



Prova teórica

Terça-feira, 23 de Julho de 2002

Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas.
2. Utilizar apenas o material de escrita que lhe for fornecido.
3. Utilizar apenas um dos lados das folhas de papel.
4. Iniciar cada parte do problema numa folha separada.
5. Para cada questão, além das **folhas de papel de resposta** onde pode escrever, há também algum papel de rascunho.
6. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado.
7. Escrever nas **folhas de resposta** tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Por favor, utilizar o *mínimo de texto*; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, figuras e gráficos e usar os símbolos utilizados no enunciado para designar as grandezas físicas.
8. Preencher as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar, registando o país (**Country**), o seu número de estudante (**Student No.**), o número da questão (**Question No.**) e numere cada página (**Page No.**), indicando ainda o número total de folhas usadas para cada questão (**Total Pages**). Escrever o número da questão e a secção a que está a responder no início de cada folha de papel. Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.
9. No final da prova, ordenar as folhas *pela seguinte ordem*:
 - folha de respostas
 - folhas utilizadas, ordenadas
 - as folhas de rascunho inutilizadas com uma grande cruz
 - as folhas não utilizadas e o enunciado da prova.

Colocar todas as folhas dentro do envelope e deixar tudo sobre a sua mesa. Não lhe é permitido retirar da sala *quaisquer* folhas de papel.

I. Radar Penetrante no Solo

Um Radar Penetrante no Solo (RPS) é usado para detectar e localizar objectos enterrados pouco profundamente no solo. O RPS baseia-se na emissão de ondas electromagnéticas em direcção ao solo e na posterior recepção das ondas reflectidas pelos objectos enterrados. A antena e o receptor estão colocados directamente no solo, no mesmo ponto.

Uma onda electromagnética plana, linearmente polarizada, de frequência angular ω e que se propaga na direcção z é representada pela seguinte equação do campo eléctrico:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (1)$$

onde E_0 é constante, α é o coeficiente de atenuação e β é o módulo do vector de onda, dados pelas seguintes expressões:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

onde μ , ϵ e σ representam a permeabilidade magnética, a permitividade eléctrica e a condutividade eléctrica, respectivamente.

O sinal torna-se indetectável quando a amplitude da onda de radar que atinge o objecto diminui abaixo do valor limite que é $1/e$ ($\approx 37\%$) do valor inicial. É habitualmente utilizada uma onda electromagnética de frequência variável (10 MHz – 1000 MHz), o que permite ajustar o alcance e a resolução da detecção.

A performance do RPS depende da sua resolução. A resolução é dada pela separação mínima para a detecção de dois objectos reflectores adjacentes. Esta separação mínima deverá originar uma diferença de fase mínima de 180° entre as duas ondas reflectidas quando atingem o detector.

Questões:

Dados: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m. Considerar que $\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 \ll 1$.

1. Assumir que o solo é não-magnético ($\mu = \mu_0$). Deduzir a expressão da velocidade de propagação v em função de μ e ε , usando as equações (1) e (2) **[1,0 pontos]**.
2. Determinar a profundidade máxima de detecção de um objecto enterrado num solo de condutividade 1,0 mS/m e permitividade $9\varepsilon_0$ ($S=ohm^{-1}$; usar $\mu = \mu_0$) **[2,0 pontos]**.
3. Considerar duas barras condutoras, paralelas, enterradas horizontalmente no solo. As barras estão a 4 m de profundidade. A condutividade eléctrica do solo é 1,0 mS/m e a permitividade é $9\varepsilon_0$. Supor que a medida RPS é feita numa posição em que o aparelho é colocado aproximadamente por cima de uma das barras. Considerar o emissor RPS como uma fonte pontual. Determinar a frequência mínima que é necessário utilizar para obter uma resolução lateral de 50 cm **[3,5 pontos]**.
4. Para determinar a profundidade d de uma barra enterrada no mesmo solo, considerar as medidas efectuadas ao longo de uma linha perpendicular à barra. O resultado é descrito pela seguinte figura:

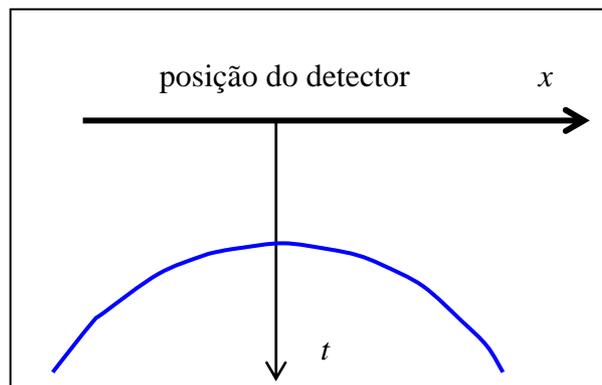


Gráfico do tempo de percurso t em função da posição do detector x ($t_{min}=100$ ns)

Deduzir uma expressão para t em função de x e determinar d **[3,5 pontos]**.

II. Detectando Sinais Eléctricos

Alguns animais marinhos possuem a capacidade de detectar outros animais na sua vizinhança, devido a correntes eléctricas produzidas por esses animais durante a respiração ou outros processos envolvendo contracção de músculos. Alguns predadores usam estes sinais eléctricos para localizar as suas presas, mesmo quando estas se encontram enterradas na areia.

O mecanismo físico subjacente à geração da corrente na presa e à sua detecção pelo predador pode ser modelado como é indicado na Fig. II-1. A corrente gerada pela presa flui entre duas esferas, uma a potencial positivo, outra a potencial negativo, localizadas no interior do corpo da presa. A distância entre os centros das duas esferas é l_s , e cada uma tem um raio r_s , que é muito menor que l_s . A resistividade da água do mar é ρ . Assumir que a resistividade dos corpos da presa e do predador é idêntica à da água do mar que os rodeia, pelo que a fronteira entre os seus corpos e a água pode ser ignorada.

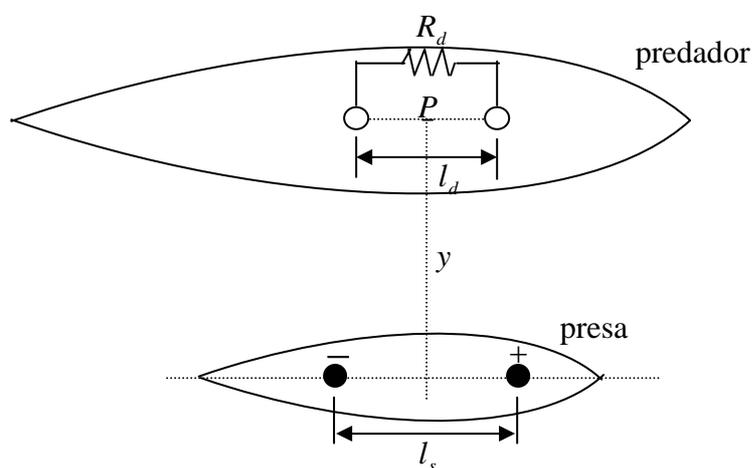


Figura II-1. Um modelo para descrever a detecção, por um predador, dos sinais eléctricos emitidos pela sua presa.

Para descrever a detecção, pelo predador, do sinal eléctrico proveniente da presa, o detector pode ser modelado também por duas esferas no corpo do predador e em

contacto com a água circundante, colocadas paralelamente ao par de esferas no corpo da presa. As esferas, de raio r_d , estão separadas de uma distância l_d , sendo o raio r_d muito inferior a l_d . Nesta situação, o centro do detector encontra-se a uma distância y da fonte e a linha que passa pelo centro das duas esferas do detector é paralela ao campo eléctrico, tal como mostra a Fig. II-1. Tanto l_s como l_d são muito menores que y . A intensidade do campo eléctrico ao longo da linha que passa pelo centro das duas esferas detectoras é constante. Assim, o detector, a presa, a água do mar e o predador formam um circuito fechado, tal como descrito na Fig. II-2.

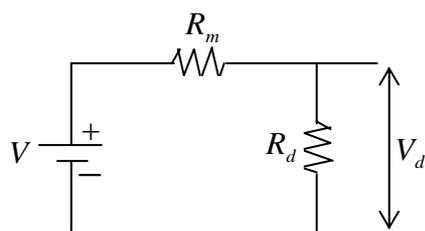


Figura II-2. O circuito eléctrico fechado equivalente ao sistema predador-presa-água do mar.

Na figura, V é a diferença de potencial entre as esferas do detector devida ao campo eléctrico induzido pela presa e R_m é a resistência interna devida à água do mar circundante. V_d e R_d são, respectivamente, a diferença de potencial entre as esferas detectoras e a resistência do elemento detector no predador.

Questões:

1. Determinar o vector densidade de corrente \vec{j} (corrente por unidade de área) causada por uma fonte pontual de corrente I_s num ponto à distância r da fonte, num meio infinito [1,5 pontos].
2. Recorrendo à lei $\vec{E} = \rho\vec{j}$, determinar a intensidade do campo eléctrico E_p no ponto P situado a meio das duas esferas do detector, quando a corrente que flui entre as duas esferas no corpo da presa é I_s [2,0 pontos].
3. Determinar, para a mesma corrente I_s , a diferença de potencial entre as esferas da fonte na presa (V_s) [1,5 pontos]. Determinar a resistência entre as duas esferas da fonte na presa (R_s) [0,5 pontos] e a potência produzida pela fonte (P_s) [0,5 pontos].

4. Determinar R_m [0,5 pontos] e V_d [1,0 pontos] da Fig. II-2 e calcular também a potência transferida da fonte para o detector (P_d) [0,5 pontos].
5. Determinar o valor óptimo de R_d que corresponde ao máximo da potência detectada [1,5 pontos] e determinar também essa potência máxima [0,5 pontos].

III. Veículo pesado descendo um plano inclinado

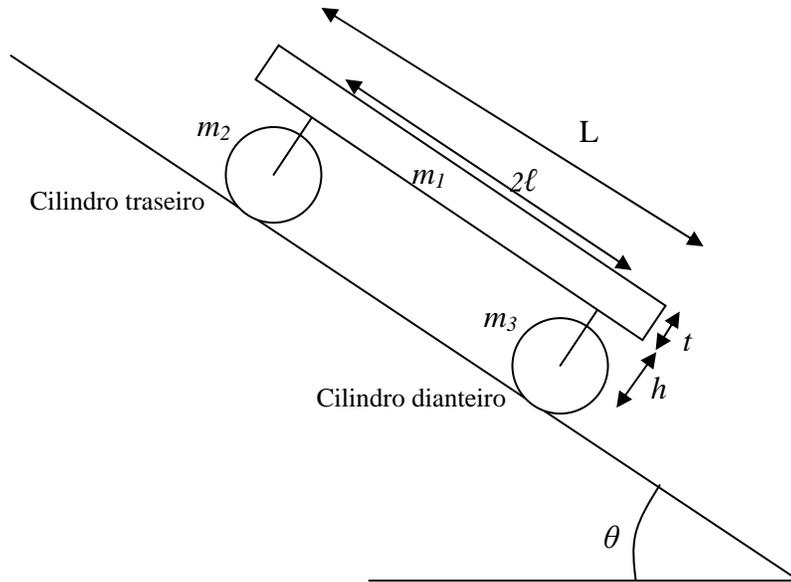


Figura III-1. Modelo simplificado de um veículo pesado descendo um plano inclinado.

A figura acima representa um modelo simplificado de um veículo pesado (do tipo dos que assentam asfalto nas estradas) com duas rodas cilíndricas, uma dianteira e outra traseira. O veículo desce uma estrada inclinada de um ângulo θ , como mostra a Fig. III-1. Cada uma das rodas cilíndricas possui uma massa total M ($m_2=m_3=M$) e consiste numa casca cilíndrica de raio exterior R_0 , raio interior $R_i = 0,8R_0$ e oito raios com uma massa total $0,2M$, tal como mostra a Fig. III-2. A massa do *chassis* que suporta o corpo do veículo é desprezável. Os cilindros dianteiro e traseiro estão posicionados simetricamente em relação ao veículo. O veículo desce o plano inclinado sob a acção da força gravítica e de forças de atrito.

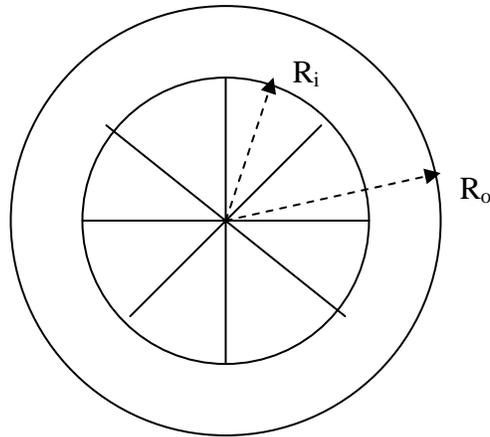


Figura III-2. Modelo simplificado de um dos cilindros.

Os coeficientes de atrito estático e cinético entre as superfícies dos cilindros e a estrada são, respectivamente, μ_s e μ_k . O corpo do veículo tem uma massa $m_1 = 5M$, comprimento L e espessura t . A distância entre os cilindros dianteiro e traseiro é 2ℓ e a distância entre o centro dos cilindros e a base do corpo do veículo é h . Assumir que o atrito no eixo dos cilindros é desprezável.

Questões:

1. Calcular o momento de inércia de uma das rodas cilíndricas [1,5 pontos].
2. Desenhar um diagrama de todas as forças que actuam em cada uma das partes do veículo, ou seja no corpo e em cada um dos cilindros, dianteiro e traseiro. Escrever as equações do movimento para cada uma das partes [2,5 pontos].
3. O veículo começa a movimentar-se, partindo do repouso. Descrever todos os tipos possíveis de movimento do sistema e determinar as acelerações em cada um dos casos, em função das grandezas físicas dadas [4,0 pontos].
4. Assumir que após o veículo ter percorrido uma distância d em rolamento puro, partindo do repouso, entra numa secção da estrada inclinada em que os coeficientes de atrito diminuem para valores pequenos, constantes, μ'_s e μ'_k , pelo que os dois cilindros começam a deslizar. Calcular, neste caso, as velocidades linear e angular de cada cilindro após o veículo ter percorrido uma distância total de s metros. Para o

efeito, pode considerar as distâncias s e d muito superiores ao comprimento do veículo **[2,0 pontos]**.