31ª Olimpíada Internacional de Física

Leicester, Reino Unido

Prova Teórica

Segunda-feira, 10 de Julho de 2000

Por favor, leia isto primeiro:

1. O exame demora 5 horas e tem 3 questões.
2. Use apenas a caneta fornecida com o seu saco.
3. Use apenas a primeira página das folhas de papel fornecidas. Não use o lado marcado com uma cruz.
4. Cada questão deve ser respondida numa folha separada.
5. Para cada questão, além das ***folhas brancas*** em que pode escrever, há uma ***folha de respostas*** onde *deve* colocar os resultados finais que obtiver. Os resultados numéricos devem ser escritos com os dígitos que achar apropriados face aos dados fornecidos. Não se esqueça de indicar as unidades utilizadas.
6. Nas folhas brancas escreva tudo o que considerar necessário para a resposta à questão e que pretender que seja classificado. Deve, no entanto, usar principalmente equações, números, símbolos e diagramas. Por favor, use *o mínimo de texto possível*.
7. *É absolutamente indispensável* que indique o país (***Country***) e o seu número de estudante (***Sudent No.***) nas caixas no topo de cada folha de papel usada. Além disso, nas folhas brancas usadas em cada questão, deve colocar o número da questão (***Question No.***), deve numerar as páginas (***Page No.***) e deve também indicar o número total de folhas brancas que usou para cada questão e que deseja ver corrigidas (***Total No. of pages***). Convém também escrever no início de cada folha o número da questão e a alínea a que está a responder. Se usar algumas folhas brancas para rascunho que, portanto, não deseja que sejam corrigidas, trace-as com uma cruz grande e não as numere.
8. Quando acabar, ordene todas as folhas. (Para *cada* questão, coloque primeiro as folhas de respostas, depois as folhas brancas usadas, por ordem, e depois as folhas que não deseja que sejam corrigidas. As folhas não utilizadas e o enunciado devem ser colocadas em último lugar.) Coloque as folhas de cada questão no envelope relativo a essa questão e deixe tudo sobre a sua secretária. Não pode levar *quaisquer* folhas de papel consigo para fora da sala.

Problema teórico 1

A Um rapaz praticante de "bungee-jumping" está preso ao extremo de uma corda elástica longa. O outro extremo da corda está atado a uma ponte alta. O rapaz deixa-se cair, partindo do repouso, em direcção ao rio. A massa do rapaz é m, o comprimento da corda elástica não distendida é L, a constante elástica da corda (força necessária para produzir uma elongação de 1 m) é k e a aceleração da gravidade é g.

Assuma que

- o rapaz pode ser considerado um ponto de massa m ligado ao extremo da corda;
- a massa da corda é desprezável em comparação com m;
- a corda obedece à lei de Hooke;
- a resistência do ar pode ser ignorada.

Obtenha as expressões analíticas para as seguintes grandezas e transcreva-as para a folha de resposta:

a) a distância y, medida a partir da ponte, percorrida pelo rapaz durante a queda até atingir pela primeira vez o ponto onde fica, momentanemente, em repouso;

b) a velocidade máxima v atingida pelo rapaz durante a queda;

c) a duração da queda, t, até ao instante em que o rapaz fica momentaneamente em repouso pela primeira vez.

B Uma máquina térmica funciona entre dois corpos idênticos de massa m e capacidade térmica mássica s, que se encontram às temperaturas T_A and T_B ($T_A > T_B$). Os corpos estão a pressão constante e não sofrem transformações de fase.

a) Obtenha uma expressão para a temperatura final T_0 a que ficam os dois corpos A e B se a máquina a produzir o trabalho máximo que é teoricamente possível extrair de uma máquina térmica. Mostre em detalhe todos os passos do cálculo. Transcreva para a folha de respostas a expressão que obteve para T_0.

b) Obtenha agora a expressão para o trabalho máximo e transcreva-a para a folha de respostas.

A máquina térmica funciona com dois tanques de água, cada um com um volume de 2,50 m^3. Um dos tanques encontra-se à temperatura de 350 K e o outro encontra-se a 300 K.

c) Calcule a energia mecânica máxima que é possível extrair da máquina e transcreva o valor numérico para a folha de respostas.

Dados:

Capacidade térmica mássica da água = $4,19 \times 10^3$ J kg^{-1} K^{-1}.
Massa volúmica da água = $1,00 \times 10^3$ kg m^{-3}

C Presume-se que quando se formou a Terra os isótopos ^{238}U e ^{235}U estavam presentes, não existindo, no entanto, qualquer dos seus produtos de decaimento radioactivo. Os decaimentos radioactivos do ^{238}U e ^{235}U podem ser usados para estimar a idade, *T*, da Terra.

a) O isótopo ^{238}U decai com um tempo de meia-vida de $4,50\times10^9$ anos. Os tempos de meia-vida dos produtos da cadeia de decaimento radioactivo deste isótopo são pequenos comparados com o tempo de meia vida indicado acima e como tal podem ser ignorados, em primeira aproximação. A cadeia de decaimento radioactivo termina no isótopo estável do chumbo ^{206}Pb.

Obtenha a expressão para o número de átomos de ^{206}Pb em função do tempo *t* contado a partir da formação do planeta. Este número será designado por ^{206}n e será também uma função do número de átomos de ^{238}U presentes no instante *t*, designado por ^{238}N, e do tempo de meia vida do ^{238}U. Deverá utilizar 1×10^9 anos como unidade de tempo. Transcreva a expressão para a folha de respostas.

b) De forma semelhante à situação anterior, o ^{235}U decai com um tempo de meia vida de $0,710\times10^9$ anos, através de uma cadeia de decaimento com produtos com um tempo de meia-vida inferior. O produto final desta cadeia é o isótopo estável ^{207}Pb. Tal como na alínea anterior, escreva na folha de respostas a equação que relaciona ^{207}n com ^{235}N, o tempo de meia-vida do ^{235}U e o instante *t*.

c) Um minério de urânio, misturado com um minério de chumbo, é analisado com um espectrómetro de massa. Foram medidas as concentrações relativas dos três isótopos do chumbo, ^{204}Pb, ^{206}Pb e ^{207}Pb. A razão medida das concentrações destes isótopos foi, na ordem respectiva, 1,00 : 29,6 : 22,6. O isótopo ^{204}Pb é usado como referência visto não ter origem radioactiva. A análise de uma amostra pura de minério de chumbo resultou nas razões 1,00 : 17,9 : 15,5.

Sabendo que a razão ^{238}N:^{235}N é 137 : 1, derive uma equação que permita determinar a idade da terra *T* e transcreva-a para a folha de respostas.

d) Determine um valor aproximado da idade da terra T, assumindo que é superior aos tempos de meia-vida de ambos os isótopos do urânio. Escreva este valor na folha de respostas.

e) O valor aproximado que obteve na alínea anterior não é, de facto, significativamente superior ao tempo de meia vida mais longo dos átomos de urânio, mas pode ser usado para obter um valor mais preciso para T. Calcule a idade da Terra com uma precisão de $\pm 2\%$, usando, se assim o entender, o valor anterior como ponto de partida. Escreva o valor na folha de resposta.

D Uma carga Q no vazio está distribuída uniformemente no interior de uma esfera de raio R.

a) Determine a intensidade do campo eléctrico em função da distância r ao centro da esfera, para os casos $r \leq R$ e $r > R$.

b) Obtenha a expressão para a energia electrostática desta distribuição de carga.

Escreva as respostas das alíneas a) e b) na folha de respostas.

E Um anel circular feito de um fio fino de cobre é posto a rodar em torno de um diâmetro vertical, num local sob a acção do campo magnético terrestre. Neste local a indução magnética tem uma intensidade de 44,5 μT e aponta para baixo numa direcção que faz um ângulo de 64º com o plano horizontal. Sabendo que a massa volúmica do cobre é $8{,}90 \times 10^{3}$ kg m^{-3} e que este metal tem uma resistividade de $1{,}70 \times 10^{-8}$ Ωm, calcule o tempo necessário para que a velocidade angular do anel se reduza a metade do valor inicial. Assuma que este tempo é muito superior ao período da rotação do anel. Indique em detalhe cada passo do cálculo e escreva o valor numérico na folha de respostas.

Pode considerar desprezáveis os efeitos de atrito nos suportes e de resistência do ar. Deve também ignorar efeitos de auto-indução embora estes não sejam, de facto, desprezáveis.

Folha de respostas para a questão 1

A a) Distância y percorrida pelo rapaz até atingir momentaneamente o repouso pela primeira vez =

b) Velocidade máxima v atingida pelo rapaz =

c) Tempo decorrido até o rapaz atingir momentaneamente o repouso pela primeira vez =

(2,0 valores)

B a) Temperatura final, T_0, para realizar o trabalho máximo =

b) Trabalho máximo realizável =

c) Energia mecânica máxima, em MJ =

(2,0 valores)

C a) Número de átomos de ^{206}Pb, ^{206}n =

b) ^{207}n =

c) A expressão que permite obter T é

d) Valor aproximado para T, em anos

e) Valor corrigido para T, em anos

(2,2 valores)

D a) Campo eléctrico para $r \leq R$:

Campo eléctrico para $r > R$:

b) Energia electrostática

(1,6 valores)

E Tempo decorrido, em segundos, até a velocidade angular se reduzir a metade

(2,2 valores)

Problema teórico 2

a) Um tubo de raios catódicos, constituído por um canhão electrónico e um écrã fluorescente, é colocado numa região de campo magnético uniforme de intensidade B. A direcção do campo magnético é paralela ao eixo do feixe produzido pelo canhão electrónico, tal como mostra a figura 2.1.

O feixe de electrões emerge do ânodo do canhão electrónico segundo a direcção do eixo, mas com uma divergência de, no máximo, 5º, como mostra a figura 2.2. Em geral, uma mancha difusa é produzida no ecrã, mas para certos valores do campo magnético a mancha reduz-se a um único ponto brilhante, focado no ecrã.

Considerando o movimento de um electrão que sai do canhão fazendo um ângulo β com o eixo ($0 \leq \beta \leq 5º$), e considerando as componentes da velocidade paralela e perpendicular ao eixo, encontre uma expressão para a relação entre a carga e a massa do electrão, *e/m*, em função das seguintes grandezas:

i) o menor valor do campo magnético para o qual é observado o efeito de focagem pontual no ecrã;
ii) a diferença de potencial eléctrico responsável pela aceleração dos electrões no interior do canhão electrónico (tenha em atenção que $V < 2$ kV);
iii) a distância D entre o ânodo e o écrã fluorescente.

Escreva a expressão que obteve na zona apropriada da secção 2-a) da folha de respostas.

b) Vamos considerar um outro método para medir a razão entre a carga e a massa do electrão. O dispositivo experimental encontra-se representado numa vista lateral e numa vista de topo (por cima) na figura 2.3, em que a direcção do campo magnético é a do vector **B** indicada na figura. No meio deste campo magnético uniforme **B** estão colocadas duas placas circulares metálicas de raio ρ, separadas de uma distância t muito pequena. É mantida uma diferença de potencial V entre as placas. Estas placas são paralelas e coaxiais, e o seu eixo é perpendicular ao campo magnético. Uma película fotográfica é colocada em volta das placas, formando um cilindro de raio $\rho + s$, coaxial com as placas. A película encontra-se, portanto, a uma distância radial s da extremidade das placas. Toda esta montagem experimental está sob vácuo. Tenha em atenção que a distância t tem um valor muito inferior a s e a ρ.

Uma fonte pontual de partículas β (electrões), que emite estas partículas uniformemente em todas as direcções e com uma certa distribuição de velocidades, é colocada precisamente no centro entre as duas placas. A *mesma película fotográfica* é então exposta em três situações diferentes:

primeiro com $B = 0$ e $V = 0$,
de seguida com $B = B_0$ e $V = V_0$,
e por último com $B = -B_0$ e $V = -V_0$,

onde B_0 e V_0 são constantes positivas. Tome em atenção que a placa de cima está carregada positivamente quando $V>0$ (e negativamente quando $V<0$), e que o campo magnético tem a direcção indicada na figura 2.3 quando $B>0$ (direcção oposta quando $B<0$). Para esta alínea, pode assumir que a distância entre as placas é desprezável.

Duas regiões, A e B, da película fotográfica estão marcadas na figura 2.3. Após exposição ao feixe e subsequente revelação fotográfica, obtém-se a fotografia de uma destas duas regiões que se mostra na figura 2.4. A qual das regiões A ou B corresponde a imagem mostrada nessa figura? Indique a resposta correcta (A ou B) na folha de respostas. Justifique devidamente a sua resposta, indicando as direcções de todas as forças que actuam sobre um electrão.

c) Considere ainda a figura 2.4 onde se mostra um esboço da imagem formada na película após exposição ao feixe e subsequente revelação. Com um microscópio, foram efectuadas medidas da distância que separa os dois traços mais exteriores que se observam na película. Esta distância (y) está indicada na figura para um certo ângulo ϕ. Os resultados são apresentados na tabela seguinte, sendo o ângulo ϕ definido na figura 2.3 como o ângulo entre o campo magnético e a linha que une o centro das placas ao ponto de impacto na película fotográfica.

Ângulo com a direcção do campo / graus	ϕ	90	60	50	40	30	23
Distância entre as placas / mm	y	17,4	12,7	9,7	6,4	3,3	Fim do traço

Valores numéricos dos parâmetros do aparelho experimental:

B_0 = 6,91 mT
V_0 = 580 V
t = 0,80 mm
s = 41,0 mm

Considere ainda que o valor da velocidade da luz no vazio é $3{,}00\times10^{8}$ m/s e que a massa em repouso do electrão é $9{,}11\times10^{-31}$ kg.

Determine, a partir dos dados experimentais, a energia cinética máxima das partículas β.

Escreva o valor numérico da energia cinética máxima, em eV, na zona apropriada da folha de respostas, secção 2-c).

d) Usando a informação disponível da alínea c) obtenha um valor para a razão entre a carga e a massa em repouso do electrão. Para o efeito, deverá ser feito um gráfico apropriado na folha de papel que lhe foi fornecida.

Indique no próprio gráfico, *em forma algébrica*, as grandezas que está a representar nos eixos horizontal e vertical. Indique-as também na zona apropriada da folha de respostas na secção 2-d).

Escreva, na zona apropriada da folha de respostas, secção 2-d), o valor numérico que encontrou para a razão entre a carga e a massa do electrão.

Tenha em atenção que o valor obtido pode diferir do valor aceite como correcto, devido a um erro sistemático nas medidas.

Folha de respostas para a questão 2

a) Expressão para a razão carga/massa do electrão:_______________________

____ (3,0 valores)

b) Região exposta (escreva A ou B)______________________

____ (1,5 valores)

c) A energia máxima das partículas β é_____________________eV

____ (2,0 valores)

d) Expressão para a grandeza marcada no eixo HORIZONTAL (x)_____________

Expressão para a grandeza marcada no eixo VERTICAL (y)________________

Valor da razão carga/massa (e/m) em C kg^{-1}__________________________

____ (3,5 valores)

Problema teórico 3

Ondas gravitacionais e os efeitos da gravidade na propagação da luz

Parte A

Esta parte está relacionada com a dificuldade da detecção de ondas gravitacionais geradas por acontecimentos astronómicos. De facto, a explosão de uma supernova distante produz apenas flutuações da ordem de 10^{-19} N kg^{-1} na intensidade do campo gravitacional à superfície da Terra.

Um modelo de um detector de ondas gravitacionais (ver Fig. 3.1) consiste em duas barras metálicas, cada uma com o comprimento de 1 m, posicionadas perpendicularmente uma à outra. Uma das extremidades de cada barra é polida cuidadosamente, comportando-se como um espelho muito perfeito, enquanto que a outra extremidade está solidamente presa a um suporte. A posição de uma das barras é ajustada de forma a que o sinal detectado na célula fotoeléctrica (ver Fig. 3.1) tenha a amplitude mínima.

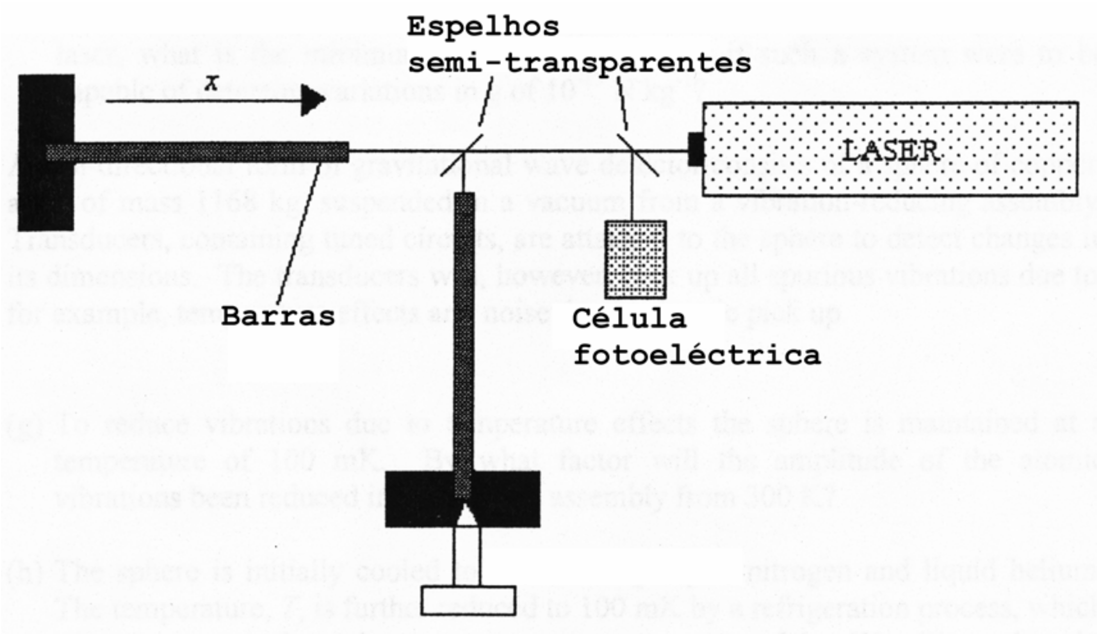

Figura 3.1

É comunicado um impulso longitudinal rápido às barras através de um dispositivo piezo-eléctrico. Na sequência desse impulso, as extremidades espelhadas das barras oscilam com um deslocamento longitudinal Δx_t, sendo

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \phi),$$

onde a, μ, ω e ϕ são constantes.

a) Determine o valor de μ, sabendo que a amplitude do movimento é reduzida de 20% passados 50 s do início da oscilação.

b) Sabendo que a velocidade de propagação das ondas longitudinais num sólido é $v = \sqrt{E/\rho}$, determine o menor valor de ω. As barras são de alumínio, com uma massa volúmica de 2700 kg m^{-3} e um módulo de Young (E) de $7{,}1\times10^{10}$ Pa.

c) É impossível fabricar barras exactamente do mesmo comprimento e por esta razão o sinal eléctrico medido na célula fotoeléctrica tem uma frequência de batimento de 0,005 Hz. Qual é a diferença de comprimento das barras?

d) Para a barra de comprimento l, deduza uma expressão algébrica que relacione a variação do comprimento, Δl, devida a uma variação Δg da intensidade do campo gravitacional, g, em função de l e outras constantes características do material de que é feita a barra. A resposta do detector de ondas gravitacionais a esta variação ocorre na direcção de uma das barras.

e) A luz produzida pelo laser é monocromática com um comprimento de onda de 656 nm. Se o deslocamento mínimo da franja de interferência que pode ser detectado é 10^{-4} do comprimento de onda do laser, qual é o valor mínimo de l que seria necessário para que o dispositivo experimental fosse capaz de detectar variações de g de10^{-19} N kg^{-1}?

Parte B

Esta parte está relacionada com o efeito do campo gravitacional na propagação da luz no espaço.

a) Um fotão emitido da superfície do Sol (massa M, raio R) sofre um deslocamento para o vermelho. Supondo um equivalente de massa em repouso para a energia do fotão, aplique a teoria da gravitação universal de Newton para mostrar que a frequência do fotão medida no infinito é reduzida de um factor ($1-GM/Rc^2$) - o delocamento para o vermelho.

b) Uma diminuição da frequência do fotão é equivalente ao aumento do seu período ou, usando o fotão como relógio de referência, a uma dilatação do tempo. Pode ainda ser demonstrado que uma dilatação do tempo é sempre acompanhada de uma contração da unidade de comprimento pelo mesmo factor.

Vamos agora estudar o efeito deste fenómeno na propagação da luz próximo do Sol. Comecemos por definir um índice efectivo de refracção n_r num ponto a uma distância r do centro do Sol:

$$n_r = \frac{c}{c'_r}$$

onde c é a velocidade da luz medida num sistema de referência muito afastado da influência gravitacional do Sol ($r \to \infty$) e c'_r é a velocidade da luz medida num sistema de referência a uma distância finita r do centro do Sol.

Mostre que n_r é dado aproximadamente por:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2}$$

para valores pequenos de GM/r_c^2, e onde α é uma constante que deve determinar.

c) Usando esta expressão para n_r, calcule a deflexão da trajectória rectilínea de um raio de luz, em radianos, quando passa próximo da superfície do Sol.

Dados:

Constante de gravitação universal, G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Massa do Sol, M = 1,99×10^{30} kg
Raio do Sol, R = 6,95×10^8 m
Velocidade da luz, c = 3,00×10^8 m/s

O seguinte integral poderá também ser-lhe útil:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Folha de respostas para a questão 3

Parte A

a) $\mu =$... s^{-1}

(0,1 valores)

b) $\omega =$... rad s^{-1}

(0,1 valores)

c) $\delta l =$... m

(1,5 valores)

d) $\Delta l =$... m

(1,5 valores)

e) $l_{min} =$... m

(0,3 valores)

Parte B

a) XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

(1,0 valores)

b) $\alpha =$...

(2,0 valores)

c) Ângulo de deflexão =... rad

(3,5 valores)