



## 35ª Olimpíada Internacional de Física

Pohang, Coreia  
15 ~ 23 Julho 2004

---

### Prova Teórica

Sábado, 17 de Julho de 2004

#### Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas. A prova tem 3 questões.
2. Utilizar apenas a caneta que lhe foi fornecida.
3. Utilizar apenas o lado da frente das *folhas*. Escrever apenas dentro das caixas.
4. Iniciar cada questão numa folha separada.
5. Para cada questão, além das *folhas de papel em branco* onde pode escrever, existe também uma *folha de respostas* onde *deve* fazer o sumário dos resultados que obteve. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado.
6. Escrever nas *folhas em branco* tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Por favor, utilizar o *mínimo de texto*; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Preencher as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar, registando o país (**Country Code**), o seu número de estudante (**Student Code**) e o número da questão (**Question Number**). Numerar cada página (**Page Number**) indicando ainda o número total de *folhas em branco* usadas para cada questão (**Total Number of Pages**). Escrever o número da questão e a secção a que está a responder no topo de cada folha de papel. Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.
8. No final da prova, ordenar as folhas de cada questão *pela seguinte ordem*:
  - *Folha de respostas*
  - Folhas utilizadas (ordenadas)
  - Folhas de rascunho inutilizadas
  - Folhas não utilizadas e enunciado da prova.

Colocar as folhas dentro do envelope e deixar tudo sobre a mesa. Não é permitido retirar da sala *quaisquer* folhas de papel.

Leader's Signature: \_\_\_\_\_

**Questão Teórica nº 1:**

***Resistência “Ping-Pong”***

Um condensador consiste em duas placas circulares paralelas, ambas de raio  $R$ , separadas de uma distância  $d$ , sendo  $d \ll R$ , tal como mostra a Fig. 1.1(a). A placa de cima é ligada a uma fonte de tensão *constante*  $V$ , enquanto a placa de baixo está ligada à Terra. De seguida, um pequeno disco de massa  $m$ , raio  $r$  ( $r \ll R, d$ ) e espessura  $t$  ( $t \ll r$ ) é colocado no centro da placa de baixo, tal como mostra a Fig. 1.1(b).

Considerar que o espaço entre as placas tem constante dielétrica  $\epsilon_0$  (vazio); que as placas e o disco são feitos de condutores perfeitos; e que todos os efeitos de bordo electrostáticos podem ser desprezados. A indutância de todo o circuito e os efeitos relativistas também podem ser desprezados, assim como o efeito da carga imagem.

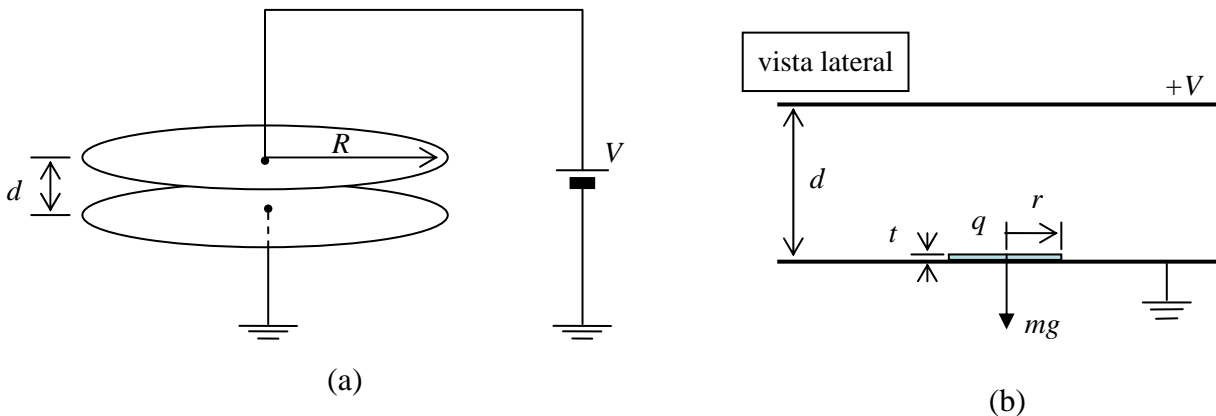


Figura 1.1 Esquema de (a) um condensador de *pratos paralelos* ligado a uma fonte de tensão constante e (b) vista lateral dos *pratos* paralelos com um pequeno *disco* inserido no condensador. (Detalhes no texto.)

(a) [1,2 pontos] Calcular a força electrostática  $F_p$  entre as *placas* separadas da distância  $d$  antes de o disco ser inserido entre as placas, na situação ilustrada na Fig. 1.1(a).

(b) [0,8 pontos] O disco é colocado entre as placas, sobre a placa de baixo (Fig. 1.1(b)). A carga  $q$  que se acumula *neste disco* está relacionada com a tensão  $V$  por  $q = \chi V$ . Determinar  $\chi$  em função de  $r$ ,  $d$  e  $\epsilon_0$ .

(c) [0,5 points] As placas paralelas são perpendiculares ao campo gravitacional uniforme  $g$ . Para levantar o disco, inicialmente em repouso, é necessário aumentar a tensão aplicada de forma a exceder uma tensão limite (*threshold*),  $V_{th}$ . Obter uma

expressão para  $V_{th}$  em termos de  $m$ ,  $g$ ,  $d$  e  $\chi$ .

(d) [2,3 pontos] Quando  $V > V_{th}$ , o disco efectua um movimento de ping-pong, para cima e para baixo, entre as placas. (Considerar que o disco apenas se move na vertical, *sem oscilações laterais*.) As colisões entre o disco e as placas são inelásticas, com coeficiente de restituição  $\eta \equiv (v_{after} / v_{before})$ , onde  $v_{before}$  e  $v_{after}$  são, respectivamente, as velocidades do disco imediatamente antes e após a colisão. As placas não se movem nos choques. A velocidade do disco *imediatamente após* a colisão com a placa de baixo atinge um regime estacionário com uma velocidade limite,  $v_s$ , que depende da tensão  $V$  da seguinte forma:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

Obter os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  em função de  $m$ ,  $g$ ,  $\chi$ ,  $d$  e  $\eta$ . Considerar que toda a superfície do disco entra simultaneamente em contacto com as placas, de tal modo que a troca de carga entre o disco e as placas ocorra instantaneamente em cada colisão.

(e) [2,2 pontos] Após atingir o regime estacionário, a corrente média (no tempo)  $I$  que percorre o circuito é dada, aproximadamente, por  $I = \gamma \mathcal{W}^2$  quando  $qV \gg mgd$ . Determinar o coeficiente  $\gamma$  em função de  $m$ ,  $\chi$ ,  $d$  e  $\eta$ .

(f) [3 pontos] Quando se diminui (muito lentamente) a tensão aplicada  $V$ , há uma tensão crítica  $V_c$  abaixo da qual cessa o fluxo de carga. Determinar  $V_c$  e a corrente correspondente  $I_c$  em função de  $m$ ,  $g$ ,  $\chi$ ,  $d$  e  $\eta$ . Através da comparação de  $V_c$  com a tensão crítica  $V_{th}$  para levantar o disco, determinada em (c), fazer um esboço da curva característica  $I - V$  quando  $V$  aumenta e diminui entre  $V = 0$  e  $3V_{th}$ .

Country Code	Student Code	Question Number
		1

### *Folha de Respostas*

#### Questão Teórica nº 1:

(a)  $F_p =$

(b)  $\chi =$

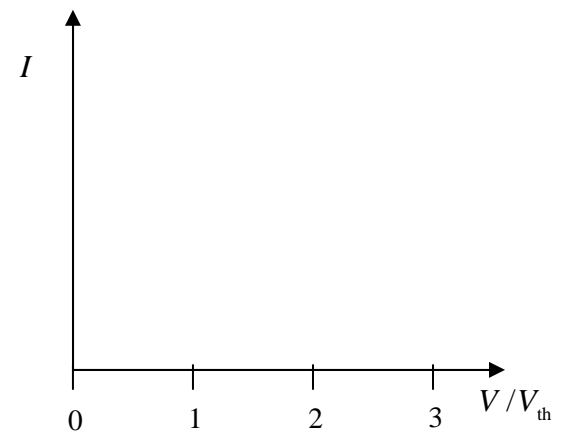
(c)  $V_{th} =$

(d)  $\alpha =$    $\beta =$

(e)  $\gamma =$

(f)  $I_c =$

$V_c =$



**Questão Teórica nº 2*****Sobe, sobe, balão sobe***

Um balão de borracha cheio de gás Hélio sobe na atmosfera, onde a pressão e a temperatura diminuem com a altura. Nas questões seguintes, considerar que a forma do balão se mantém esférica independentemente da carga que se pendura nele e que o volume desta carga é desprezável. Considerar ainda que a temperatura do gás Hélio no interior do balão é sempre a mesma do ar ambiente, e que os gases podem ser tratados como ideais. A constante dos gases perfeitos é  $R=8,31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$  e as massas molares do Hélio e do ar são, respectivamente,  $M_H = 4,00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  e  $M_A = 28,9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ . A aceleração da gravidade é  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**[Parte A ]**

(a) [1,5 pontos] Sejam  $P$  e  $T$  a pressão e a temperatura do ar ambiente. A pressão no interior do balão é superior à do exterior devido à tensão superficial do balão. O balão contém  $n$  moles de gás Hélio e a pressão no interior do balão é  $P + \Delta P$ . Determinar a força de impulsão  $F_B$  que actua no balão, em função de  $P$  e  $\Delta P$ .

(b) [2 pontos] Num certo dia de Verão na Coreia, a temperatura do ar  $T$  à altura  $z$  acima do nível do mar é dada pela expressão  $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$  no intervalo  $0 < z < 15 \text{ km}$ , sendo  $z_0 = 49 \text{ km}$  e  $T_0 = 303 \text{ K}$ . A pressão e densidade do ar ao nível do mar são  $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  e  $\rho_0 = 1,16 \text{ kg/m}^3$ , respectivamente. Neste intervalo de alturas, a pressão é dada pela expressão:

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta . \quad (2.1)$$

Expressar  $\eta$  em função de  $z_0$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$  e  $g$  e determinar o seu valor numérico com a precisão de *dois* algarismos significativos. Considerar a aceleração da gravidade constante, independente da altura.

**[Parte B]**

Quando um balão de borracha de forma esférica e raio  $r_0$  (medido quando a borracha ainda não está tensa) é insuflado até atingir um raio  $r \geq r_0$ , a superfície do balão possui uma energia adicional, elástica, devido à alongação da borracha. Uma expressão simplificada para este aumento da energia elástica, a temperatura constante  $T$ , tem a forma:

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

onde  $\lambda = r/r_0$  ( $\lambda \geq 1$ ) é a razão de aumento do raio e  $\kappa$  é uma constante que é expressa na unidade mol/m<sup>2</sup>.

(c) [2 pontos] Expressar  $\Delta P$  em função dos parâmetros dados na Eq. (2.2) e esboçar o gráfico de  $\Delta P$  em função de  $\lambda = r/r_0$ .

(d) [1,5 pontos] A constante  $\kappa$  pode ser determinada a partir da quantidade de gás necessária para encher o balão. A  $T_0 = 303$  K e  $P_0 = 1,0$  atm, um balão não tenso ( $\lambda = 1$ ) contém  $n_0 = 12,5$  moles de Hélio. A esta temperatura e pressão o balão teria de conter  $n = 3,6n_0 = 45$  moles de Hélio para atingir  $\lambda = 1,5$ . Determinar o parâmetro  $a$  do balão, onde  $a = \kappa/\kappa_0$  e  $\kappa_0 = \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$ , exprimindo  $a$  em função de  $n$ ,  $n_0$  e  $\lambda$ . Calcular ainda o valor numérico  $a$  com dois algarismos significativos.

**[Parte C]**

Um balão é preparado ao nível do mar como indicado em (d) (cheio até  $\lambda = 1,5$  com  $n = 3,6n_0 = 45$  moles de gás Hélio a  $T_0 = 303$  K e  $P_0 = 1$  atm =  $1.01 \times 10^5$  Pa). A massa total, incluindo a massa do gás, do balão e da carga, é  $M_T = 1,12$  kg. O balão é então largado ao nível do mar.

(e) [3 pontos] Supor que o balão acaba por parar à altura  $z_f$ , quando a força de impulsão equilibra o peso total. Determinar os valores de  $z_f$  e da razão de aumento do

raio,  $\lambda_f$ , a essa altura com a precisão de dois algarismos significativos. Considerar que não há fugas de gás e que a resistência do ar é desprezável durante toda a subida do balão.

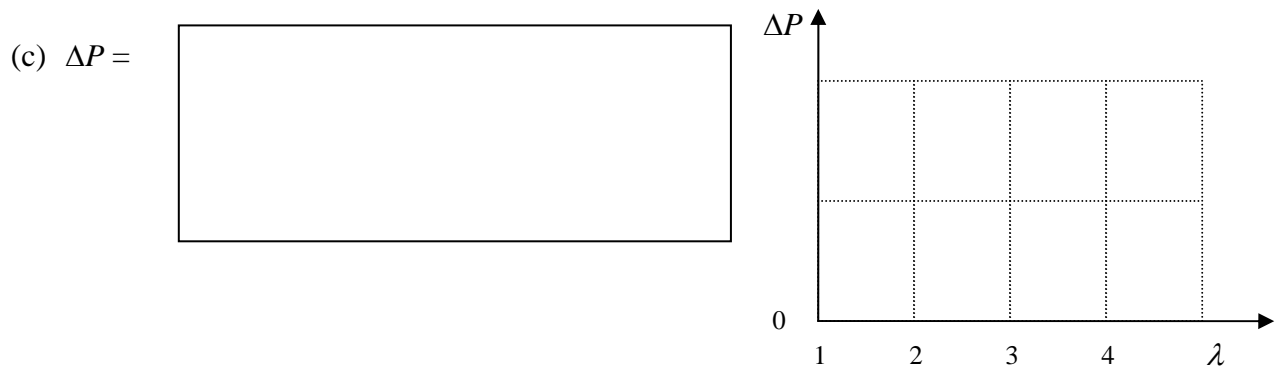
Country Code	Student Code	Question Number
		2

## *Folha de Respostas*

### Questão Teórica nº 2:

(a)  $F_B =$

(b)  $\eta =$   Valor numérico de  $\eta =$



(d)  $a =$   Valor numérico de  $a =$

(e)  $z_f =$    $\lambda_f =$



Questão teórica nº 3

*Microscópio de força atômica*

Os microscópios de força atômica (MFA) são instrumentos poderosos para a investigação em nanociência. O movimento do braço de um MFA pode ser seguido por um fotodetector que monitoriza um feixe laser reflectido, tal como mostra a Fig. 3.1. O braço pode apenas mover-se na vertical e o seu deslocamento  $z$  em função do tempo  $t$  é descrito pela equação

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (3.1)$$

onde  $m$  é a massa do braço,  $k = m\omega_0^2$  é a constante elástica do braço,  $b$  é um coeficiente de amortecimento, de pequeno valor, satisfazendo a relação  $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ , e  $F$  uma força aplicada ao braço pelo tubo piezoelétrico.

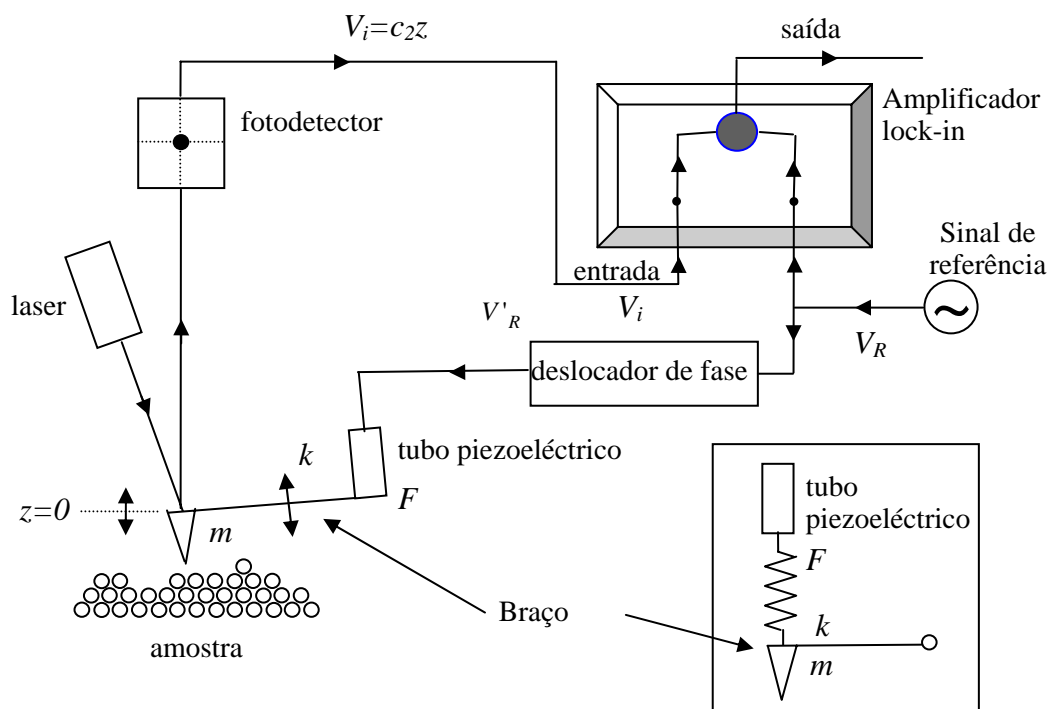


Figura 3.1 - Diagrama esquemático de um microscópio de força atômica (MFA). O detalhe da caixa do canto inferior direito representa um modelo mecânico simplificado que descreve o acoplamento do tubo piezoelétrico ao braço do microscópio.

**[Parte A]**

(a) [1,5 pontos] Quando  $F = F_0 \sin \omega t$ , a solução  $z(t)$  que satisfaz a Eq. (3.1) pode ser escrita na forma  $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ , onde  $A > 0$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Encontrar a expressão da amplitude  $A$  e de  $\tan \phi$  em função de  $F_0$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$ , e  $b$ . Determinar  $A$  e a fase  $\phi$  para a frequência de ressonância  $\omega = \omega_0$ .

(b) [1 ponto] Um amplificador do tipo *lock-in*, indicado na Fig. 3.1, é um dispositivo electrónico que multiplica o sinal eléctrico de entrada por um sinal de referência,  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ , dando como saída apenas a componente dc (corrente contínua) do produto dos sinais de entrada e referência. Considerar que o sinal de entrada é  $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ . Nestas expressões,  $V_{R0}$ ,  $V_{i0}$ ,  $\omega_i$ , e  $\phi_i$  são constantes positivas conhecidas. Determinar a condição a que tem de obedecer  $\omega$  ( $>0$ ) para se obter um sinal não nulo à saída do amplificador. Qual é a expressão da amplitude da *componente dc (contínua) do sinal* para esta frequência?

(c) [1,5 pontos] Após passar no deslocador de fase, a tensão de referência do lock-in  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  muda para  $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$ . A tensão  $V'_R$ , aplicada ao tubo piezoeléctrico, actua sobre o braço do microscópio exercendo a força  $F = c_1 V'_R$ . De seguida, o fotodetector converte o deslocamento do braço,  $z$ , numa tensão  $V_i = c_2 z$ . Nestas expressões  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Determinar a expressão da *componente contínua (dc) do sinal de saída* para  $\omega = \omega_0$ .

(d) [2 pontos] Uma pequena variação  $\Delta m$  da massa do braço provoca um desvio  $\Delta \omega_0$  da frequência de ressonância. Consequentemente, a fase  $\phi$  correspondente à frequência original de ressonância  $\omega_0$  varia de  $\Delta \phi$ . Determinar a variação de massa  $\Delta m$  que produz uma variação de fase  $\Delta \phi = \pi/1800$ , que é a resolução típica de medidas de fase. Os parâmetros físicos do braço são  $m = 1,0 \times 10^{-12}$  kg,  $k = 1,0$  N/m, e  $(b/m) = 1,0 \times 10^3$  s<sup>-1</sup>. Usar as expressões  $(1+x)^a \approx 1+ax$  e  $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$ , válidas para  $|x| \ll 1$ .

**[Parte B]**

De ora em diante, vamos considerar uma situação onde, para além da força aplicada no braço pelo tubo piezoeléctrico, discutida na Parte A, actua ainda no braço uma outra força devida à amostra, tal como mostra a Fig. 3.1.

(e) [1,5 pontos] Assumindo que a força adicional devida à amostra  $f(h)$  depende apenas da distância  $h$  entre o braço e a superfície da amostra, é possível encontrar uma nova posição de equilíbrio do braço,  $h_0$ . Próximo de  $h = h_0$ , podemos escrever  $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ , onde  $c_3$  não depende de  $h$ . Encontrar a nova frequência ressonante  $\omega'_0$  em função de  $\omega_0$ ,  $m$ , e  $c_3$ .

(f) [2,5 pontos] Durante o varrimento da superfície devido ao movimento da amostra na horizontal, a ponta do braço que se encontra carregada com a carga  $Q = 6e$  encontra um electrão de carga  $q = e$  aprisionado (ou seja, localizado numa pequena região do espaço) a uma certa distância abaixo da superfície. Durante o varrimento em torno deste electrão, verifica-se que o desvio máximo da frequência ressonante  $\Delta\omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$  é muito inferior a  $\omega_0$ . Expressar a distância  $d_0$  do braço ao electrão aprisionado quando esse desvio da frequência é máximo, em função de  $m$ ,  $q$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega_0$ , e da constante de Coulomb  $k_e$ . Calcular ainda o valor de  $d_0$  em nm ( $1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$ ) para  $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$ .

Os parâmetros físicos do braço são  $m = 1,0 \times 10^{-12} \text{ kg}$  e  $k = 1,0 \text{ N/m}$ . Desprezar os efeitos de polarização eléctrica quer na ponta do braço, quer na superfície da amostra. Tenha em conta que  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$  e  $e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

Country Code	Student Code	Question Number
		3

### *Folha de respostas*

#### Questão Teórica nº 3:

(a)  $A =$   e  $\tan \phi =$

Para  $\omega = \omega_0$ ,  $A =$   e  $\phi =$

(b) Equação a que obedece  $\omega$  para um sinal de saída não nulo:

Amplitude do sinal dc =

(c) Amplitude do sinal =

(d)  $\Delta m =$   kg

Country Code	Student Code	Question Number
		3

(e)  $\omega'_0 =$

(f)  $d_0 =$

; valor numérico  
de  $d_0 =$

nm.