34ª Olimpíada Internacional de Física

Taipei, Taiwan

Prova teórica

Segunda-feira, 4 de Agosto de 2003

Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas. A prova tem 3 questões com a seguinte distribuição de pontos:
   Questão 1: 12 pontos; Questão 2: 10 pontos, Questão 3: 8 pontos.
2. Utilizar apenas a caneta que lhe foi fornecida.
3. Utilizar apenas o lado da frente das folhas de papel.
4. Iniciar cada questão numa folha separada.
5. Para cada questão, além das **folhas de papel em branco** onde pode escrever, existe também uma **folha de respostas** onde ***deve*** fazer o sumário dos resultados que obteve. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas em branco tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Por favor, utilizar o *mínimo de texto*; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Preencha as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar, registando o país (***Country***), o seu número de estudante (***Student No.***) e o número da questão (***Question No.***). Numere cada página (***Page No.***) indicando ainda o número total de folhas usadas para cada questão (***Total No. of pages***). Escrever o número da questão e a secção a que está a responder no início de cada folha de papel. Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.
8. No final da prova, ordenar as folhas de cada questão *pela seguinte ordem*: folha(s) de respostas, folhas utilizadas (ordenadas), folhas de rascunho inutilizadas, folhas não utilizadas e enunciado da prova. Junte os maços de folhas de cada questão pela ordem das questões, prenda-os com o *clip* fornecido e deixe tudo sobre a sua mesa. Não lhe é permitido retirar da sala *quaisquer* folhas de papel.

Questão Teórica nº 1

Um pêndulo lastrado

Uma barra cilíndrica de raio R é mantida fixa, com o seu eixo horizontal, a uma certa distância do solo. Uma massa m é presa ao ponto A no topo da barra por um fio de massa desprezável e comprimento L ($L>2\pi R$) – ver Figura 1a. A massa é colocada à altura do ponto A e o fio é esticado. A massa é depois largada, partindo do repouso. Desprezar qualquer variação do comprimento do fio. Supor que a massa pode ser tratada como uma massa pontual que se move apenas no plano perpendicular ao eixo da barra cilíndrica. De agora em diante a massa m será designada por *a partícula*. A aceleração da gravidade é $\vec{g}$.

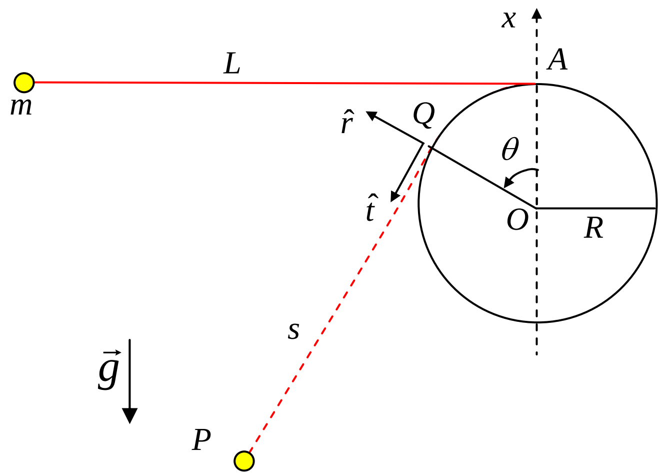


Figura 1a

Seja O a origem do sistema de coordenadas. Quando a partícula se encontra no ponto P, o fio é tangente à superfície cilíndrica no ponto Q. O segmento de recta QP tem comprimento s. Os vectores tangencial e radial unitários em Q são $\hat{t}$ e $\hat{r}$, respectivamente. O deslocamento angular θ do raio OQ é positivo quando medido a partir do eixo vertical x (segundo OA) na direcção contrária ao movimento dos ponteiros de um relógio.

Quando $\theta = 0$, o comprimento s é igual a L e a energia potencial gravítica da partícula, U, é nula. Quando a partícula se move, as taxas de variação instantânea no tempo de θ e s são, respectivamente, $\dot{\theta}$ e $\dot{s}$.

Todas as velocidades são referidas ao ponto fixo O, excepto onde indicado.

Parte A

Na Parte A, o fio está sempre esticado enquanto a partícula se move. Usando apenas as quantidades definidas acima (ou seja, s, θ, $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, R, L, g, $\hat{t}$ e $\hat{r}$), escrever:

a) a relação entre $\dot{\theta}$ e $\dot{s}$; **[0,5 pontos]**

b) a velocidade $\vec{v}_Q$ do ponto móvel Q relativamente a O; **[0,5 pontos]**

c) a velocidade $\vec{v}'$ da partícula em relação ao ponto móvel Q quando esta está em P; **[0,7 pontos]**

d) a velocidade $\vec{v}$ da partícula em relação ao ponto O quando esta está em P; **[0,7 pontos]**

e) a componente segundo $\hat{t}$ da *aceleração* da partícula em relação a O quando esta está em P; **[0,7 pontos]**

f) a energia potencial gravítica, U, da partícula quando esta está em P; **[0,5 pontos]**

g) a velocidade v_m da partícula no ponto mais baixo da sua trajectória. **[0,7 pontos]**

Parte B

Na Parte B, a razão entre L e R tem o valor

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{16} = 3{,}534 + 3{,}352 = 6{,}886$$

h) Qual é a velocidade v_s da partícula, em função de g e R, quando o segmento do fio entre Q e P é recto e atingiu o seu menor comprimento? **[2,4 pontos]**

i) Qual é a velocidade v_H da partícula, em função de g e R, no ponto mais alto da sua trajectória, quando balançou para o outro lado da barra? **[1,9 pontos]**

Parte C

Na Parte C, em vez de estar presa ao ponto A, a massa m está ligada a uma massa maior M, o lastro, por um fio inextensível que passa pelo topo da barra cilíndrica (ver Figura 1b). Esta massa grande pode também ser considerada uma massa pontual.

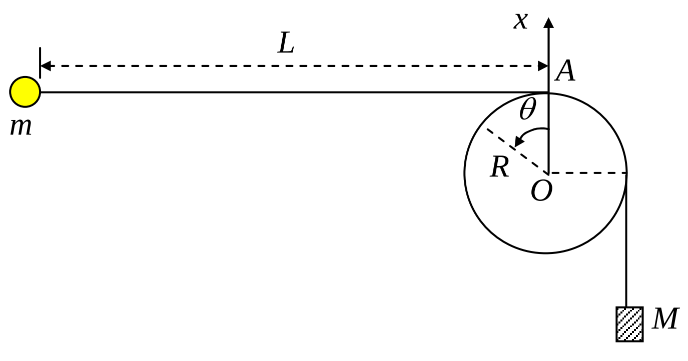


Figura 1b

Inicialmente a massa pequena é colocada à altura do ponto A e a massa grande encontra-se abaixo do ponto O. O fio está esticado e o segmento de fio que está horizontal tem comprimento L. A massa pequena é então largada do repouso e a massa grande começa a cair. Supor que a massa pequena se mantém no plano vertical e que pode balançar para além da massa grande sem colidir com ela ou com o fio.

O atrito cinético entre o fio e a barra cilíndrica é desprezável. No entanto, o atrito estático é suficientemente grande para que, uma vez parada, a massa grande se mantenha em repouso indefinidamente.

j) Supor que a massa grande pára depois de cair uma distância D e que L-D » R. Se a massa pequena puder balançar em torno da barra cilíndrica até atingir a posição $\theta = 2\pi$, mantendo-se rectos os dois segmentos do fio que não estão enrolados na barra, a razão $\alpha = D/L$ não pode ser inferior a um certo valor crítico α_C . Desprezando os termos de ordem igual ou superior a R/L, obter uma estimativa para α_C em função de M/m. **[3,4 pontos]**

*[**Folha de Respostas**]* *Questão Teórica nº 1*

Um pêndulo lastrado

a) A relação entre $\dot{\theta}$ e $\dot{s}$ é

b) A velocidade do ponto *Q* relativamente ao ponto *O* é

$\vec{v}_Q\ =$

c) Em *P*, a velocidade da partícula relativamente ao ponto em movimento *Q* é

$\vec{v}\,'\ =$

d) Em *P*, a velocidade da partícula relativamente a *O* é

$\vec{v}\ =$

e) Em *P*, a componente $\hat{t}$ da aceleração da partícula relativamente a *O* é

f) Em *P*, a energia potencial gravítica da partícula é

$U =$

g) A velocidade da partícula no ponto mais baixo da sua trajectória é

$v_m\ =$

h) Quando o segmento *QP* é recto e atinge o seu menor comprimento, a velocidade da partícula é (*Escrever a expressão em função de g e R e o valor numérico*)

$v_s\ =$

i) No ponto mais alto da trajectória, a velocidade da particula é (*Escrever a expressão em função de g e R e o valor numérico*)

$v_H\ =$

j) Em função da razão das massas, M/m, o valor crítico α_c da razão D/L é

$\alpha_c =$

Questão Teórica nº 2

Um cristal piezoeléctrico ressonante sujeito a uma d.d.p. alternada

Considerar uma barra uniforme de comprimento ℓ e secção A (Figura 2a). O seu comprimento varia de $\Delta\ell$ quando forças iguais e opostas, de módulo F, são aplicadas perpendicularmente às faces de topo da barra. A tensão T nos topos é definida como $T = F/A$. A variação relativa do comprimento da barra, $S = \Delta\ell/\ell$, é designada por deformação da barra. A lei de Hooke, que relaciona a tensão com a deformação quando $\Delta l \ll l$, pode ser escrita como

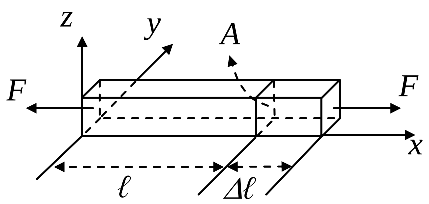
$$T = Y\,S \quad \text{ou} \quad \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta\ell}{\ell}\ , \qquad (1)$$

onde Y é o *módulo de Young* do material de que é feita a barra. Reparar que uma compressão corresponde a $F < 0$ e a uma diminuição do comprimento ($\Delta l < 0$). Neste caso, a tensão é negativa e está relacionada com a pressão p a que a barra está sujeita: $T = -p$.

Para uma barra homogénea de densidade ρ, a velocidade de propagação de ondas longitudinais na barra (ou seja, a velocidade do som na barra) é:

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}\ . \qquad (2)$$

Figura 2a



Os efeitos dissipativos e de amortecimento da onda devem ser ignorados nas questões seguintes.

Parte A: Propriedades Mecânicas **[4,0 pontos]**

Uma barra semi-infinita, homogénea e de densidade ρ, que se estende de $x = 0$ até $x = \infty$ (ver Figura 2b) está inicialmente estacionária e livre de tensões. Um pistão exerce uma pequena pressão p na face esquerda da barra (em $x = 0$) durante um intervalo de tempo, Δt, muito curto, originando uma onda de pressão que se propaga para a direita com velocidade u.

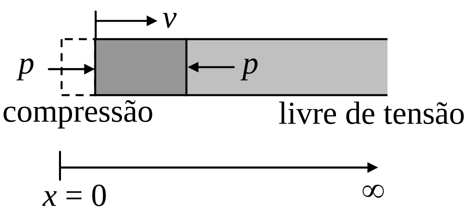


Figura 2b

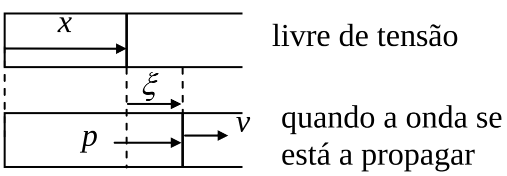


Figura 2c

a) Se o pistão levar a face da esquerda a mover-se com uma velocidade constante v (Figura 2b), quais são a deformação S e a pressão p nesta face durante o intervalo de tempo Δt ?
(Nota: A resposta deve ser dada apenas em função de ρ, u e v.) **[1,6 pontos]**

b) Considerar uma onda longitudinal que se propaga na barra ao longo do eixo dos x. Seja $\xi(x,t)$ o deslocamento, no instante t, da secção da barra que se encontraria em x na ausência de tensão (Figura 2c). Supor que

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x-ut), \qquad (3)$$

onde ξ_0 e k são constantes. Determinar a velocidade $v(x,t)$, a deformação $S(x,t)$ e a pressão $p(x,t)$ em função de x e t. **[2,4 pontos]**

Parte B: Propriedades Electromecânicas (incluindo efeito piezoeléctrico) [6,0 pontos]

Considerar uma lâmina de quartzo de comprimento b, espessura h e largura w (Figura 2d). O seu comprimento e espessura são medidos ao longo dos eixos x e z, respectivamente. As superfícies inferior e superior da lâmina são cobertas por uma fina camada metálica e funcionam como dois eléctrodos. São soldados dois fios metálicos ao centro dos eléctrodos. Estes fios servem também de suporte à lâmina (Figura 2e). Para oscilações longitudinais ao longo do eixo dos x os centros dos eléctrodos podem-se considerar estacionários.

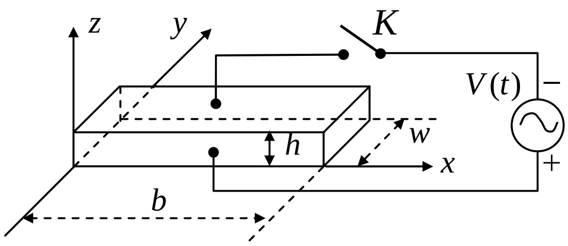


Figura 2d

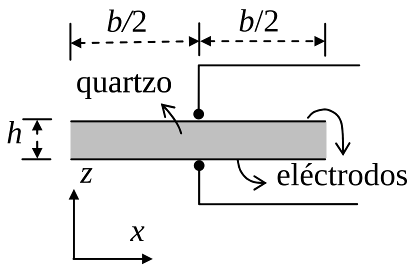


Figura 2e

O cristal de quartzo considerado tem uma densidade $\rho = 2{,}65\times10^3$ kg/m^3 e módulo de Young $Y = 7{,}87\times10^{10}$ N/m^2. O comprimento da lâmina é $b = 1{,}00$ cm e a largura e espessura são tais que $h \ll w$ e $w \ll b$. Quando o interruptor K está aberto apenas surgem no cristal ondas longitudinais estacionárias segundo a direcção x.

Para uma onda estacionária de frequência $f = \omega/2\pi$, o deslocamento $\xi(x,t)$ no instante t de uma secção da lâmina cuja posição de equilíbrio é x é dado pela seguinte equação:

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 g(x)\cos(\omega t), \qquad (0 \le x \le b) \qquad (4a)$$

onde ξ_0 é uma constante positiva e a função $g(x)$ tem a forma

$$g(x) = B_1 \sin k(x-\frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x-\frac{b}{2}). \qquad (4b)$$

O valor máximo da função $g(x)$ é 1 e $k = \omega / u$. Recordar que os centros dos eléctrodos não se movem e que as faces esquerda e direita da lâmina estão livres e portanto estão sujeitas a uma tensão (ou pressão) nula.

c) Determinar os valores das constantes B_1 e B_2 da equação (4b) para uma onda estacionária longitudinal na lâmina de quartzo. **[1,2 pontos]**

d) Quais são as duas menores frequências das ondas longitudinais estacionárias que podem surgir na lâmina de quartzo? **[1,2 pontos]**

O efeito *piezoeléctrico* é uma propriedade especial dos cristais de quartzo. Uma compressão ou dilatação do cristal produz uma diferença de potencial (d.d.p.) através do cristal e, inversamente, uma diferença de potencial externa aplicada ao cristal provoca a sua expansão ou compressão, dependendo da polaridade da d.d.p. aplicada. Desta forma, é possível acoplar oscilações mecânicas e eléctricas, que podem ressoar no cristal de quartzo.

Para explicar o efeito piezoeléctrico, sejam $-\sigma$ e $+\sigma$ as densidades superficiais de carga no eléctrodo superior e inferior, respectivamente, quando a lâmina de quartzo está sob a acção de um campo eléctrico E com a direcção do eixo z. Represente-se a deformação da lâmina e a sua tensão segundo o eixo x por S e T, respectivamente. Usando esta notação, o efeito piezoeléctrico no cristal de quartzo é descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$S = (1/Y)T + d_p E \qquad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \qquad (5b)$$

onde $1/Y$ = $1{,}27\times10^{-11}$ m^2/N é o inverso do módulo de Young do quartzo para campo eléctrico constante, $\varepsilon_T = 4{,}06\times10^{-11}$ F/m é a permitividade do quartzo a tensão constante e $d_p = 2{,}25\times10^{-12}$ m/V é o seu coeficiente piezoeléctrico.

Supor que se fecha o interruptor K da Figura 2d. A diferença de potencial alternada $V(t) = V_m \cos(\omega t)$ está agora aplicada aos eléctrodos e um campo eléctrico *uniforme* $E(t) = V(t)/h$ segundo o eixo z surge na lâmina de quartzo. Quando o estado estacionário é alcançado, uma onda estacionária longitudinal de frequência angular ω aparece na lâmina segundo a direcção do eixo x.

Como o campo E é uniforme, o comprimento de onda λ e a frequência f ainda estão relacionados por $\lambda = u/f$, onde u é dado pela equação 2. Contudo, como mostra a equação (5a), a relação $T = YS$ já não é válida, apesar das definições de deformação e tensão se manterem inalteradas e as faces esquerda e direita da lâmina estarem livres e sem tensão.

e) Tendo em conta as equações (5a) e (5b), a densidade superficial de carga σ no eléctrodo inferior em função de x e t tem a forma

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h},$$

onde $k = \omega/u$. Determinar expressões que permitam calcular D_1 e D_2. **[2,2 pontos]**

f) A carga superficial total $Q(t)$ no eléctrodo inferior está relacionada com $V(t)$ por

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1\right)\right] C_0 V(t)\,. \qquad (6)$$

Determinar as expressões que permitem calcular α^2 e C_0 e concretizar o cálculo do valor numérico de α^2. **[1,4 pontos]**

*[**Folha de Respostas**]* *Questão Teórica nº 2*

Um cristal piezoeléctrico ressonante sujeito a uma d.d.p. alternada

***Quando solicitado, escrever as expressões analíticas para cada resposta seguidas dos valores numéricos e unidades. Por exemplo**:* área do círculo $A = \pi r^2 = 1{,}23\ \text{m}^2$.

a) A deformação S e a pressão p na face esquerda são (*em função de* ρ, u *e* v)

$S =$
$p =$

b) A velocidade $v(x, t)$, deformação $S(x, t)$ e pressão $p(x, t)$ são

$v(x, t) =$
$S(x, t) =$
$p(x, t) =$

c) Os valores de B_1 e B_2 são

$B_1 =$
$B_2 =$

d) As duas frequências mais baixas das ondas estacionárias são (*expressão e valor*)

A mais baixa
A segunda mais baixa

e) As expressões de D_1 e D_2 são

$D_1 =$
$D_2 =$

f) As constantes α^2 (*expressão e valor*) e C_0 são (*expressão apenas*)

$\alpha^2 =$
$C_0 =$

Questão Teórica nº 3

Parte A – Massa do neutrino e decaimento do neutrão

Um neutrão livre de massa m_n, em repouso no referencial do laboratório, decai originando três partículas não-interactuantes: um protão, um electrão e um anti-neutrino. A massa em repouso do protão é m_p. A massa do neutrino, m_ν, é assumida diferente de zero e muito mais pequena do que a massa em repouso do electrão, m_e. Seja c a velocidade da luz no vazio. Os valores medidos das massas são:

m_n =939,56563 MeV/c^2; m_p =938,27231 MeV/c^2; m_e =0,5109907 MeV/c^2.

Todas as energias e velocidades referidas a seguir são medidas no referencial do laboratório. Seja E a energia total do electrão produzido no decaimento.

a) Determinar o valor máximo possível de E, $E_{\max}$, e a velocidade v_m do anti-neutrino quando $E = E_{\max}$. Ambas as respostas devem ser dadas em função das massas em repouso das partículas e da velocidade da luz. Considerando que m_ν <7,3 eV/c^2, calcular $E_{\max}$ e a razão v_m / c com a precisão de 3 algarismos significativos. **[4,0 pontos]**

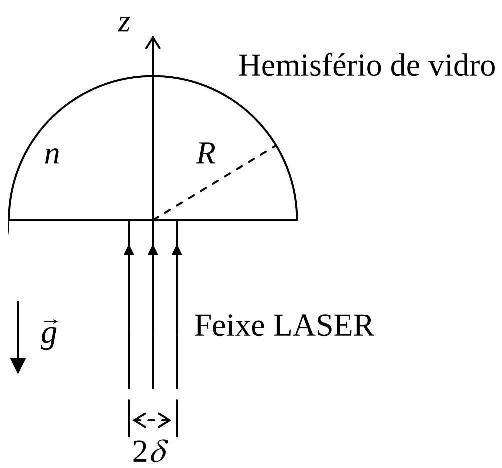
Parte B – Levitação pela luz

Um hemisfério de vidro transparente de raio *R* e massa *m* possui índice de refracção *n*. O meio no exterior do hemisfério possui índice de refracção 1. Um feixe LASER monocromático de raios paralelos incide perpendicular e uniformemente na zona central da base plana do hemisfério, como mostra a figura 3a. A aceleração da gravidade $\vec{g}$ é vertical e aponta para baixo. O raio δ da secção circular do feixe LASER é muito menor do que *R*. Quer o hemisfério de vidro, quer o feixe LASER, são axialmente simétricos com o eixo *z*.

O hemisfério de vidro não absorve a luz LASER. A sua superfície foi revestida com uma camada fina de material transparente pelo que as reflexões da luz ao entrar e sair do hemisfério de vidro são desprezáveis. O caminho óptico percorrido pelo feixe LASER ao atravessar a camada superficial não-reflectora também é desprezável.

b) Determinar a potência do LASER, *P*, necessária para equilibrar o peso do hemisfério de vidro, desprezando termos de ordem $(\delta / R)^3$ ou superior. **(**Sugestão: $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$ quando θ é muito menor que 1.) **[4,0 pontos]**

Figura 3a



*[**Folha de Respostas**]* *Questão Teórica nº 3*

***Quando solicitado**, **escrever** **as expressões analíticas para cada resposta** **seguidas** **dos valores numéricos** **e** **unidades. Por exemplo**:* área do círculo $A = \pi r^2 = 1{,}23\ \mathrm{m}^2$.

Massa do neutrino e decaimento do neutrão

a) (Escrever as expressões em função das massas em repouso das partículas e da velocidade da luz)

A energia máxima do electrão é (*expressão e valor*)

$E_{max} =$

A razão entre a velocidade do anti-neutrino e c quando $E = E_{max}$ é (*expressão e valor*)

$v_m / c =$

Levitação pela luz

b) A potência do LASER necessária para equilibrar o peso do hemisfério de vidro é

$P =$