Prova Teórica

Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas. Há 3 questões, valendo cada uma **10 pontos**.

2. Utilizar apenas a caneta colocada na sua mesa.

3. Utilizar apenas o lado da frente das folhas.

4. Transcrever sempre para a **Folha de Respostas** o sumário dos resultados que obteve. Serão também fornecidas **folhas de papel em branco**. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado e ***as unidades correctas***.

5. Escrever nas folhas em branco tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Por favor, utilizar o ***mínimo de texto***; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.

6. Preencher as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar com o seu número de estudante (**Student Code**). Além disso, nas folhas em branco usadas em cada questão, introduzir o número da questão (**Problem No.**), numerar a página (**Page No.**) e indicar ainda o número total de folhas usadas nessa questão (**Total No. of pages**). Escrever também o número da questão e a secção a que está a responder no topo de cada folha de papel. Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.

7. No final da prova, ordenar as folhas de cada questão *pela seguinte ordem*: folha de respostas, folhas utilizadas (ordenadas), folhas de rascunho inutilizadas e enunciado da prova. Colocar depois os conjuntos de folhas de cada questão no envelope respectivo, isto é, os problemas 1, 2 e 3 devem ser colocados nos envelopes M3A, M3B e M3C, respectivamente. Colocar tudo, juntamente com as folhas não utilizadas, no envelope M2 e deixar tudo sobre a mesa. ***Não é permitido retirar da sala quaisquer folhas de papel***.

TRITURADOR DE ARROZ MOVIDO A ÁGUA

A. Introdução

O arroz é o alimento base para a maioria da população do Vietname. Para fazer arroz branco a partir do arroz tal como é colhido, é necessário retirar a casca do grão escuro (num processo designado por *descascagem*) e obter o grão de arroz branco. As zonas montanhosas do Vietname são ricas em água e as populações que aí vivem usam *trituradores de arroz movidos a água* para fazer a separação do grão de arroz. A Figura 1 mostra um desses sistemas. A Figura 2 ilustra o seu funcionamento.

B. Constituição e modo de operação

1. Constituição

O sistema da Figura 1 é constituído pelas seguintes componentes:

- O *almofariz*, um recipiente feito de madeira para colocar o arroz.
- A *alavanca*, um tronco de madeira com um extremidade larga e outra estreita. A alavanca pode rodar em torno de um eixo horizontal. Na sua extremidade mais estreita encontra-se acoplado perpendicularmente à alavanca um martelo (*pilão*). O comprimento deste é tal que, quando toca no arroz colocado no recipiente de madeira, a alavanca fica na posição horizontal. A parte mais larga da alavanca é escavada para criar um depósito de água. A forma deste depósito é crucial para o funcionamento do sistema.

2. Modo de operação

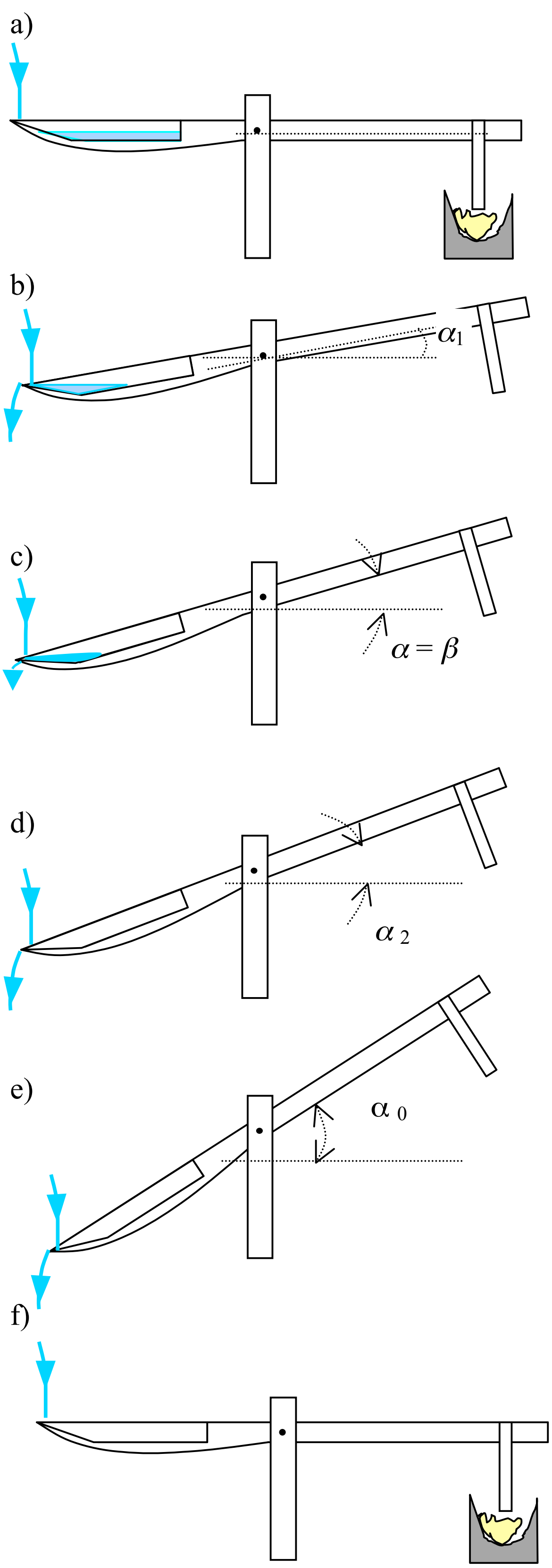
O sistema tem dois modos de operação:

- *Modo útil* de funcionamento. Neste modo de funcionamento, o ciclo de operações encontra-se ilustrado na Figura 2. O sistema funciona através da transferência de trabalho do martelo para o arroz durante a fase (f) da Figura 2. Se, por alguma razão, o martelo nunca tocar no arroz, diz-se que o sistema não funciona.
- *Modo de "repouso"* com a alavanca levantada. Durante a fase (c) do ciclo de operação (Figura 2), à medida que o ângulo de inclinação α aumenta, a quantidade de água no depósito da alavanca diminui. Num determinado instante,

a quantidade de água é exactamente aquela que contrabalança o peso da alavanca. Identificar o ângulo de inclinação da alavanca neste instante por β. nesse preciso instante. Se a alavanca for mantida nesse ângulo e a velocidade angular inicial for nula, então a alavanca permanece nessa posição indefinidamente. Este é o modo de repouso com a alavanca levantada. A estabilidade desta posição depende do fluxo de água para o depósito da alavanca, Φ. Se Φ exceder um determinado valor Φ_2, então o modo de repouso é estável, e o sistema não se pode colocar no modo útil de funcionamento. Por outras palavras, Φ_2 é o fluxo mínimo para que o sistema não funcione.

Figura 1
Um triturador de arroz movido a água

CICLO DE OPERAÇÃO DE UM TRITURADOR DE ARROZ MOVIDO A ÁGUA



a) No início não existe qualquer água no depósito da alavanca e o martelo permanece no recipiente de madeira. A água é introduzida no depósito da alavanca com um fluxo reduzido e durante algum tempo a alavanca permanece na posição horizontal.

b) A partir de um dado momento a quantidade de água é suficiente para levantar a alavanca. Devido à inclinação, a água desloca-se no depósito de água em direcção à extremidade da alavanca, fazendo com que esta se incline mais depressa. A água começa a sair do depósito quando $\alpha=\alpha_1$.

c) À medida que o ângulo α aumenta, a água começa a sair do depósito. A partir de uma determinada inclinação $\alpha=\beta$, o momento da força resultante é nulo.

d) O ângulo α continua a aumentar, e a água continua a sair do depósito até que este fique vazio.

e) O ângulo α continua a crescer devido à inércia do sistema. Dada a forma particular do depósito, a água que continua a cair neste sai imediatamente. O movimento "inercial" da alavanca continua até o ângulo α atingir o valor máximo α_0.

f) Sem água no depósito, o peso da alavanca faz com que esta regresse à sua posição original. Nesse momento o martelo dá uma pancada no arroz que se encontra no recipiente de madeira e recomeça um novo ciclo.

C. O problema

Considerar o triturador de arroz movido a água com os seguintes parâmetros (Figura 3):

- A massa da alavanca (incluindo o martelo, mas sem a água) é M=30 kg.
- O centro de massa da alavanca é G. A alavanca roda em torno de um eixo que passa no ponto T representado na figura.
- O momento de inércia da alavanca em relação a T é I=12 kg·m^2.
- Quando existe água no depósito, a massa de água é identificada por m e o centro de massa da água encontra-se no ponto N.
- O ângulo de inclinação da alavanca em relação ao eixo horizontal é α.
- As dimensões do sistema e do depósito de água encontram-se representadas na Figura 3.

Desprezar a força de atrito no eixo de rotação e a força devida á queda da água no depósito da alavanca. Assumir que a superfície livre da água é sempre horizontal.

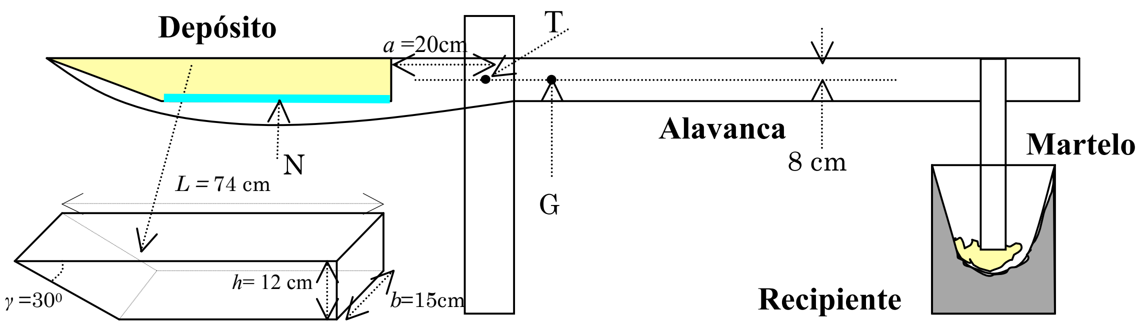


Figura 3. Constituição e dimensões do triturador de arroz movido a água.

1. A estrutura do sistema

Inicialmente o depósito de água encontra-se vazio e a alavanca permanece na posição horizontal. A partir de um dado momento a quantidade de água que flui para o depósito é suficiente para que a alavanca comece a rodar. Nesse preciso instante a quantidade de água que existe no depósito é m=1.0kg.

1.1. Determinar a distância do centro de massa G da alavanca ao eixo de rotação T. Sabe-se que GT é horizontal quando o depósito se encontra vazio.

1.2. A água começa a sair do depósito quando o ângulo entre a alavanca e o eixo horizontal atinge o valor α_1. O depósito de água encontra-se completamente vazio quando este ângulo for igual a α_2. Determinar α_1 e α_2.

1.3. Considere $\mu(\alpha)$ o momento total da força (relativamente ao eixo *T*) devido ao peso da alavanca e da água no depósito. $\mu(\alpha)$ é zero quando $\alpha=\beta$. Determinar β e a massa de água m_1 no depósito neste instante.

2. Parâmetros do modo útil de funcionamento

Assumir que a água flui para o depósito a uma taxa Φ constante e pequena. Considerar ainda que a quantidade de água que cai no depósito quando a alavanca se encontra em movimento é desprezável. Nesta parte, desprezar a variação do momento de inércia durante o ciclo de funcionamento.

2.1. Representar num gráfico o momento da força μ em função do ângulo α, $\mu(\alpha)$, durante um ciclo de operação. Escrever explicitamente os valores $\mu(\alpha)$ para os ângulos α_1, α_2 e $\alpha=0$.

2.2. A partir do gráfico da alínea 2.1., discutir e dar uma interpretação geométrica ao valor da energia total W_{total} associada a $\mu(\alpha)$ e ao trabalho que é transferido do martelo para o arroz, $W_{martelo}$.

2.3. A partir do gráfico que representa μ em função de α, estimar α_0 e $W_{martelo}$ (assumir que a energia cinética da água que flui dentro do depósito e para fora deste é desprezável.) As linhas curvas podem ser substituídas por linhas em "zig-zag", se simplificar os cálculos.

Parte 3. O modo de repouso

Assumir que a água flui a uma taxa Φ constante, mas não desprezar a quantidade de água que flui para o depósito da alavanca quando esta se encontra em movimento.

3.1. Assumir que o depósito se encontra com água sempre no máximo da sua capacidade.

3.1.1. Esquematizar um gráfico do momento da força μ em função do ângulo α na vizinhança de $\alpha=\beta$. A que tipo de equilíbrio corresponde a posição $\alpha=\beta$ da alavanca?

3.1.2. Encontrar a expressão analítica do momento da força μ em função de $\Delta\alpha$ quando $\alpha=\beta+\Delta\alpha$ e $\Delta\alpha$ é pequeno.

3.1.3. Escrever a equação de movimento da alavanca, que parte do repouso a partir da posição $\alpha=\beta+\Delta\alpha$ (com $\Delta\alpha$ pequeno). Mostrar que o movimento é, em boa aproximação, harmónico simples. Calcular o respectivo período de oscilação τ.

3.2. Para um dado valor de Φ, o depósito encontra-se sempre com água até ao máximo da sua capacidade se e só se a alavanca se mover suficientemente devagar. Existe um limite superior na amplitude da oscilação harmónica. Este limite depende de Φ. Determinar o valor mínimo (Φ_1) de Φ (em kg/s) que permite que a alavanca execute um movimento harmónico simples com uma amplitude de 1º.

3.3. Assumir que Φ é de tal modo elevado que a alavanca tem o depósito de água sempre cheio até à sua capacidade máxima enquanto o ângulo de inclinação decresce de α_2 para α_1. Ter ainda em conta que se Φ for muito elevado o sistema não pode funcionar. Assumir que o movimento da alavanca é o de um oscilador harmónico e estimar o valor mínimo do fluxo Φ_2 para o triturador de arroz movido a água não funcionar.

Problema Teórico No. 1

Student code

FOLHA DE RESPOSTAS

1. **3 pts**

1.1.	A distância do eixo de rotação ao centro de massa é TG =	1
1.2.	α_1 = α_2 =	0,5
1.3.	O momento μ na alavanca anula-se quando m_1= β=	1,5

2. **3,5 pts**

2.1.	O gráfico de μ versus α. Escrever os valores de α e μ para α_1, α_2 e $\alpha = 0$.	2
2.2.	Como se representa W_{total} no gráfico $\mu(\alpha)$? Como se representa W_{martelo} no gráfico $\mu(\alpha)$?	0,35 0,35
2.3.	$\alpha_0 \approx$ $W_{\text{martelo}} =$	0,4 0,4

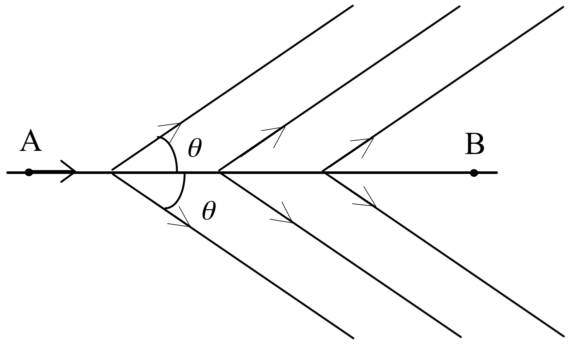
3. **3,5 pts**

3.1.	3.1.1. O gráfico de μ versus α na vizinhança de $\alpha = \beta$	0,5
	Para $\alpha = \beta$, o equilíbrio é: **Estável** ☐ **Instável** ☐ **Indiferente** ☐ (Colocar uma cruz na resposta correcta)	0,2
	3.1.2. Formas analíticas de $\mu(\alpha)$ em função de Δα	0,4
	3.1.3. Equação de movimento da alavanca	0,4
	O período das oscilações é $\tau =$	
3.2.	O valor mínimo de Φ para que a alavanca oscile harmonicamente com amplitude 1^{o}: $\Phi_1 =$	1,5
3.3.	O valor mínimo de Φ para que o triturador não funcione: $\Phi_2 =$	0,5

RADIAÇÃO CHERENKOV E O DETECTOR RICH

A luz propaga-se no vácuo com velocidade c. Não existe nenhuma particula que se possa propagar com velocidade superior a c. Porém, é possível que num meio material transparente uma partícula se mova com velocidade v superior à velocidade da luz nesse meio, dada por $\frac{c}{n}$, onde n é o índice de refracção do meio. Experiência (Cherenkov, 1934) e teoria (Tamm e Frank, 1937), mostraram que uma partícula carregada, que se mova com velocidade v num meio transparente de índice de refracção n tal que $v > \frac{c}{n}$, emite radiação, denominada *Radiação de Cherenkov*, em direções que formam com a trajetória um ângulo $\theta = \mathbf{arccos}\frac{1}{\beta n}$ (1)

onde $\beta = \frac{v}{c}$.



1. Para estabelecer este facto, consideremos uma partícula movendo-se com velocidade constante $v > \frac{c}{n}$ numa trajectória rectilínea que passa por um ponto A no instante t=0 e em B no instante t_1. Como existe simetria em relação a rotações em torno de AB, é suficiente considerar os raios de luz num plano contendo AB.

Em qualquer ponto C entre A e B, a partícula emite uma onda esférica, que se propaga com velocidade $\frac{c}{n}$. Define-se como frente de onda num dado instante *t*, o lugar geométrico de todos os pontos na mesma fase de oscilação resultante da sobreposição de todas as ondas esféricas nesse instante.

1.1. Considerar a frente de onda num instante t_1 e desenhar a sua intersecção com o plano que contém a trajetória da partícula.

1.2. Exprimir o ângulo φ entre esta intersecção e a trajetória da partícula em termos de n e β.

2. Considerar um feixe de partículas que se move ao longo de uma linha recta IS com velocidade $v > \frac{c}{n}$, de tal forma que o ângulo θ seja pequeno. O feixe atravessa um espelho esférico côncavo de distância focal f e centro C no ponto S. SC faz com SI um pequeno ângulo α (ver a figura na folha de respostas). O feixe de partículas cria uma imagem em forma de anel no plano focal do espelho. Explicar, com a ajuda de um esquema ilustrativo, este facto. Dar a posição do centro O e o raio r do anel.

Esta montagem é usada num *Detector de Radiação Cherenkov* (RICH) e o meio no qual as partículas se deslocam é denominado de *radiador*.

Nota: em todas as questões deste problema, termos de segunda ordem e superiores em α e θ serão desprezados.

3. Um feixe de partículas com momento $p = 10.0\ \text{GeV}/c$, é composto por três tipos de partículas: protões (p), kaões (K) e piões (π), com massas de repouso $M_{\text{p}} = 0.94\ \text{GeV}/c^2$, $M_{\kappa} = 0.50\ \text{GeV}/c^2$ e $M_{\pi} = 0.14\ \text{GeV}/c^2$, respectivamente.

Não esquecer que pc e Mc^2 possuem dimensão de energia, e 1 eV é a energia adquirida por um electrão após ter sido acelerado por uma tensão de 1 V e 1 GeV = 10^9 eV, 1 MeV = 10^6 eV.

O feixe de partículas atravessa o ar (o radiador), que se encontra a uma pressão P. O índice de refração do ar depende da pressão P, medida em atmosferas, de acordo com a relação:

$n = 1 + aP$, onde $a = 2{,}7 \times 10^{-4}$ atm^{-1}.

3.1. Calcular para cada tipo de partículas o valor mínimo da pressão $P_{\min}$ do ar, para que seja emitida radiação Cherenkov.

3.2. Calcular a pressão $P_{\frac{1}{2}}$, tal que o raio do anel dos kaões seja igual a metade do correspondente para os piões. Calcular os valores de θ_{κ} e θ_{π} para este caso. É possível observar a imagem do anel para os protões, a esta pressão?

4. Assuma agora que o feixe não é perfeitamente monocromático: os momentos das partículas estão distribuídos num intervalo centrado em $10\,\text{GeV}/c$ com meia largura a meia altura Δp. Isto faz com que a imagem do anel se alargue em torno de um ângulo médio θ com uma meia largura a meia altura $\Delta\theta$. A pressão no radiador é $P_{\frac{1}{2}}$, determinada em 3.2.

4.1. Calcular $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ e $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$, que correspondem aos valores tomados para $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ no caso dos piões e kaões.

4.2. Quando a separação entre as duas imagens dos anéis, $\theta_\pi - \theta_\kappa$, é maior que 10 vezes a soma das meias-larguras $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$ i.e., $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\ \Delta\theta$, é possível distinguir bem as imagens dos dois anéis. Calcular o valor máximo de Δp de modo que as duas imagens se possam ainda distinguir bem.

5. Cherenkov descobriu o efeito que ficou com o seu nome quando observava uma garrafa de água próxima de uma fonte radioactiva. Ele observou que a água da garrafa emitia luz.

5.1. Encontrar a energia cinética mínima $T_{\min}$ que permita a emissão de radiação Cherenkov por uma partícula de massa em repouso M que se move na água,. O índice de refração da água é n=1,33.

5.2. A fonte radioactiva usada por Cherenkov emitia tanto partículas α (núcleos de Hélio) cuja massa em repouso é $M_\alpha = 3.8\ \text{GeV}/c^2$, como partículas β (electrões) cuja massa em repouso é $M_e = 0.51\ \text{MeV}/c^2$. Calcule os valores numéricos de $T_{\min}$ para as partículas α e β.

Sabendo que a energia cinética das partículas emitidas por fontes radioactivas nunca é superior a alguns MeV, descobrir quais as partículas que podem dar origem à radiação observada por Cherenkov.

6. Nas secções anteriores deste problema, a dependência da radiação Cherenkov no comprimento de onda λ foi ignorada. A partir de agora iremos ter em conta que a radiação Cherenkov de uma partícula possui um espectro largo contínuo incluindo a região do visível (comprimentos de onda entre 0.4 μm a 0.8 μm). Sabe-se também que o índice de refracção n do radiador diminui linearmente 2% de $(n-1)$ quando λ aumenta neste intervalo.

6.1. Considerar um feixe de piões com momento de $10.0\ \text{GeV}/c$ que se move no ar a uma pressão de 6 atm. Encontrar a diferença angular $\delta\theta$ associada aos dois extremos da região visível do espectro.

6.2. Com base neste conhecimento, estudar qualitativamente o efeito da dispersão da imagem de um anel de piões com momento distribuído num intervalo centrado em $p = 10\ \text{GeV}/c$ com meia largura a meia altura de $\Delta p = 0.3\ \text{GeV}/c$.

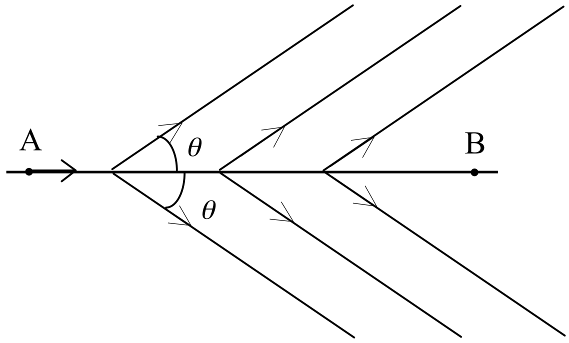
6.2.1. Calcule o alargamento devido a dispersão (variação do índice de refração) e o alargamento devido a acromaticidade do feixe (variação de momento).

6.2.2. Descrever como varia a cor do anel quando se observa a partir da parte interna do anel em direcção à parte externa, marcando com uma cruz as respostas correctas na folha de resposta.

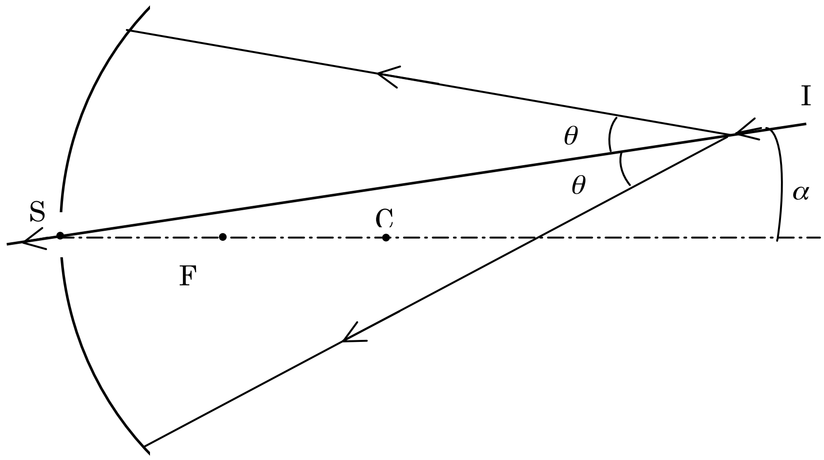
Student Code

FOLHA DE RESPOSTAS

1. **1 pts**

1.1.	Desenhar a intersecção da frente de onda da radiação com o plano do papel no instante $t = t_1 > 0$ 	0,5
1.2.	$\varphi =$	0,5

2. **1,5 pts**

A formação da imagem do anel de um feixe de partículas carregadas que se move na direcção IS com velocidade superior a $\frac{c}{n}$. S é a intersecção do feixe de partículas com o espelho. F é o foco e C é o centro do espelho esférico.  A posição do centro O é definida pela distância FO = ... O raio da imagem do anel é r = ...	

Problema Teórico No. 2

Student Code

3. **2,5 pts**

3.1.	Para o protão, P_{min} = ...	1,25
	Para o kaão, P_{min} = ...	
	Para o pião, P_{min} = ...	
3.2.	$P_{\frac{1}{2}}$ = ... θ_κ = ... θ_π = ...	0,5 0,25 0,25
	A imagem do anel do protão é observável ? ☐ Sim ☐ Não	0,25

4. **2 pts**

4.1.	$\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ = $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$ =	1
4.2.	O valor máximo Δp	1

5.

1,75 pts

	A energia cinética mínima das partículas para que haja emissão de radiação Cherenkov na água: T =	1,0
	A energia cinética mínima das partículas α: T =	0,25
	A energia cinética mínima das partículas β: T =	0,25
	A partícula que gera radiação Cherenkov na água é …………................	0,25

6. **1,25 pts**

6.1.	$\delta\theta$ =	0,5
6.2.	6.2.1. A meia-largura do anel alargado devido a dispersão é A meia-largura do anel alargado devido a acromaticidade é	0,25 0,25
	6.2.2. A cor da • parte interna do anel • do centro do anel • da parte externa do anel Marque com uma cruz as caixas correctas.	0,25

	Azul	Branco	Vermelho
parte interna do anel			
do centro do anel			
da parte externa do anel			

VARIAÇÃO DA TEMPERATURA DO AR COM A ALTITUDE, ESTABILIDADE ATMOSFÉRICA E POLUIÇÃO DO AR

O movimento vertical do ar governa vários processos atmosféricos, tais como a formação de nuvens, a precipitação e ainda a dispersão de poluentes do ar. Se a atmosfera for *estável*, o movimento vertical encontra-se limitado e os poluentes do ar tendem a ficar mais acumulados em torno dos locais de emissão do que a dispersarem-se e diluírem-se. Pelo contrário, numa atmosfera *instável*, o movimento do ar encoraja a dispersão vertical dos poluentes. Por isso, a concentração de poluentes no ar depende não só da intensidade da fonte emissora como também da *estabilidade* da atmosfera.

Vamos determinar a estabilidade atmosférica utilizando o conceito meteorológico de *camada de ar* e comparar a temperatura de uma camada de ar que sobe ou desce adiabaticamente na atmosfera com a temperatura do ar circundante. Iremos ver que, em muitos casos, uma camada de ar que contenha poluentes e suba a partir do solo ficará em repouso a uma certa altitude, designada por *altitude de mistura*. Quanto maior for a altitude de mistura, menor será a concentração de poluentes no ar. Iremos avaliar a altitude de mistura e a concentração de monóxido de carbono emitido pelas motorizadas na área metropolitana de Hanói durante a hora de ponta matinal, quando a subida do ar se encontra limitada devido a uma inversão de temperatura (a temperatura do ar aumenta com a altitude) para altitudes acima de 119 m.

Considerar o ar como um gás diatómico ideal, com uma massa molar μ=29 g/mol.

A pressão p e o volume V de um gás submetido a uma transformação adiabática e reversível obedecem à relação $pV^{\gamma} = \text{const}$, onde $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ é a razão entre os calores específicos do gás a pressão e volume constantes.

Se necessário, pode usar os seguintes dados:

Constante universal dos gases perfeitos: $R = 8{,}31$ J/mol.K.
Pressão atmosférica à superfície: $p_0 = 101{,}3$ kPa
Aceleração da gravidade (constante): $g = 9{,}81$ m/s^2
Calor específico molar a pressão constante do ar: $c_p = \dfrac{7}{2}R$.
Calor específico molar a volume constante do ar: $c_V = \dfrac{5}{2}R$.

Sugestões matemáticas

a.
$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B}\ln(A+Bx)$$

b. A solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (em que A e B são constantes) é $x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$ onde $x_1(t)$ é a solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$.

c. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

1. Variação da pressão com a altitude

1.1. Assumir que a temperatura da atmosfera é uniforme e igual a T_0. Obter uma expressão para a pressão atmosférica p em função da altitude z.

1.2. Assumir agora que a temperatura da atmosfera varia com a altitude de acordo com a relação

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

onde Λ é uma constante, designada por *taxa de variação da temperatura* da atmosfera (o gradiente vertical da temperatura é igual a -Λ).

1.2.1. Obter uma expressão para a pressão atmosférica p em função da altitude z.

1.2.2. Um processo designado por *convecção livre* ocorre quando a densidade do ar cresce com a altitude. Para que valores de Λ ocorre este processo?

2. Variação da temperatura de uma camada de ar em movimento vertical

Considerar uma camada de ar que se desloca para cima e para baixo na atmosfera. Uma camada de ar é uma massa de ar de dimensões razoáveis, com vários metros, e deve ser tratada como um sistema termodinamicamente independente. No entanto, a camada é suficientemente pequena para que a sua temperatura possa ser considerada uniforme. O movimento vertical de uma camada de ar pode ser tratado como um processo quase adiabático, i.e., podem-se desprezar as trocas de calor com o ar. Se a camada de ar subir na atmosfera, expande-se e arrefece. Pelo contrário, se a camada de ar se deslocar para baixo, o aumento da pressão exterior irá comprimir o ar dentro da camada e a sua temperatura irá aumentar.

Como a camada de ar não é grande, pode-se considerar que a pressão atmosférica em qualquer ponto da sua fronteira é a mesma, e o seu valor é $p(z)$, em que z é a altitude do centro da camada de ar. A temperatura na camada de ar é uniforme e igual a $T_{\text{camada}}(z)$, que, em geral, é diferente da temperatura do ar circundante, $T(z)$. Nas questões 2.1 e 2.2, $T(z)$ é uma função arbitrária de z.

2.1. A variação da temperatura da camada de ar com a altitude, $T_{\text{camada}}(z)$, é definida pela expressão $\frac{dT_{\text{camada}}}{dz} = -G$. Obter a expressão de $G(T, T_{\text{camada}})$.

2.2. Considerar uma condição atmosférica particular em que, qualquer que seja a altitude z, a temperatura T da atmosfera é igual à temperatura da camada de ar T_{camada}, $T(z) = T_{\text{camada}}(z)$. Usar Γ para identificar o valor de G quando $T = T_{\text{camada}}$, i.e., $\Gamma = -\frac{dT_{\text{camada}}}{dz}$ (com $T = T_{\text{camada}}$). Γ é a *taxa de variação adiabática do ar seco*.

2.2.1. Obter uma expressão para Γ.

2.2.2. Calcular o valor numérico de Γ.

2.2.3. Obter a expressão da variação da temperatura do ar $T(z)$ com a altitude.

2.3. Assumir que a temperatura atmosférica depende da altitude de acordo com a relação $T(z) = T(0) - \Lambda z$ onde, de novo, Λ é uma constante. Determinar a variação da temperatura da camada de ar, $T_{\text{camada}}(z)$, com a altitude, z.

2.4. Obter uma expressão aproximada para $T_{\text{camada}}(z)$ quando $|\Lambda z| << T(0)$ e $T(0) \approx T_{\text{camada}}(0)$.

3. Estabilidade atmosférica

Nesta secção deve assumir que T varia linearmente com a altitude.

3.1. Considerar uma camada de ar inicialmente em equilíbrio com o ar circundante a uma altitude z_0, i.e., a camada está à temperatura $T(z_0)$ do ar circundante. Se a camada de ar for deslocada ligeiramente para cima ou para baixo (devido por exemplo à turbulência atmosférica), uma destas três situações pode acontecer:

- A camada de ar encontra uma forma de voltar à sua altitude original z_0, logo o equilíbrio da camada de ar é estável. A atmosfera é referida como estável.
- A camada de ar continua o seu movimento afastando-se da altitude original, logo o equilíbrio da camada de ar é instável. Diz-se que a atmosfera é instável.
- A camada de ar permanece na sua nova posição, por isso o equilíbrio da camada de ar diz-se indiferente. A atmosfera é designada por neutra.

Determinar as condições a que Λ deve obedecer para que a atmosfera seja estável, instável ou neutra.

3.2. A camada de ar possui uma temperatura no solo $T_{\text{camada}}(0)$ mais elevada que a temperatura do ar circundante $T(0)$. A força de impulsão fará com que a camada de ar suba. Obter, em função de Λ e Γ, e para o caso de uma atmosfera estável, uma expressão para a altitude máxima que a camada de ar pode atingir.

4. A altitude de mistura

4.1. A Tabela 1 mostra os valores da temperatura recolhidos por uma sonda atmosférica às 7h00 de um dia de Novembro em Hanói. A variação da temperatura com a altitude pode ser descrita aproximadamente por $T(z) = T(0) - \Lambda z$, com três valores diferentes para Λ consoante 0<z<96 m, 96 m<z<119 m ou 119 m<z<215 m.

Considerar uma camada de ar com temperatura $T_{\text{camada}}(0) = 22°\text{C}$ que sobe a partir do solo. Utilizando os dados da Tabela 1 e a aproximação linear referida acima, calcular a temperatura da camada quando esta se encontra a 96 m e a 119 m de altitude.

4.2. Determinar a altitude máxima H que a camada de ar pode atingir e a temperatura da camada a essa altitude, $T_{\text{camada}}(H)$.

H é designada por *altitude de mistura*. É a esta altitude que os poluentes emitidos do solo se podem misturar com o ar na atmosfera (devido, por exemplo, ao vento, à turbulência ou por dispersão) e consequentemente diluir-se nessa camada.

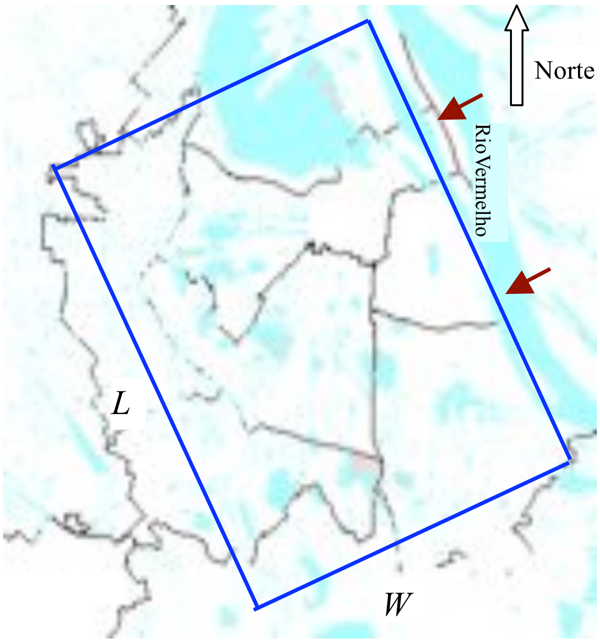
Tabela 1
Dados registados por uma sonda atmosférica às 7h00 de um dia de Novembro em Hanói.

Altitude, m	Temperatura, ºC
5	21,5
60	20,6
64	20,5
69	20,5
75	20,4
81	20,3
90	20,2
96	20,1
102	20,1
109	20,1
113	20,1
119	20,1
128	20,2
136	20,3
145	20,4
153	20,5

159	20,6
168	20,8
178	21,0
189	21,5
202	21,8
215	22,0
225	22,1
234	22,2
246	22,3
257	22,3

5. Estimativa da poluição por monóxido de carbono (CO) durante uma hora de ponta matinal em Hanói

A área metropolitana de Hanói pode ser aproximada por um rectângulo com lados L e W, como se pode ver na figura, com um dos lados alinhado segundo a direcção da margem sudoeste do Rio Vermelho.



Estima-se que durante a hora de ponta matinal, das 7h00 às 8h00, se encontram 8×10^5 motorizadas nas ruas de Hanói, cada uma percorrendo em média 5 km e emitindo 12 g de CO por quilómetro. Considera-se que a taxa M de emissão de CO durante a hora de ponta é constante no tempo. O vento de nordeste sopra perpendicularmente ao rio Vermelho (i.e., perpendicularmente aos lados L do rectângulo) com velocidade u, trazendo ar não poluído para Hanói e transportando parte do ar poluído com CO para fora da atmosfera da cidade. Pode-se ainda considerar que:

- O poluente (CO) é rapidamente dispersado, de tal forma que a concentração de CO no instante t, $C(t)$, é praticamente constante na atmosfera acima da área metropolitana até à altitude de mistura H, ou seja, a concentração de CO é aproximadamente igual em qualquer ponto duma caixa rectangular de dimensões L, W e H.
- O vento ascendente que entra na caixa rectangular é limpo e assume-se que não existe perda de poluição da caixa pelas paredes laterais paralelas à direcção do vento.
- Antes das 7h00, a concentração de CO na atmosfera é desprezável.

5.1. Obter a equação diferencial que determina a concentração do poluente CO, $C(t)$, em função do tempo.

5.2. Escrever a solução da equação diferencial para $C(t)$.

5.3. Calcular o valor numérico da concentração $C(t)$ às 8h00.

Dados: L=15 km, W=8 km, u=1 m/s.

Problema Teórico No. 3

Student code

FOLHA DE RESPOSTAS

1. **1,5 pts**

1.1.	Se a temperatura atmosférica é T_0, então $p(z) =$	0,5
1.2.	Se a temperatura atmosférica é $T(z) = T(0) - \Lambda z$, então 1.2.1. $p(z) =$ 1.2.2. A convecção livre ocorre se: Λ	0,5 0,5

2. **3,25 pts**

2.1.	$\frac{dT_{\text{camada}}}{dz} = -G =$	1,0
2.2.	$T = T_{\text{camada}}$ 2.2.1. Expressão para Γ 2.2.2. Valor numérico de $\Gamma =$ 2.2.3. Expressão para $T(z) =$	0,5 0,25 0,25
2.3.	$T_{\text{camada}}(z) =$	1,00
2.4.	$T_{\text{camada}}(z) \approx$	0,25

Student code

3. **2,25 pts**

3.1.	A expressão que Λ deve satisfazer, quando a atmosfera é: Estável : .... Instável : .... Neutra :	 0,5 0,5 0,25
3.2.	A altitude máxima $h =$	1

4. **1,75 pts**

4.1	Temperaturas às altitudes de 96 m e 119 m : $T_{camada}(96\text{ m}) =$ $T_{camada}(119\text{ m}) =$	 0,25 0,5
4.2	Altitude máxima (altitude de mistura) $H =$ Temperatura da camada $T(H) =$	 0,75 0,25

5. **1,25 pts**

5.1.	Equação para $C(t)$:	0,5
5.2.	Expressão para $C(t)$: $C(t) =$	0,5
5.3.	Valor numérico de $C(t)$ às 8h00 : $C(t) =$	0,25