

Prova Teórica

Terça-feira, 5 de Julho de 2005

Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas.
2. Utilizar apenas o lado da frente das folhas.
3. Iniciar cada questão numa folha separada.
4. Para cada questão, além das *folhas de papel em branco* onde pode escrever, existe também uma *folha de respostas* onde *deve* fazer o sumário dos resultados que obteve. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado e as unidades correctas.
5. Escrever nas folhas em branco tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Por favor, utilizar o *mínimo de texto*; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
6. Preencher as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar, registando o país (**Country code**), o seu número de estudante (**Student code**) e o número da questão (**Question number**). Numerar cada página (**Page number**) indicando ainda o número total de folhas em branco usadas para cada questão (**Total number of pages**). Escrever o número da questão e a secção a que está a responder no topo de cada folha de papel. Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.
7. No final da prova, ordenar as folhas de cada questão *pela seguinte ordem*:
 - Folha de respostas
 - Folhas utilizadas (ordenadas)
 - Folhas de rascunho inutilizadas
 - Folhas não utilizadas e enunciado da prova.

Colocar as folhas dentro do envelope e deixar tudo sobre a mesa. Não é permitido retirar da sala *quaisquer* folhas de papel.

T 1 UM SATÉLITE COM UM TRISTE FADO

A manobra mais frequentemente efectuada pelas naves espaciais é a variação da velocidade na direcção da trajectória: acelerações para atingir órbitas mais elevadas ou travagens para iniciar a re-entrada na atmosfera. Neste problema serão estudadas as variações orbitais quando a propulsão é accionada na direcção radial.

Para obter valores numéricos usar os seguintes dados: raio da Terra $R_T = 6,37 \times 10^6$ m, aceleração da gravidade à superfície da Terra $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, duração do dia sideral $T_0 = 24,0$ h.

Considerar um satélite de telecomunicações geoestacionário¹ de massa m colocado numa órbita equatorial de raio r_0 . Estes satélites possuem um “motor de apogeu” que lhes fornece a propulsão tangencial para atingir a órbita final.

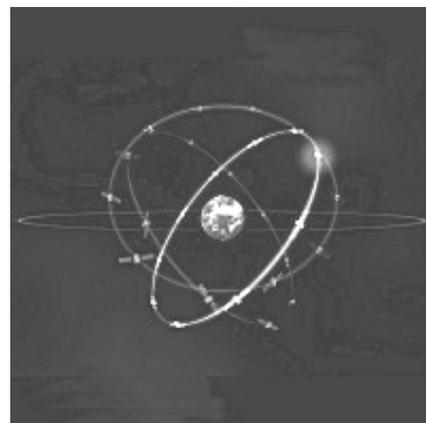


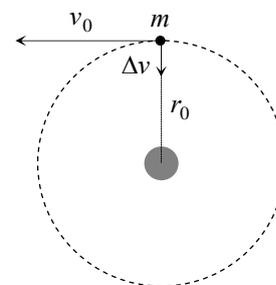
Imagem: ESA

As cotações de cada questão estão indicadas no início de cada alínea, entre parênteses.

Questão 1

- 1.1 (0,3) Determinar o valor numérico de r_0 .
- 1.2 (0,3+0,1) Obter a expressão analítica da velocidade v_0 do satélite em função de g , R_T e r_0 , e determinar o seu valor numérico.
- 1.3 (0,4+0,4) Deduzir as expressões analíticas do momento angular L_0 e da energia mecânica E_0 em função de v_0 , m , g e R_T .

Assim que a órbita geoestacionária é atingida (ver Figura F-1) e o satélite está estabilizado no local pretendido e está a ser preparado para efectuar o seu trabalho, um erro dos controladores no solo leva o motor de apogeu a ser de novo ligado. A propulsão comunicada à nave é na direcção da Terra e, apesar da rápida reacção da equipa no solo que desliga o motor, uma variação da velocidade indesejada Δv é comunicada ao satélite. Esta variação é caracterizada pelo parâmetro $\beta = \Delta v / v_0$. O período de tempo durante o qual o motor está ligado é sempre desprezável quando comparado com os tempos orbitais, e por isso pode-se considerar que o motor é ligado e desligado instantaneamente.



F-1

Questão 2

Assumir que $\beta < 1$.

- 2.1 (0,4+0,5) Determinar os parâmetros da nova órbita², *semi-latus-rectum* l e excentricidade ε , em função de r_0 e β .
- 2.2 (1,0) Calcular o ângulo α entre o eixo maior da nova órbita e o vector posição no instante do disparo accidental dos motores.
- 2.3 (1,0+0,2) Obter a expressão analítica para as distâncias do perigeu (r_{\min}) e do apogeu (r_{\max}) ao centro da Terra em função de r_0 e β e calcular os seus valores numéricos para $\beta = 1/4$.

¹ O seu período de revolução é T_0 .

² Ver a “sugestão”.

- 2.4 (0,5+0,2) Determinar o período da nova órbita, T , em função de T_0 e β , e calcular o seu valor numérico para $\beta = 1/4$.

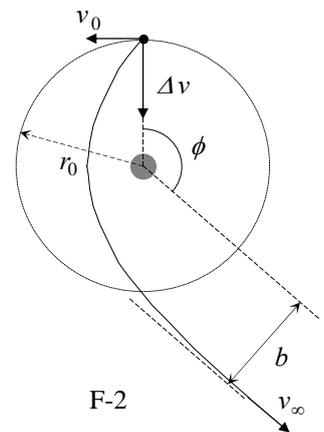
Questão 3

- 3.1 (0,5) Calcular o valor mínimo do parâmetro β , β_{esc} , para que o satélite escape à atracção da Terra.
 3.2 (1,0) Determinar, neste caso, a distância r'_{min} de aproximação máxima do satélite ao centro da Terra na nova trajectória, em função de r_0 .

Questão 4

Assumir que $\beta > \beta_{esc}$.

- 4.1 (1,0) Determinar a velocidade residual no infinito, v_∞ , em função de v_0 e β .
 4.2 (1,0) Obter o parâmetro de impacto b da direcção assintótica de escape em função de r_0 e β (ver Figura F-2).
 4.3 (1,0+0,2) Determinar o ângulo ϕ em função de β . Calcular o seu valor numérico para $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$.



SUGESTÃO

Quando sujeitos a forças centrais que obedecem a uma lei do inverso do quadrado da distância, os corpos descrevem trajectórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. Quando um corpo de massa $m \ll M$ orbita em torno de outro de massa M , este último encontra-se num dos focos da trajectória. Se este foco coincidir com a origem do sistema de coordenadas, a equação geral destas curvas pode ser escrita em coordenadas polares como (ver Figura F-3)

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

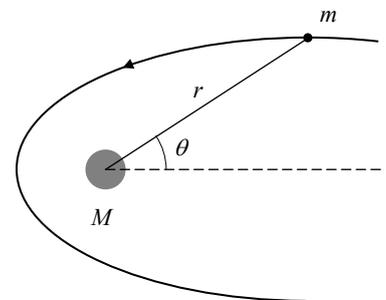
onde l é uma constante positiva designada por *semi-latus-rectum* e ε é a excentricidade da curva. Em função das constantes de movimento:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} \right)^{1/2}$$

onde G é a constante de Newton, L é o módulo do momento angular, em relação à origem, da massa em órbita e E é a sua energia mecânica considerando que a energia potencial é nula no infinito.

Podem ocorrer os seguintes casos:

- i) Se $0 \leq \varepsilon < 1$, a curva é uma elipse (uma circunferência quando $\varepsilon = 0$).
- ii) Se $\varepsilon = 1$, a curva é uma parábola.
- iii) Se $\varepsilon > 1$, a curva é uma hipérbole.



F-3

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

T 1 FOLHA DE RESPOSTAS

Questão	Fórmulas e ideias fundamentais utilizadas	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Pontuação
1.1			$r_0 =$	0,3
1.2		$v_0 =$	$v_0 =$	0,4
1.3		$L_0 =$		0,4
		$E_0 =$		0,4
2.1		$l =$		0,4
		$\varepsilon =$		0,5
2.2			$\alpha =$	1,0
2.3		$r_{max} =$	$r_{max} =$	1,2
		$r_{min} =$	$r_{min} =$	
2.4		$T =$	$T =$	0,7
3.1			$\beta_{esc} =$	0,5
3.2		$r'_{min} =$		1,0
4.1		$v_{\infty} =$		1,0
4.2		$b =$		1,0
4.3		$\phi =$	$\phi =$	1,2

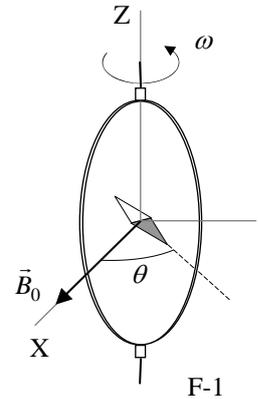
T 2 MEDIDAS ABSOLUTAS DE QUANTIDADES ELÉCTRICAS

As transformações tecnológicas e científicas que ocorreram no século XIX criaram a necessidade de estabelecer unidades padrão para as quantidades eléctricas. Pensava-se que as novas unidades absolutas deveriam depender apenas das unidades padrão de massa, comprimento e tempo estabelecidas após a Revolução Francesa. Entre 1861 e 1912 foi desenvolvido intenso trabalho experimental para definir os valores destas unidades. São aqui propostos três casos modelo.

As cotações de cada questão estão indicadas no início de cada alínea, entre parênteses.

Determinação do ohm (Kelvin)

Uma bobina com N espiras, raio a , e resistência total R roda com velocidade angular constante ω em torno de um diâmetro vertical. O fio da bobina está ligado em curto-circuito e a bobina está colocada num campo magnético horizontal $\vec{B}_0 = B_0 \hat{i}$.



1. (0,5+1,0) Determinar a força electromotriz ε induzida na bobina e também a potência média¹ $\langle P \rangle$ necessária para manter a bobina em movimento. Desprezar a auto-indutância da bobina.

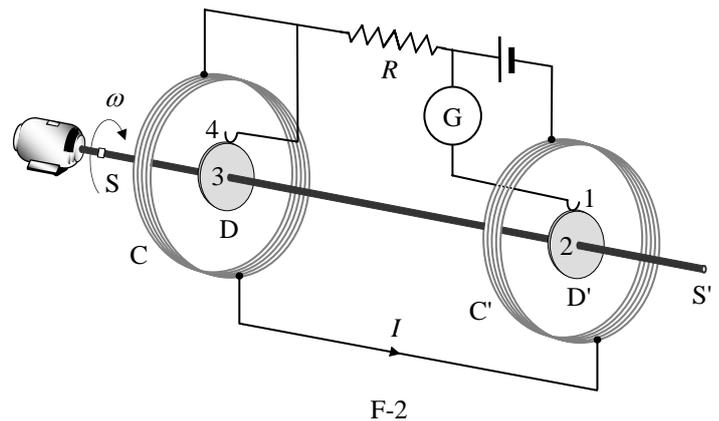
Uma pequena agulha magnética é colocada no centro da bobina, como se mostra na Figura F-1. A agulha pode mover-se livremente em torno do eixo Z no plano horizontal, mas não pode acompanhar a rotação rápida da bobina.

2. (2,0) Quando se atinge o regime estacionário, a agulha fica a fazer um ângulo pequeno θ com \vec{B}_0 . Determinar a resistência R da bobina em função deste ângulo e dos outros parâmetros do sistema.

Lord Kelvin utilizou este método na década de 1860 para estabelecer o padrão absoluto para o ohm. Para não necessitar de uma bobina em rotação, Lorenz concebeu um método alternativo que foi utilizado por Lord Rayleigh e Ms. Sidgwick, e que será analisado nos próximos parágrafos.

Determinação do ohm (Rayleigh, Sidgwick).

Na Figura F-2 está esquematizada a montagem experimental. Nesta montagem, dois discos metálicos idênticos D e D', de raio b , estão montados num veio condutor SS'. Um motor imprime uma velocidade angular ω ao conjunto. Esta velocidade pode ser ajustada para medir R . Duas bobinas idênticas C e C' (de raio a e N espiras cada) estão colocadas em torno dos discos. Estas bobinas estão ligadas de tal modo que a corrente I as percorre em direcções opostas. O sistema é utilizado para medir a resistência R .



¹ O valor médio $\langle X \rangle$ de uma quantidade $X(t)$ num sistema periódico de período T é $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$

Poderá vir a precisar de algum destes integrais:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi, \quad \text{e mais tarde} \quad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

3. (2,0) Assumir que a corrente I que atravessa as bobinas C e C' cria um campo magnético uniforme B em torno de D e D' , igual ao campo no centro da bobina. Determinar¹ a força electromotriz ε induzida entre os pontos 1 e 4. Assumir que a distância entre as bobinas é muito superior ao raio das bobinas e que $a \gg b$.

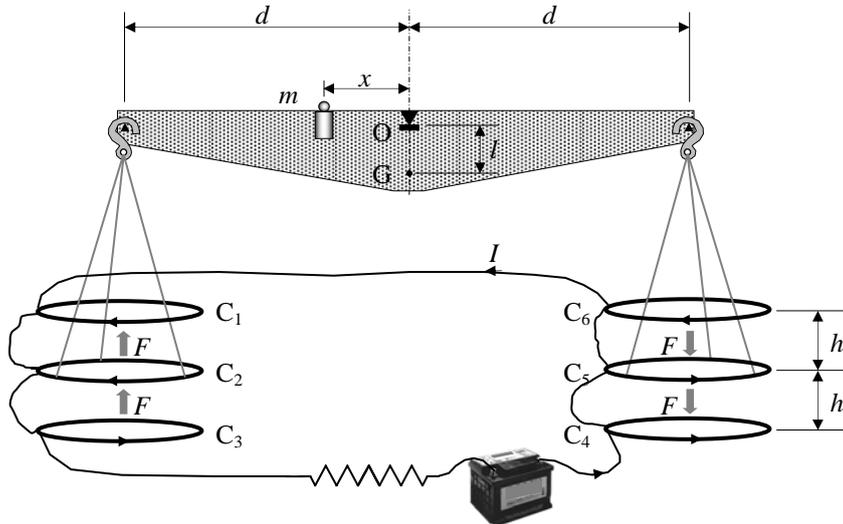
Os discos estão ligados ao circuito por contactos deslizantes nos pontos 1 e 4. O galvanómetro G detecta a corrente que circula no circuito 1-2-3-4.

4. (0,5) A resistência R é medida quando a corrente indicada por G é nula. Determinar R em função dos parâmetros físicos do sistema.

Determinação do ampere

A medição da força entre dois condutores quando neles passa uma corrente eléctrica possibilita a determinação absoluta da corrente. A “Balança de Corrente” concebida por Lord Kelvin em 1882 explora este método. A balança é constituída por seis bobinas, $C_1 \dots C_6$, idênticas, só com uma espira e de raio a , que estão ligadas em série. Como se mostra na Figura F-3, as bobinas C_1 , C_3 , C_4 e C_6 estão fixas e são colocadas em planos paralelos horizontais separados por uma pequena distância $2h$. As bobinas C_2 e C_5 estão suspensas dos braços da balança. Os braços têm comprimento d e as bobinas C_2 e C_5 , quando em equilíbrio, estão equidistantes dos planos das outras bobinas.

A corrente I circula nas várias bobinas numa direcção tal que a força magnética sobre C_2 é dirigida para cima enquanto a força sobre C_5 é dirigida para baixo. Quando uma corrente passa no circuito é necessário colocar uma massa m a uma distância x do fulcro O para recolocar a balança na posição de equilíbrio descrita acima.



F-3

5. (1,0) Determinar a força F sobre C_2 devido à interacção magnética com C_1 . Para simplificar, assumir que a força por unidade de comprimento é a mesma que actua entre dois fios longos e rectilíneos nos quais circulam correntes paralelas.
6. (1,0) A corrente I é medida quando a balança está em equilíbrio. Determinar o valor de I em função dos parâmetros físicos do sistema. As dimensões do aparelho são tais que se podem desprezar os efeitos mútuos das bobinas da esquerda sobre as da direita.

Seja M a massa da balança (não incluindo m nem as partes suspensas), G o seu centro de massa e l a distância \overline{OG} .

7. (2,0) A balança está em equilíbrio estável em relação a pequenas perturbações que alterem a altura de C_2 em δx e a de C_5 em $-\delta x$. Determinar² o valor máximo δx_{\max} para o qual a balança ainda regressa à posição de equilíbrio quando é libertada.

² Considerar que os centros das bobinas se mantêm aproximadamente alinhados.

Usar as aproximações $\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2$ ou $\frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$ quando $\beta \ll 1$, e $\sin \theta \approx \tan \theta$ para θ pequeno.

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

T 2 FOLHA DE RESPOSTAS

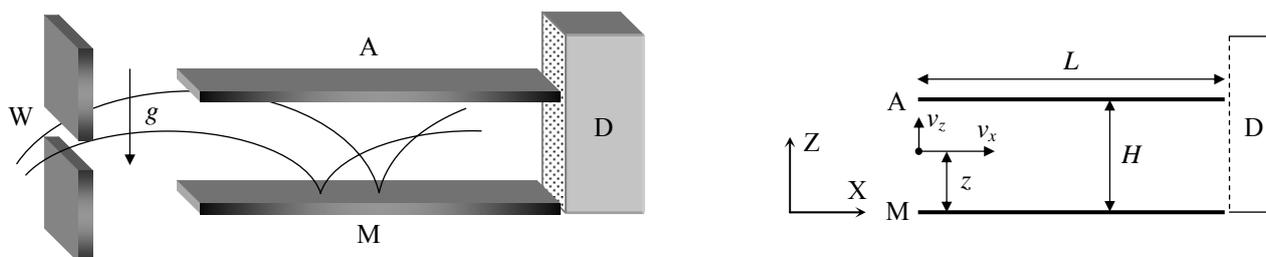
Questão	Fórmulas fundamentais utilizadas	Resultados analíticos	Pontuação
1		$\varepsilon =$ $\langle P \rangle =$	1,5
2		$R =$	2,0
3		$\varepsilon =$	2,0
4		$R =$	0,5
5		$F =$	1,0
6		$I =$	1,0
7		$\delta z_{\max} =$	2,0

T 3 NEUTRÕES NUM CAMPO GRAVÍTICO

No mundo clássico que nos é familiar, uma bola que saltita no chão, elasticamente, sob a acção do campo gravítico terrestre é um exemplo de um movimento perpétuo. O movimento da bola ocorre numa região limitada do espaço, entre o chão e o ponto de inversão do movimento. Apenas a resistência do ar ou eventuais choques inelásticos podem parar o processo, e ambos os efeitos serão ignorados no que se segue.

Um grupo de físicos do Instituto Laue-Langevin em Grenoble relatou¹, em 2002, os resultados de uma experiência acerca do comportamento de neutrões no campo gravítico da Terra. Nessa experiência, neutrões lançados para a direita caem sobre uma superfície horizontal que actua como um espelho de neutrões, de onde eles ressaltam, elasticamente, até à altura inicial, uma e outra vez.

O dispositivo experimental está esquematizado na figura F-1. Consiste numa janela W, num espelho M para neutrões (à altura $z = 0$), numa superfície A de um material que absorve neutrões (à altura $z = H$ e comprimento L) e num detector de neutrões D. Os neutrões voam entre W e D através da cavidade entre A e M com uma componente horizontal constante da velocidade, v_x . Todos os neutrões que tocam na superfície A são absorvidos e desaparecem da experiência. Aqueles que alcançam a superfície do espelho M são reflectidos elasticamente. O detector D conta a taxa de transmissão, $N(H)$, que é o número de neutrões que atinge o detector por unidade de tempo.



F-1

As cotações de cada questão estão indicadas no início de cada alínea, entre parênteses.

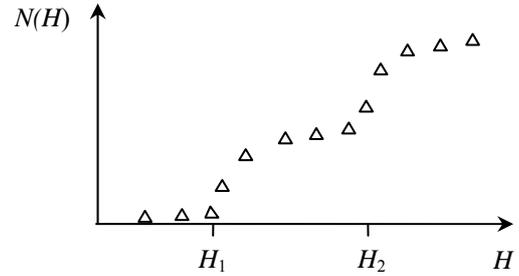
Os neutrões entram na cavidade com uma distribuição larga de valores, positivos e negativos, da componente vertical da velocidade v_z . Uma vez na cavidade, os neutrões voam na região entre o espelho, em baixo, e a superfície absorvente, em cima.

1. (1,5) Calcular classicamente o intervalo da componente vertical da velocidade $v_z(z)$ dos neutrões que, entrando à altura z , podem chegar ao detector D. Assuma que L é muito maior que qualquer outro comprimento deste dispositivo.
2. (1,5) Calcular classicamente o comprimento mínimo L_c da cavidade que garante que todos os neutrões fora do intervalo de velocidades da alínea anterior, para qualquer z , sejam absorvidos pela superfície A. Use $v_x = 10 \text{ ms}^{-1}$ e $H = 50 \mu\text{m}$.

A taxa de transmissão dos neutrões $N(H)$ é medida em D. É de esperar que esta taxa aumente de forma monótona com H .

¹ V. V. Nesvizhevsky *et al.* "Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field." *Nature*, **415** (2002) 297. *Phys Rev D* **67**, 102002 (2003).

3. (2,5) Calcular a taxa clássica $N_c(H)$, assumindo que os neutrões chegam à cavidade com velocidade vertical v_z à altura z , sendo que todos os valores de v_z e z são igualmente prováveis. Dar a resposta em termos de ρ , o número constante de neutrões por unidade de tempo, por unidade de velocidade vertical e por unidade de altura, que entram na cavidade com velocidade v_z à altura z .



F-2

Os resultados experimentais obtidos pelo grupo de Grenoble estão em desacordo com as previsões clássicas, mostrando que o valor de $N(H)$ aumenta bruscamente para alguns valores críticos de H , os valores H_1, H_2, \dots , tal como mostra a figura F-2. Dito de outra forma, a experiência mostra que o movimento vertical dos neutrões que são reflectidos no espelho está quantizado. Na linguagem que Bohr e Sommerfeld usaram para descrever os níveis de energia do átomo de hidrogénio, diríamos “A acção S dos neutrões segundo a direcção vertical é um múltiplo da constante de Planck h ”. A acção S é a grandeza dada por

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{regra de quantização de Bohr-Sommerfeld})$$

onde p_z é a componente vertical do momento linear clássico e o integral deve ser calculado para um ciclo completo entre dois ressaltos. Só os neutrões com os valores de S dados pela relação acima podem estar dentro da cavidade.

4. (2,5) Calcular as alturas críticas H_n e os níveis de energia E_n (associados ao movimento vertical) usando as condições de quantização de Bohr-Sommerfeld. Calcule o valor numérico de H_1 , em μm , e de E_1 , em eV.

A distribuição inicial uniforme, ρ , dos neutrões à entrada muda, durante o vôo na cavidade, para uma distribuição em degraus, que é detectada em D (figura F-2). De agora em diante, e para tornar os cálculos mais simples, vamos considerar uma cavidade longa em que $H < H_2$. Classicamente, todos os neutrões com energias no intervalo considerado na questão 1 são permitidos na cavidade, ao passo que do ponto de vista quântico apenas são permitidos os neutrões com energias no nível E_1 . De acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg para o tempo-energia, esta redistribuição energética dos neutrões necessita de um tempo mínimo de vôo. A incerteza na energia do movimento vertical será significativa se o comprimento da cavidade for pequeno. Este fenómeno introduzirá um alargamento dos níveis de energia.

5. (2,0) Estimar o mínimo tempo de vôo t_q e o comprimento mínimo L_q da cavidade necessários para observar o primeiro aumento brusco do número de neutrões detectados em D. Para o cálculo, use o valor $v_x = 10 \text{ ms}^{-1}$.

Dados:

Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Velocidade da luz no vazio	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga elementar	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do neutrão	$M = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Aceleração da gravidade na Terra	$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
Se necessário, usar a expressão:	$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

T 3 FOLHA DE RESPOSTAS

Questão	Fórmulas fundamentais utilizadas	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Pontuação
1		$\leq v_z(z) \leq$		1,5
2		$L_c =$	$L_c =$	1,5
3		$N_c(H) =$		2,5
4		$H_n =$ $E_n =$	$H_1 = \mu\text{m}$ $E_1 = \text{eV}$	2,5
5		$t_q =$ $L_q =$	$t_q =$ $L_q =$	2,0