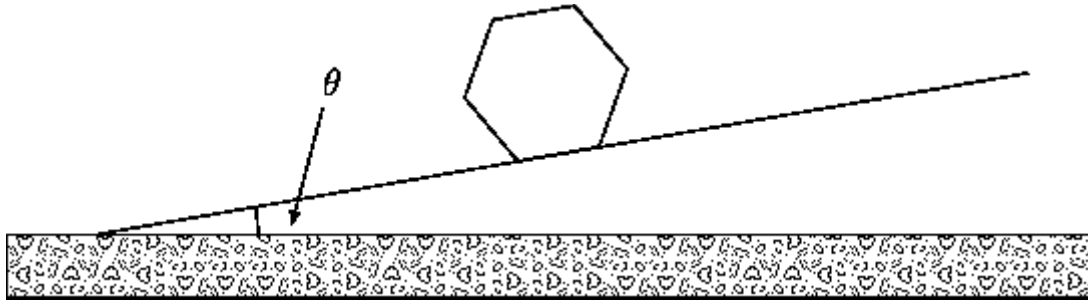


Figure 1.2: Um prisma hexagonal sobre um plano inclinado.

Mostra que se pode escrever

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

e escreve o valor do coeficiente s na tua folha de respostas.

b) (1 ponto) A energia cinética do prisma imediatamente antes e depois do impacto é K_i e K_f , respectivamente. Mostra que é válida a relação

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

e escreve o valor do coeficiente r na tua folha de respostas.

c) (1,5 pontos) Mostra que, para que o próximo impacto ocorra, K_i deve exceder um valor mínimo $K_{i,\min}$ que pode exprimir-se na forma

$$K_{i,\min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

onde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade.

Determina o coeficiente δ em função do ângulo de inclinação θ e do coeficiente r . Escreve a tua resposta na folha de respostas. (Usa o símbolo algébrico r , não o seu valor numérico).

d) (2 pontos) Se for satisfeita a condição da alínea (c), a energia cinética K_i aproxima-se de um valor fixo, $K_{i,0}$, à medida que o prisma desce o plano inclinado. Sabendo que o limite existe, mostra que $K_{i,0}$ pode ser escrito na forma:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

e escreve κ em função de θ e r na folha de respostas.

e) (2 pontos) Calcula, com uma precisão de $0,1^\circ$, o ângulo de inclinação mínimo, θ_0 , a partir do qual o rolamento, uma vez iniciado, irá continuar sem parar. Escreve o valor numérico da tua resposta na folha de respostas.

Problema 2: Água debaixo de um glaciar

Um glaciar é uma camada espessa de gelo (com uma espessura que pode chegar a alguns quilómetros), assente sobre o solo e cuja extensão na horizontal é superior a algumas dezenas ou centenas de quilómetros.

Neste problema vamos analisar a fusão do gelo que pode ocorrer debaixo de um glaciar. Vamos considerar que, nestas condições, no gelo a pressão varia como num fluido viscoso, embora se deforme de uma forma quebradiça, principalmente por movimento vertical. Para a resolução do problema considera os dados da tabela seguinte.

Densidade da água:	$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$
Densidade do gelo:	$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$
Capacidade térmica mássica do gelo:	$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J} / (\text{kg}^\circ \text{C})$
Energia (calor latente) de fusão do gelo:	$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J} / \text{kg}$
Densidade da rocha magmática:	$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$
Capacidade térmica mássica da rocha magmática:	$c_r = 700 \text{ J} / (\text{kg}^\circ \text{C})$
Energia de fusão (calor latente) da rocha magmática:	$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J} / \text{kg}$
Fluxo médio de calor que flui para fora através da superfície da Terra:	$J_Q = 0.06 \text{ W} / \text{m}^2$
Temperatura de fusão do gelo:	$T_0 = 0^\circ \text{C}$, constante

- a) (0,5 pontos) Considera um glaciar espesso assente num local onde o fluxo de calor que vem do interior da Terra tem o valor médio. Usando os dados da tabela, calcula a espessura d da camada de gelo que funde em cada ano e escreve a tua resposta no quadro que lhe está destinado na folha de respostas.

b) (3,5 pontos) Considera agora a superfície de cima de um glaciar. O solo por baixo do glaciar tem uma inclinação α . A superfície de cima do glaciar tem uma inclinação β tal como se mostra na Figure 2.1. A espessura vertical do glaciar em $x=0$ é h_0 . Assim, as superfícies de baixo e de cima do glaciar são descritas pelas equações:

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (3.1)$$

Deduz uma expressão para a pressão p no fundo do glaciar, em função da coordenada horizontal x , e escreve-a na tua folha de respostas. Encontra uma relação matemática entre β e α para que a água que se encontra numa camada entre o glaciar e o solo esteja em repouso. Mostra que essa condição tem a forma $\tan \beta = s \tan \alpha$. Determina o coeficiente s e escreve o resultado na folha de respostas.

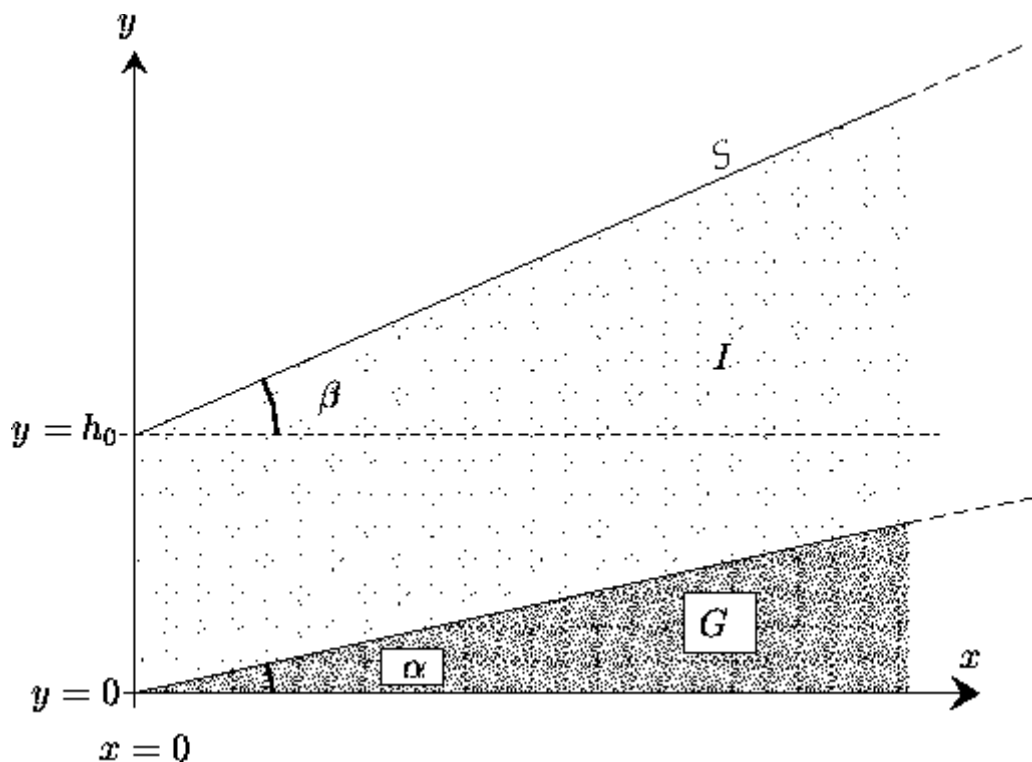


Figure 2.1: Secção recta de um glaciar, com uma superfície de cima plana, assente no solo que é um plano inclinado. *S: superfície, G: solo, I: glaciar.*

A recta $y_1=0,8x$ da Figura 2.2 representa a superfície do solo debaixo de um glaciar. A espessura vertical h_0 em $x = 0$ é de 2 km. Considera que a água no fundo do glaciar está em equilíbrio.

Transcreve para a folha de resposta em papel milimétrico a recta y_1 e acrescenta no gráfico a recta y_2 que representa a superfície do gelo. Identifica no gráfico cada uma das rectas.

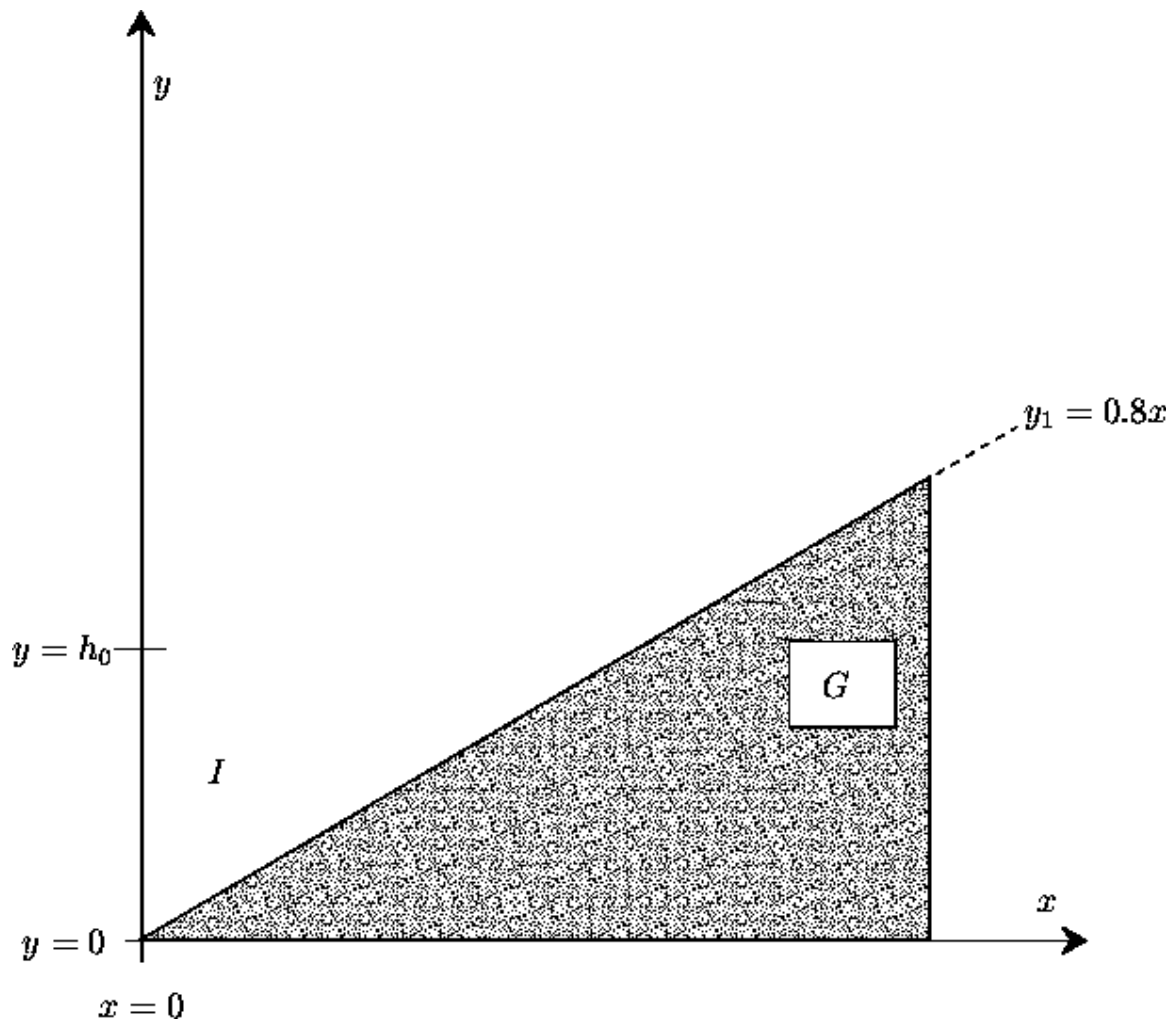


Figure 2.2: *Secção recta do glaciar assente num plano inclinado com água no fundo em equilíbrio. G: solo, I: glaciar.*

c) (1 ponto) No interior de uma grande placa de gelo que repousa num plano horizontal, originalmente com uma espessura constante, $D=2,0$ km, forma-se rapidamente, por fusão do gelo, uma porção de água com a forma cónica de altura $H = 1,0$ km e raio $r = 1,0$ km (Figura 2.3). Considera-se que o restante gelo se adapta à situação apenas por movimento vertical.

Mostra analiticamente no folha de respostas em branco e pictoricamente numa folha de papel milimétrico a forma da superfície do glaciar depois da formação do cone de água e de se ter estabelecido o equilíbrio hidrostático.

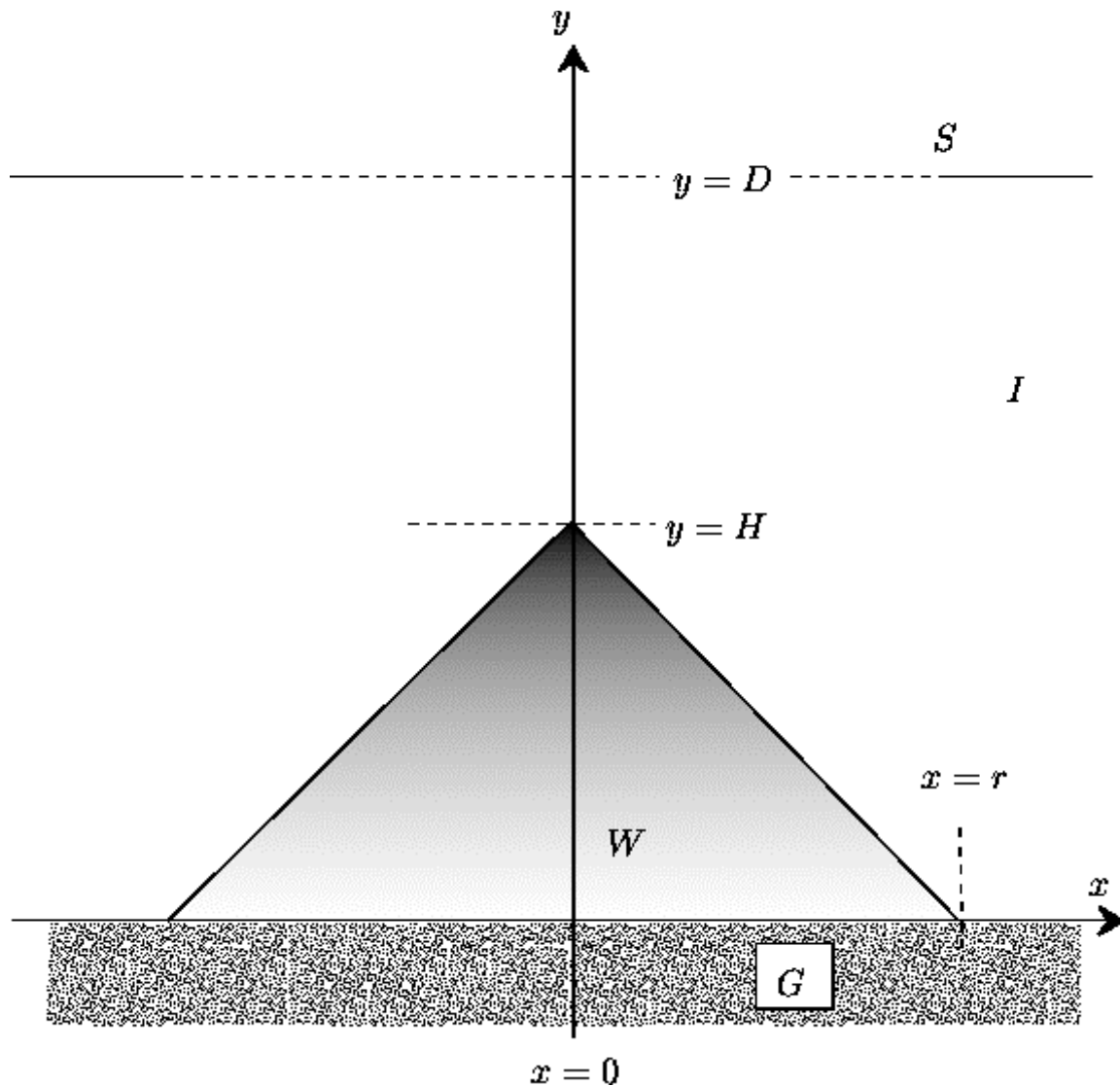


Figure 2.3: Uma secção vertical através de um plano que contém o eixo do cone de água no interior da glaciar. S : superfície, W : água, G : solo, I : glaciar.

d) (5 pontos) Na sua expedição anual um grupo internacional de cientistas explora um glaciar na Antártida. A superfície do glaciar é habitualmente plana e horizontal, mas desta vez eles encontraram uma depressão em forma de cratera, ou seja um cone invertido, com a profundidade $h = 100$ m e raio $r = 500$ m (Figura 2.4). A espessura do gelo na área é de 2000 m.

Após uma discussão, os cientistas concluíram que era provável que tivesse ocorrido uma pequena erupção vulcânica debaixo do glaciar. Uma pequena quantidade de magma (rocha fundida) irrompeu pelo fundo do glaciar, solidificou e arrefeceu, fundindo um certo volume de gelo. Os cientistas tentam então determinar o volume da inclusão magmática e o que aconteceu à água que fundiu.

Considera que o glaciar apenas se moveu na vertical. Considera ainda que o magma estava completamente fundido e a uma temperatura inicial de 1200 °C. Para simplificar, considera que a inclusão magmática tem a forma de um cone com a base mesmo por baixo da depressão cônica na superfície do glaciar.

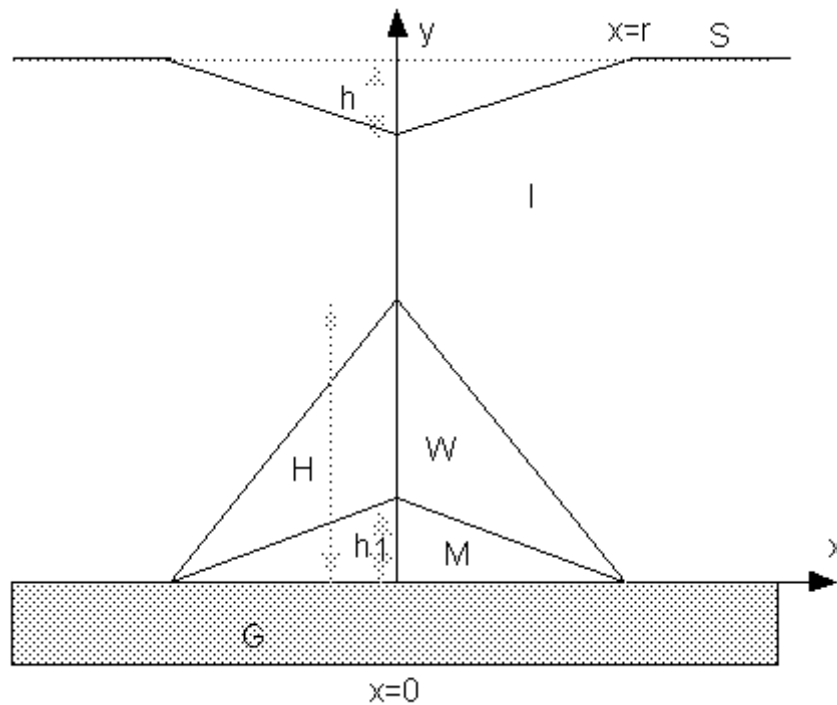


Figura 2.4: Secção recta de uma depressão cónica num glaciar. *S*: superfície, *G*: solo, *I*: glaciar, *M*: magma, *W*: água. Nota que os cones de magma e de água NÃO estão desenhados à escala.

O tempo que durou a erupção do magma foi curto comparado com o tempo durante o qual se processou a troca de calor. Considera-se que o fluxo de calor foi vertical de tal forma que o volume fundido de gelo em qualquer instante encontra-se limitado por uma superfície cónica centrada acima do centro da inclusão magmática.

Considerando válidas estas hipóteses, a fusão do gelo ocorre em duas etapas. Na primeira, a água não está em equilíbrio mecânico à superfície do magma e por isso desaparece. Esta água, que sai do sistema, pode considerar-se à temperatura de 0 °C. De seguida é restabelecido o equilíbrio hidrostático e a água acumula-se sobre a inclusão em vez de desaparecer. Determina as seguintes quantidades quando o equilíbrio térmico for alcançado. Escreve as respostas na folha de respostas.

1. A altura H do cimo do cone de água formado por baixo do glaciar, relativamente ao fundo original do glaciar.
2. A altura h_1 da inclusão.
3. A massa total m_{tot} da água produzida e a massa m' da água que desaparece.

Redesenha à escala numa folha de papel milimétrico as formas da inclusão magmática e da água que restou. Usa o sistema de coordenadas da Figura 2.4.

Problema 3: Mais rápido do que a luz?

Neste problema interpretamos medidas feitas em 1994 de emissão de ondas de rádio com origem numa fonte composta localizada na nossa galáxia.

O receptor estava sintonizado para uma banda larga de ondas de rádio com comprimentos de alguns centímetros. A Figura 3.1 mostra uma série de imagens obtidas em instantes diferentes. Os contornos representam pontos de igual intensidade à semelhança das curvas de nível num mapa topográfico. Na figura vê-se que há dois centros emissores que se movem em direcções opostas a partir de um ponto representado por cruzes nas imagens. (Considera-se que este ponto está fixo no espaço e é um corpo que também emite radiação com outros comprimentos de onda). As medidas foram efectuadas sempre à mesma hora nos vários dias.

A escala pode ser lida na figura, onde o comprimento do segmento de recta corresponde a $1''$ (um segundo de arco, $1'' = 1/3600$ do grau). A distância da Terra ao corpo central indicado pelas cruzes é $R = 12,5$ kpc. Um quilo-parsec (kpc) é igual a $3,09 \times 10^{19}$ m. A velocidade da luz é $c = 3,00 \times 10^8$ m/s. Não é necessário o cálculo de erros.

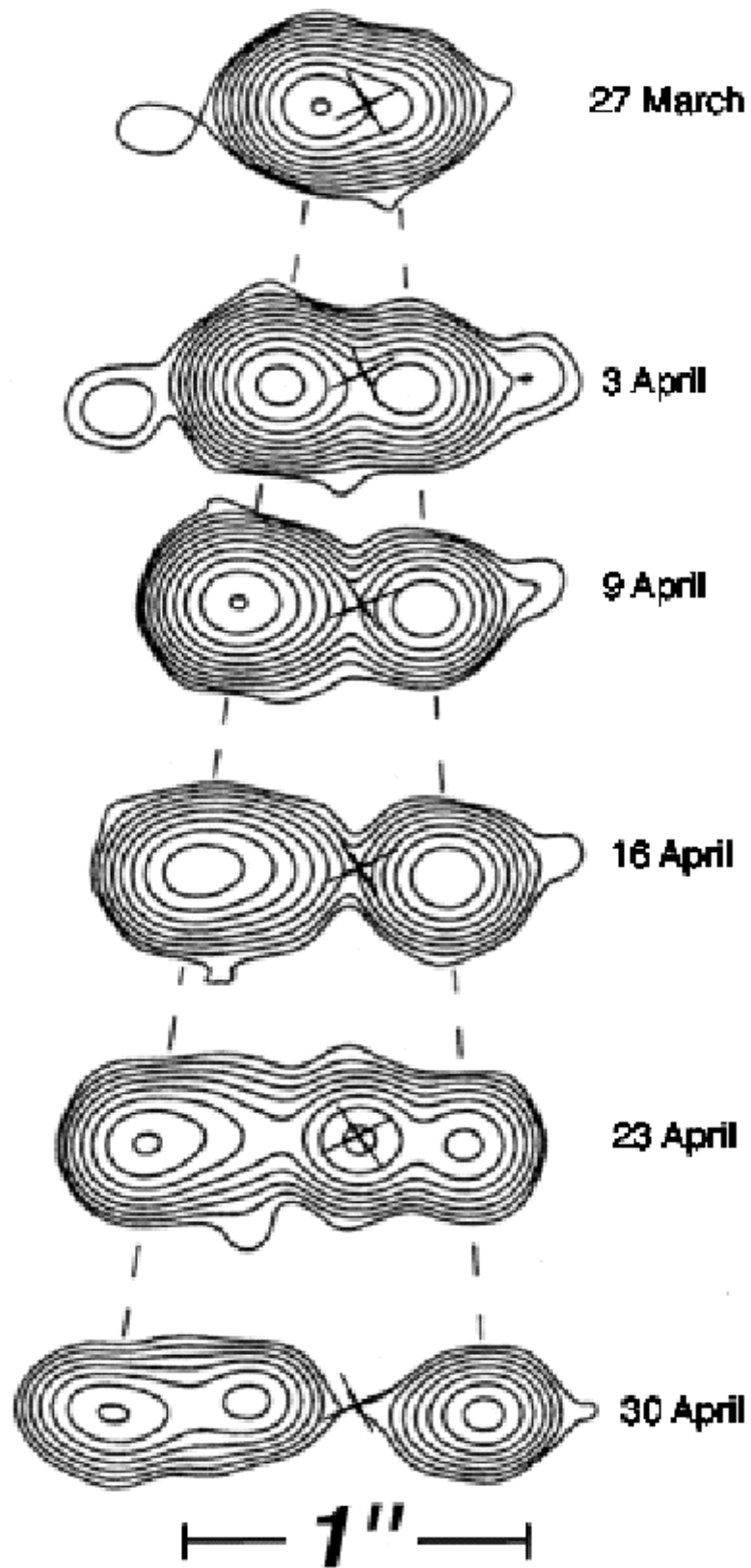


Figure 3.1: *Emissão de rádio por uma fonte da nossa galáxia..*

a) (2 pontos) Designem-se por $\theta_1(t)$ e por $\theta_2(t)$ as posições angulares dos dois emissores rádio ejectados, relativamente ao centro comum, onde os índices 1 e 2 se referem aos emissores da esquerda e da direita, respectivamente, e t ao instante da observação. As velocidades angulares dos dois emissores, vistas da Terra, são ω_1 e ω_2 . As respectivas velocidades lineares transversas aparentes dos dois emissores são $v'_{1,\perp}$ e $v'_{2,\perp}$.

A partir da Figura 3.1, faz o gráfico das posições angulares em função do tempo e determina os valores numéricos de ω_1 e ω_2 em mili-segundo de arco por dia (msa/d). Determina também os valores numéricos de $v'_{1,\perp}$ e $v'_{2,\perp}$, e escreve os resultados na folha de respostas. (Vais ficar surpreendido com alguns resultados).

b) (3 pontos) Para resolveres a situação com que deparaste na alínea a), considera uma fonte luminosa a mover-se com velocidade \vec{v} , fazendo um ângulo ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) com a direcção que une a fonte a um observador distante O (Figura 3.2). A velocidade pode ser escrita na forma $v = \beta c$, onde c é a velocidade da luz. A distância do observador à fonte é R . A velocidade angular da fonte, medida pelo observador, é ω , e a componente da velocidade linear aparente perpendicular à linha que une o observador à fonte é designada por v'_{\perp} . Determina ω e v'_{\perp} em função de β , R e ϕ e escreve a resposta na folha de respostas.

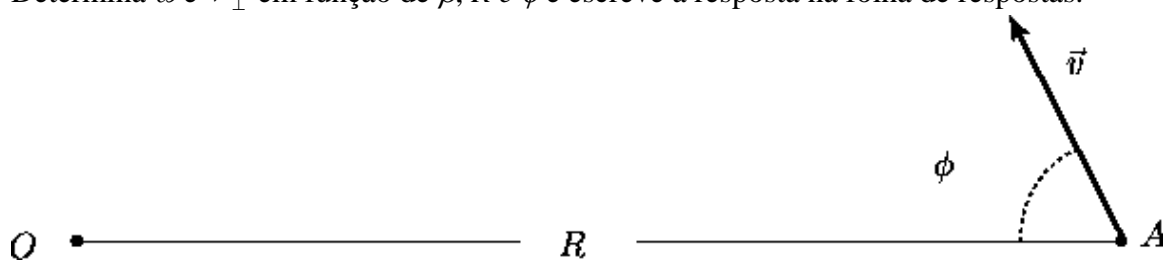


Figura 3.2: O observador está em O e a posição inicial da fonte luminosa é A . O vector velocidade é \vec{v} .

c) (1 ponto) Considera-se que os dois objectos ejectados descritos na introdução e na alínea a) movem-se em direcções opostas com igual velocidade $v = \beta c$. Os resultados da alínea b) permitem calcular β e ϕ a partir das velocidades angulares ω_1 e ω_2 e da distância R . Agora ϕ é o ângulo definido na alínea b) para o objecto da esquerda a que corresponde o índice 1 na alínea a).

Deduz expressões para β e ϕ em função de quantidades conhecidas e determina os seus valores numéricos a partir dos resultados encontrados na alínea a). Escreve os resultados nos sítios apropriados da folha de respostas.

d) (2 pontos) Na situação de um só corpo como na alínea b), obtém a condição para que a velocidade aparente v'_{\perp} seja maior do que a velocidade da luz c . Escreve a condição na forma $\beta > f(\phi)$ e indica a forma analítica da função f na folha de respostas.

Desenha na folha de papel milimétrico a região fisicamente relevante do plano (β, ϕ) . Indica claramente no gráfico em que parte da região se verifica a condição $v'_{\perp} > c$.

e) (1 ponto) Ainda na situação de um só corpo da alínea b), encontra uma expressão para o valor máximo $(v'_{\perp})_{max}$ da velocidade perpendicular aparente v'_{\perp} para um dado β e

escreve-a no sítio apropriado da tua folha de resposta. Nota que esta velocidade cresce ilimitadamente quando $\beta \rightarrow 1$.

f) (1 ponto) O valor de R indicado na introdução não é fiável. Os cientistas procuraram métodos melhores e mais directos para obter R . Uma desses métodos é o seguinte. Considera que podemos identificar e medir os desvios por efeito Doppler dos comprimentos de onda λ_1 and λ_2 da radiação emitida pelos dois objectos, correspondentes ao mesmo e conhecido comprimento de onda original λ_0 .

A partir da equação do efeito Doppler relativista

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1 - \beta \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e supondo, como anteriormente, que ambos os objectos emissores têm a mesma velocidade, v , mostra que $\beta = v/c$ pode exprimir-se em função de λ_0 , λ_1 e λ_2 de acordo com

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}$$

Escreve o valor numérico do coeficiente α no sítio apropriado da folha de respostas.

Podes reparar que tal significa que as medidas sugeridas dos comprimentos de onda, na prática permitem obter uma nova estimativa da distância.