IPhO2009

Prova Teórica

Segunda-feira, 13 de Julho de 2009

Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas.
2. Utilizar apenas as canetas fornecidas.
3. Utilizar apenas o lado da frente das folhas.
4. Utilizar apenas a calculadora fornecida.
5. Notar que cada problema tem a sua cor: o problema 1 é vermelho, o problema 2 é azul e o problema 3 é amarelo.
6. Cada problema é apresentada numa **Folha de Questões**, assinalada com um **Q** no canto superior esquerdo.
7. Transcrever *sempre* para a **Folha de Respostas** o sumário dos resultados que obteve. Esta folha está indicada com um **A** no canto superior esquerdo.
8. Serão também fornecidas **folhas de papel em branco**, identificadas com um **W** no canto superior esquerdo. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos requerido pelo problema.
9. Escrever nas folhas em branco tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Por favor, utilizar o ***mínimo de texto***; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
10. Para cada problema, preencher as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar (Q, A e W) com o seu número de estudante (**Student Number**), o número de página (**Page No.**) e ainda o número total de folhas usadas (**Total No. of pages**). Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, não as destrua: marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.
11. No final da prova, ordenar as folhas de cada problema *pela seguinte ordem*: folha de respostas, folhas utilizadas (ordenadas), folhas de rascunho, folhas não utilizadas e enunciado da prova. Colocar depois os conjuntos de folhas de cada problema no envelope respectivo e deixar tudo sobre a mesa. ***Não é permitido retirar da sala nem a calculadora nem quaisquer folhas de papel***.

PROBLEMA TEÓRICO No. 1

EVOLUÇÃO DO SISTEMA TERRA-LUA

Os cientistas conseguem determinar a distância da Terra à Lua com grande precisão. Tal pode ser alcançado emitindo um raio laser em direcção a espelhos especiais deixados na superfície da Lua por astronautas em 1969 e medindo o tempo de ida e volta do feixe (ver Figura 1).

Figura 1. Um raio laser enviado a partir de um observatório é utilizado para medir com precisão a distância da Terra à Lua.

Através destas observações foi possível verificar que a Lua está a afastar-se lentamente da Terra, isto é, que a distância da Terra à Lua está a aumentar com o tempo. A causa deste afastamento é a transferência de momento angular da Terra para a Lua devido ao torque (momento da força) das marés (ver Figura 2). Neste problema vão ser estudados os principais parâmetros do fenómeno.

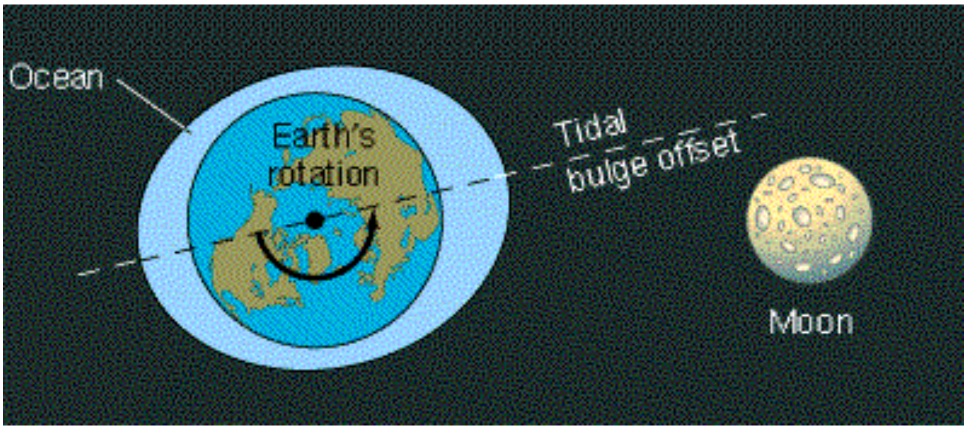


Figura 2. A força gravítica da Lua induz um abaulamento da superfície líquida da Terra e à consequente formação de dois bojos de maré. Devido à rotação da Terra, a linha que une os dois bojos não está alinhada com a linha que une os centros da Terra e da Lua. Este desalinhamento produz um torque que leva à transferência de momento angular da rotação da Terra para a translação da Lua. O desenho não está à escala.

1. Conservação do Momento Angular

Seja L_1 o momento angular actual total do sistema Terra-Lua. Considerar os seguintes pressupostos: i) L_1 é a soma do momento angular de rotação da Terra em torno do seu eixo e do momento angular associado à translação (revolução) da Lua em torno da Terra; ii) a órbita da Lua é circular e a Lua pode ser considerada uma massa pontual; iii) o eixo de rotação da Terra e o eixo de revolução da Lua são paralelos; iv) para simplificar o problema, considerar que a revolução da Lua ocorre em torno do centro da Terra e não do centro de massa do sistema; v) ignorar a influência do Sol. Em todo o problema, os momentos de inércia referidos são calculados em relação ao eixo de rotação da Terra e os torques e momentos angulares são calculados em relação ao centro da Terra.

1a	Escrever a equação para o actual momento angular total do sistema Terra-Lua em função do momento de inércia da Terra em relação ao seu eixo de rotação, I_E, da actual frequência angular de rotação da Terra, ω_{E1}, do actual momento de inércia da Lua em torno do eixo de rotação da Terra, I_{M1}, e da actual frequência angular de revolução da Lua, ω_{M1}.	0.2

Este processo de transferência de momento angular terminará quando os períodos de rotação da Terra e de revolução da Lua em torno da Terra forem iguais. Nesta altura, os bojos de maré produzidos pela Lua na Terra estarão alinhados com a linha que une os centros da Terra e da Lua e o torque deixará de existir.

1b	Escrever a equação para o momento angular total final, L_2, do sistema Terra-Lua, usando os mesmos pressupostos que na alínea anterior. Escrever L_2 em função do momento de inércia da Terra, I_E, da frequência angular final de rotação da Terra e de revolução da Lua, ω_2, e do momento de inércia final da Lua, I_{M2}.	0.2

1c	Escrever a equação de conservação do momento angular neste problema. Desprezar a contribuição da rotação da Terra para o momento angular total final.	0.3

2. Distância e frequência angular finais do sistema Terra-Lua

Desprezar a contribuição da rotação da Terra para o momento angular total final e assumir que a órbita da Lua em torno da Terra é sempre circular.

2a	Escrever a equação fundamental da dinâmica para a órbita circular da Lua em torno da Terra, no estado final, em função de M_E, ω_2, G e da separação final entre a Terra e a Lua, D_2. M_E é a massa da Terra e G é a constante de gravitação universal.	0.2

2b	Escrever a equação para a separação final entre a Terra e a Lua, D_2, em função dos parâmetros conhecidos: o momento angular total do sistema, L_1, as massa da Terra e da Lua, M_E e M_M respectivamente, e a constante de gravitação universal, G.	0.5

2c	Escrever a equação para a frequência angular final do sistema Terra-Lua, ω_2, em função dos parâmetros conhecidos: L_1, M_E, M_M e G.	0.5

De seguida irá obter os valores numéricos de D_2 e ω_2. Para isso será necessário calcular primeiro o momento de inércia da Terra.

2d	Escrever equação para o momento de inércia da Terra, I_E, assumindo que é uma esfera com densidade ρ_i no seu interior, desde o seu centro até um raio r_i, e densidade ρ_o desde r_i até r_o, à superfície (ver Figura 3).	0.5

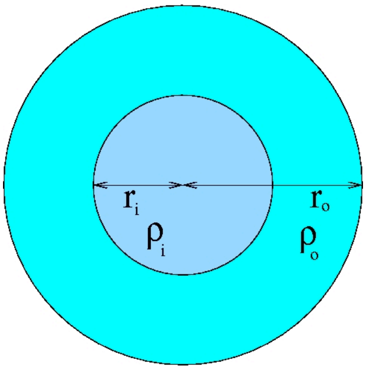


Figura 3. A Terra como uma esfera com duas densidades, ρ_i e ρ_o.

Determinar os valores numéricos solicitados com *dois algarismos significativos*.

2e	Obter o momento de inércia da Terra, I_E, considerando que $\rho_i = 1{,}3\times10^4$ kg m^{-3}, $r_i = 3{,}5\times10^6$ m, $\rho_o = 4{,}0\times10^3$ kg m^{-3}, e $r_o = 6{,}4\times10^6$ m.	0.2

As massas da Terra e da Lua são $M_E = 6{,}0\times10^{24}$ kg e $M_M = 7{,}3\times10^{22}$ kg, respectivamente. A actual separação entre a Terra e a Lua é $D_1 = 3{,}8\times10^8$ m. A frequência angular de rotação da Terra é actualmente $\omega_{E1} = 7{,}3\times10^{-5}$ rad s^{-1} e a constante de gravitação universal é $G = 6{,}7\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.

2f	Calcular o valor numérico do momento angular total do sistema, L_1.	0.2

2g	Determinar a separação final D_2 em metros e em unidades da separação actual D_1.	0.3

2h	Obter a frequência angular final ω_2 em rad/s, bem como a duração final do dia em unidades de dia actual.	0.3

Verificar que se justifica a hipótese de a contribuição do momento angular da Terra para o momento final ser desprezável determinando a razão entre o momento angular final da Terra e o da Lua. Deve ser uma quantidade pequena.

2i	Determinar a razão entre o momento angular final da Terra e o da Lua.	0.2

3. Quanto é que a Lua se afasta por ano?

Passar-se-á agora a determinar o afastamento anual da Lua em relação à Terra. Para tal, é preciso conhecer a equação para o torque que actua actualmente na Lua. Assumir que os bojos de maré podem ser aproximados por duas massas pontuais, de massa *m* cada, localizadas na superfície da Terra (ver figura 4). Seja θ o ângulo entre a linha que une os dois bojos e a linha que une os centros da Terra e da Lua.

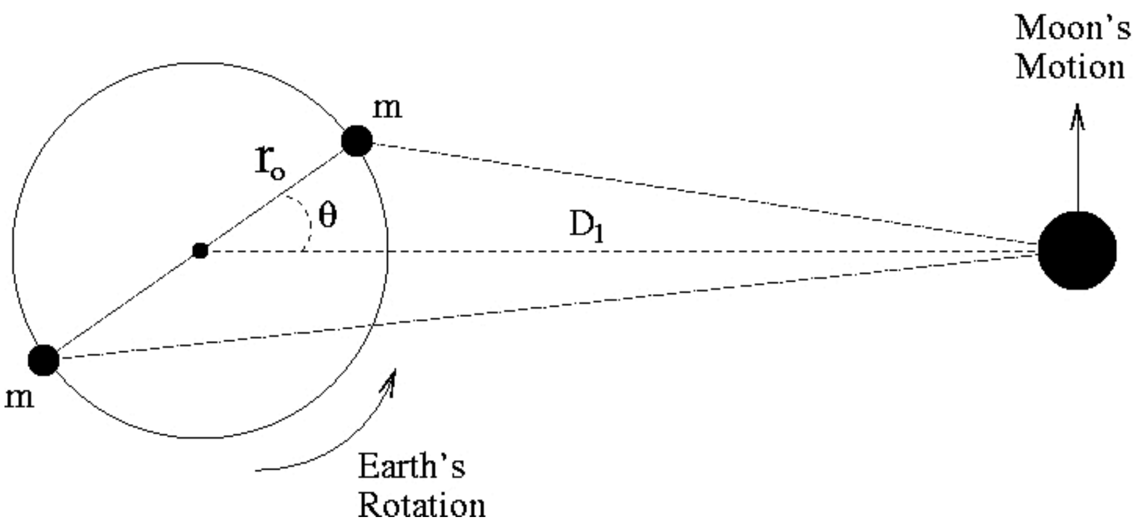


Figura 4. Diagrama para estimar o torque que actua na Lua devido aos bojos na Terra. O desenho não se encontra à escala.

3a	Determinar a grandeza da força produzida na Lua pela massa pontual que se encontra mais próxima, F_c.	0.4

3b	Determinar a grandeza da força produzida na Lua pela massa pontual que se encontra mais afastada, F_f.	0.4

É possível determinar agora os torques produzidos pelas massas pontuais.

3c	Determinar a grandeza do torque produzido pela massa pontual que se encontra mais próxima, τ_c.	0.4

3d	Determinar a grandeza do torque produzido pela massa pontual que se encontra mais afastada, τ_f.	0.4

3e	Determinar a grandeza do torque total produzido pelas duas massas, τ. Uma vez que $r_o << D_1$, aproximar a expressão obtida até a potência mais reduzida de r_o / D_1. Utilizar $(1+x)^a \approx 1+ax$, para $x<<1$.	1.0

3f	Calcular o valor numérico da grandeza do torque total, τ, tendo em conta que $\theta = 3^\circ$ e que $m = 3{,}6 \times 10^{16}$ kg (trata-se de uma massa da ordem de 10^{-8} vezes a massa da Terra).	0.5

Uma vez que o torque é a derivada do momento angular em ordem ao tempo, determinar o aumento da distância da Terra à Lua, por ano, actualmente. Neste passo, exprimir o momento angular da Lua em função apenas de M_M, M_E, D_1 e G.

3g	Determinar o aumento da distância da Terra à Lua, por ano, actualmente.	1.0

Finalmente, determinar o aumento da duração do dia, por ano.

3h	Determinar o decréscimo de ω_{E1} e o aumento da duração do dia, por ano.	1.0

4. Para onde está a energia a ir?

Em contraste com o momento angular, que é conservado, a energia total (rotacional mais gravitacional) do sistema não é conservada. Vai-se agora analisar este aspecto.

4a	Escrever uma equação para a energia total (rotacional mais gravitacional) do sistema Terra-Lua actualmente, E, em função apenas de I_E, ω_{E1}, M_M, M_E, D_1 e G.	0.4

4b	Obter uma equação para a variação de E, ΔE, em função das variações de D_1 e ω_{E1}. Determinar o valor numérico de ΔE para um ano, usando os valores das alterações em D_1 e ω_{E1} obtidos nas alíneas 3g e 3h.	0.4

Verificar que esta perda de energia é consistente com uma estimativa para a energia dissipada sob a forma de calor pelas marés produzidas pela Lua na Terra. Supor que o efeito das marés é elevar em média 0,5 m uma camada superficial de água de espessura h = 0,5 m que cobre toda a Terra (assumindo que toda a superfície da Terra está coberta por água, para simplificar). Isto ocorre duas vezes por dia. Assumir ainda que, quando a maré baixa, 10% desta energia gravitacional é dissipada sob a forma de calor devido à viscosidade. Considerar que a massa volúmica da água é $\rho_{water} = 10^3$ kg m^{-3} e que a aceleração da gravidade à superfície da Terra é $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

4c	Qual é a massa desta camada superficial de água?	0.2

4d	Quanta energia é dissipada por ano? Como se compara com a energia perdida por ano, actualmente, pelo sistema Terra-Lua?	0.3

Folha de Respostas

Problema Teórico No. 1

Evolução do Sistema Terra-Lua

1. **Conservação do momento angular.**

1a		0.2

1b		0.2

1c		0.3

2. **Distância e frequência angular finais do sistema Terra-Lua.**

2a		0.2

2b		0.5

2c		0.5

2d		0.5

2e		0.2

2f		0.2

2g		0.3

2h		0.3

2i		0.2

3. **Quanto é que a Lua se afasta por ano?**

3a		0.4

3b		0.4

3c		0.4

3d		0.4

3e		1.0

3f		0.5

3g		1.0

3h		1.0

4. Para onde é que a energia está a ir?

4a		0.4

4b		0.4

4c		0.2

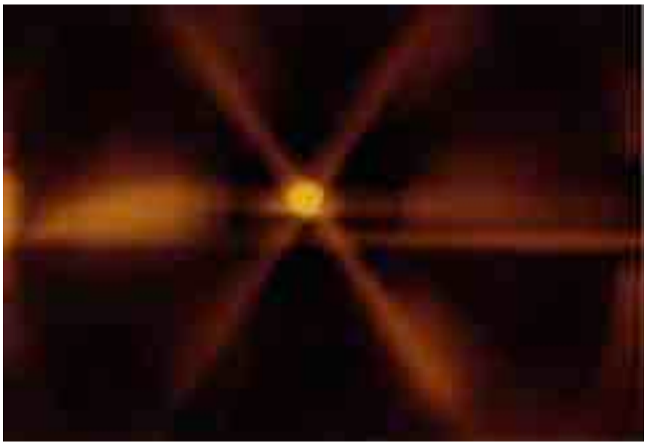
4d		0.3

Folha em Branco

PROBLEMA TEÓRICO Nº 2

ARREFECIMENTO A LASER POR EFEITO DOPPLER E MELAÇOS ÓPTICOS

O objectivo deste problema é desenvolver uma teoria simples para compreender o "arrefecimento a laser" e os "melaços ópticos". Estes termos aplicam-se ao arrefecimento de um feixe de átomos neutros, tipicamente átomos alcalinos, por feixes laser de frequências idênticas que se propagam em sentidos contrários. Parte do prémio Nobel em Física atribuído a S. Chu, W. Phillips e C. Cohen-Tannoudji em 1997 deveu-se a esta técnica.



A imagem mostra átomos de sódio (o ponto brilhante no centro) capturados na intersecção de três pares ortogonais de feixes laser. Os feixes em cada par propagam-se em sentidos opostos. A região onde os átomos são capturados designa-se por "melaço óptico", visto que a força óptica dissipativa se assemelha ao atrito viscoso sobre um corpo que se desloca em melaço.

Neste problema analisar-se-ão os fenómenos básicos da interacção entre um fotão incidente e um átomo e os fundamentos do mecanismo dissipativo a uma dimensão.

PARTE 1: FUNDAMENTOS DO ARREFECIMENTO A LASER

Considerar um átomo de massa m que se move na direcção $+x$ com velocidade v. Por uma questão de simplicidade, considerar-se-á que o problema é unidimensional, ignorando as direcções y e z (ver Figura 1). O átomo tem dois níveis de energia. A energia do nível mais baixo é zero e a energia do estado excitado é $\hbar\omega_0$, onde $\hbar = h/2\pi$. O átomo encontra-se inicialmente no estado de energia mais baixa. Faz-se incidir no atómo um feixe laser, de frequência ω_L no laboratório, dirigido na direcção $-x$. Na abordagem da mecânica quântica, o feixe laser é composto de um número elevado de fotões, cada um de energia $\hbar\omega_L$ e momento linear (quantidade de movimento) $-\hbar q$. Um fotão pode ser absrovido por um átomo e depois emitido espontaneamente; esta emissão ocorre com iguais probabilidades nas direcções $+x$ e $-x$. Uma vez que o átomo se move a velocidades não-relativísticas, $v/c << 1$ (sendo c a velocidade da luz), conservar apenas os termos até 1ª ordem nesta quantidade. Considerar também $\hbar q / mv << 1$, isto é, que o momento linear do átomo é muito superior ao momento linear de um único fotão. Nas respostas, conservar apenas as correcções lineares em cada uma das quantidades indicadas.

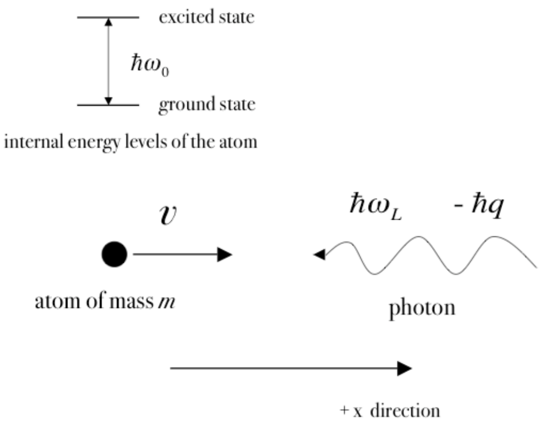


Fig.1 Diagrama de um átmo de massa m com velocidade v na direcção $+x$, colidindo com um fotão de energia $\hbar\omega_L$ e momento linear $-\hbar q$. O átomo tem dois estados que diferem $\hbar\omega_0$ em energia.

Assumir que a frequência do laser, ω_L, é ajustada de forma que, para o átomo em movimento, se encontra em ressonância com a transição atómica. Responder às seguintes questões:

1. Absorção.

1a	Escrever a condição de ressonância para a absorção do fotão.	0.2

1b	Escrever o momento linear do átomo p_{at} após a absorção, no referencial do laboratório.	0.2

1c	Escrever a energia total do átomo, ε_{at}, após a absorção, no referencial do laboratório.	0.2

2. Emissão espontânea do fotão na direcção $-x$.

Algum tempo depois da absorção do fotão incidente, o átomo pode emitir um fotão na direcção $-x$.

2a	Escrever a energia do fotão emitido, ε_{ph}, após o processo de emissão na direcção $-x$, no referencial do laboratório.	0.2

2b	Escrever o momento linear do fotão emitido, p_{ph}, após o processo de emissão na direcção $-x$, no referencial do laboratório.	0.2

2c	Escrever o momento linear do átomo, p_{at}, após o processo de emissão na direcção $-x$, no referencial do laboratório.	0.2

2d	Escrever a energia total do átomo, ε_{at}, após o processo de emissão na direcção $-x$, no referencial do laboratório.	0.2

3. Emissão espontânea de um fotão na direcção $+x$.

Algum tempo depois da absorção do fotão incidente, o átomo pode alternativamente emitir um fotão na direcção $+x$.

3a	Escrever a energia do fotão emitido, ε_{ph}, após o processo de emissão na direcção $+x$, no referencial do laboratório.	0.2

3b	Escrever o momento linear do fotão emitido, p_{ph}, após o processo de emissão na direcção $+x$, no referencial do laboratório.	0.2

3c	Escrever o momento linear do átomo, p_{at}, após o processo de emissão na direcção $+x$, no referencial do laboratório.	0.2

3d	Escrever a energia total do átomo, ε_{at}, após o processo de emissão na direcção $+x$, no referencial do laboratório.	0.2

4. Emissão média após a absorção.

A emissão espontânea de um fotão na direcção $-x$ ou $+x$ ocorre com a mesma probabilidade. Considerando este pressuposto, responder às questões seguintes.

4a	Escrever a energia média de um fotão emitido , ε_{ph}, após o processo de emissão.	0.2

4b	Escrever o momento linear médio do fotão emitido, p_{ph}, após o processo de emissão.	0.2

4c	Escrever a energia total média do átomo, ε_{at}, após o processo de emissão.	0.2

4d	Escrever o momento linear médio do átomo, p_{at}, após o processo de emissão.	0.2

5. Transferência de energia e de momento linear.

Assumindo um único processo completo de absorção-emissão de um fotão, tal como descrito anteriormente, existe uma transferência média de momento linear e de energia entre a radiação laser e o átomo.

5a	Escrever a variação média de energia do átomo, $\Delta\varepsilon$, após um processo completo de emissão-absorção de um fotão pelo átomo.	0.2

5b	Escrever a variação média de momento linear do átomo, Δp , após um processo completo de emissão-absorção de um fotão pelo átomo.	0.2

6. Transferência de energia e de momento linear por um feixe laser com direcção $+x$.

Considerar que um feixe laser de frequência ω_L' incide no átomo, na direcção $+x$, movendo-se o átomo também na direcção $+x$, com velocidade v. Assumindo a condição de ressonância entre a transição dos níveis atómicos e o feixe laser, no referencial do átomo, responder às questões seguintes:

6a	Escrever a variação média de energia do átomo, $\Delta\varepsilon$, após um processo completo de emissão-absorção de um fotão pelo átomo.	0.3

6b	Escrever a variação média de momento linear do átomo, Δp , após um processo completo de emissão-absorção de um fotão pelo átomo.	0.3

PARTE II: DISSIPAÇÃO E FUNDAMENTOS DE MELAÇOS ÓPTICOS

A Natureza impõe, contudo, uma incerteza inerente aos processos quânticos. Assim, o facto de um átomo poder emitir espontaneamente um fotão num tempo *finito* após a absorção implica que a condição de ressonância não tenha de ser obedecida *exactamente* tal como discutimos anteriormente. Isto é, as frequências dos feixes laser ω_L e ω_L' podem ter qualquer valor, ocorrendo ainda assim o processo de emissão-absorção. Tal acontecerá com probabilidade (quântica) diferente e, tal como seria de esperar, a probabilidade máxima ocorre para a condição de ressonância exacta. Em média, o tempo decorrido entre um processo único de absorção e emissão designa-se tempo de vida do estado excitado do átomo, para o qual se usa a notação Γ^{-1}.

Considerar um conjunto de N átomos *em repouso* no referencial do laboratório, sobre os quais incide um feixe laser de frequência ω_L. Os átomos absorvem e emitem continuamente, de forma que existem, em média, N_{exc} átomos no estado excitado (e, logo, $N - N_{exc}$ átomos no estado de energia mais baixa). Estas quantidades relacionam-se, de acordo com a mecânica quântica, pela relação:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

onde ω_0 é a frequência de ressonância da transição atómica e Ω_R se designa frequência de Rabi; Ω_R^2 é proporcional à *intensidade* do feixe laser. Tal como foi indicado anteriormente, verifica-se que esta quantidade é não nula mesmo se a frequência de ressonância ω_0 for diferente da frequência do laser ω_L. Uma forma alternativa de exprimir este resultado consiste em afirmar que o númeor de processos de emissão-absorção que ocorre por unidade de tempo é $N_{exc}\Gamma$.

Considerar a situação física esquematizada na figura 2, na qual dois feixes laser que se movem em direcções opostas, ambos com a *mesma*, mas *arbitrária*, frequência ω_L, incidem num gás de N átomos que se movem na direcção $+x$ com velocidade v.

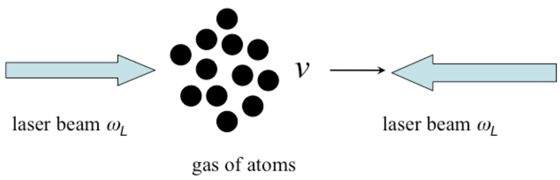


Figura 2. Dois feixes laser propagando-se em direcções opostas com a *mesma*, mas *arbitrária*, frequência ω_L incidem num gás de N átomos que se movem na direcção $+x$ com velocidade v.

7. Força exercida pelos lasers no feixe de átomos.

7a	Usando a informação obtida até agora, determinar a força que os lasers exercem no feixe de átomos. Assumir que $mv >> \hbar q$.	1.5

8. Limite de velocidades reduzidas.

Assumir agora que a velocidade dos átomos é suficientemente pequena para que seja possível desenvolver a força até potências de 1ª ordem em v .

8a	Obter uma expressão para a força obtida na alínea anterior, neste limite.	1.5

Com este resultado, é possível encontrar as condições para a radiação laser acelerar, travar, ou não ter qualquer efeito nos átomos.

8b	Escrever a condição para se obter uma força positiva (aceleração dos átomos).	0.25

8c	Escrever a condição para se obter uma força nula.	0.25

8d	Escrever a condição para se obter uma força negativa (travagem dos átomos).	0.25

8e	Considerar agora que os átomos se movem com velocidade $-v$ (na direcção $-x$). Escrever a condição para obter um força de travagem nos átomos.	0.25

9. Melaço óptico.

No caso de uma força negativa, obtém-se uma força de atrito dissipativo. Assumir que inicialmente, em $t = 0$, o gás de átomos tem velocidade v_0.

9a	No limite de baixas velocidade, determinar a velocidade dos átomos, um tempo τ após se ligarem os feixes laser.	1.5

9b	Assumir agora que os gás de átomos se encontra em equilíbrio térmico à temperatura T_0. Determinar a temperatura T um tempo τ após se ligarem os feixes laser.	0.5

Note-se que este modelo não permite a extrapolação até temperaturas arbitrariamente baixas.

Folha de Respostas

Problema Teórico No. 2

ARREFECIMENTO A LASER POR EFEITO DOPPLER E MELAÇOS ÓPTICOS

PARTE I: FUNDAMENTOS DO ARREFECIMENTO A LASER

1. Absorção.

1a		0.2

1b		0.2

1c		0.2

2. Emissão espontânea do fotão na direcção $-x$.

2a		0.2

2b		0.2

2c		0.2

2d		0.2

3. Emissão espontânea do fotão na direcção $+x$

3a		0.2

3b		0.2

3c		0.2

3d		0.2

4. Emissão média após a absorção

4a		0.2

4b		0.2

4c		0.2

4d		0.2

5. Transferência de energia e momento linear

5a		0.2

5b		0.2

6. Transferência de energia e momento por um feixe laser na direcção $+x$

6a		0.3

6b		0.3

PARTE II: DISSIPAÇÃO E FUNDAMENTOS DE MELAÇOS ÓPTICOS

7. Força dos lasers sobre o feixe atómico

7a		1.5

8. Limite de baixa velocidade

8a		1.5

8b		0.25

8c		0.25

8d		0.25

8e		0.25

9. Melaços ópticos

9a		1.5

9b		0.5

Folha em branco

PROBLEMA TEÓRICO No. 3

PORQUE SÃO AS ESTRELAS TÃO GRANDES?

As estrelas são esferas de gás quente. A maioria brilha porque no seu interior ocorre a fusão de hidrogénio em hélio. Neste problema serão utilizados conceitos da mecânica clássica e quântica, assim como da electrostática e da termodinâmica, para compreender porque há um tamanho mínimo para se dar esta fusão e também para obter o que seria a massa e o raio da menor estrela onde poderia ocorrer a fusão de hidrogénio.

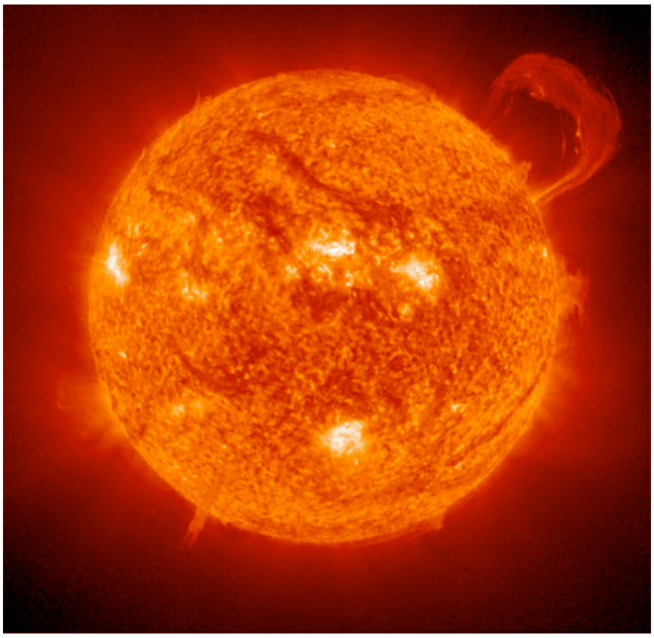


Figura 1. O nosso Sol, como a maioria das estrelas, brilha devido a uma fusão termonuclear de hidrogénio em hélio nas suas partes centrais.

CONSTANTES ÚTEIS

Constante de gravitação universal = $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^2

Constante de Boltzmann = $k = 1{,}4 \times 10^{-23}$ J K^{-1}

Constante de Planck = $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ m^2 kg s

Massa do protão = $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg

Massa do electrão = $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

Unidade de carga eléctrica = $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Constante eléctrica (permitividade do vácuo) = $\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

Raio do Sol = $R_S = 7{,}0 \times 10^8$ m

Massa do Sol = $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg

1. Uma estimativa clássica da temperatura no centro das estrelas.

Assumir que o gás que forma a estrela é hidrogénio puro ionizado (electrões e protões em quantidades iguais), e que se comporta como um gás perfeito. Do ponto de vista clássico, para fundir dois protões, estes têm de se aproximar pelo menos 10^{-15} m para que a força nuclear, de curto alcance, se torne dominante. Contudo, para os aproximar, é preciso vencer primeiro a força repulsiva de Coulomb. Começar por supor classicamente que os dois protões (que se consideram cargas pontuais) se movem em sentidos opostos, cada um com velocidade v_{rms} , a média geométrica (rms) das velocidades dos protões, colidindo frontalmente a uma dimensão.

1a	Qual deverá ser a temperatura do gás, T_c, para que a distância de maior aproximação dos protões, d_c, seja 10^{-15} m? Indicar este valor e todos os outros valores numéricos do problema com um máximo de dois algarismos significativos.	1.5

2. Mostrar que a estimativa anterior está errada.

Para verificar se a estimativa anterior da temperatura é razoável, é necessário fazer uma estimativa independente da temperatura no centro de uma estrela. A estrutura das estrelas é muito complicada, mas é possível compreender muitas coisas partindo de alguns pressupostos. As estrelas estão em equilíbrio, isto é, não se comprimem nem expandem, porque a força gravítica é compensada pela pressão (ver Figura 2). Para uma camada de gás, a equação de equilíbrio hidrostático a uma certa distância r do centro da estrela, é dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

onde P é a pressão do gás, G é a constante de gravitação universal, M_r é a massa da estrela dentro de uma esfera de raio r, e ρ_r é a densidade do gás na camada.

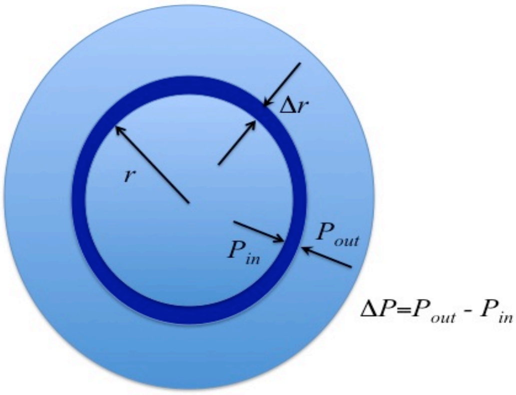


Figura 2. As estrelas estão em equilíbrio hidrostático, sendo a gravidade compensada pela diferença de pressão.

Uma estimativa da ordem de grandeza da temperatura da estrela pode ser obtida a partir de valores de parâmetros no centro e à superfície da estrela, se se fizerem as seguintes aproximações:

$\Delta P \approx P_o - P_c$,

onde P_c e P_o são as pressões no centro e à superfície da estrela, respectivamente. Como $P_c >> P_o$, pode-se assumir que

$\Delta P \approx -P_c$.

Usando a mesma aproximação, pode-se escrever

$\Delta r \approx R$,

onde R é o raio total da estrela, e

$M_r \approx M_R = M$,

em que M é a massa total da estrela.

A densidade pode ser aproximada pelo seu valor no centro,

$\rho_r \approx \rho_c$.

Pode-se considerar que a pressão é a de um gás ideal.

2a	Obter uma equação para a temperatura no centro, T_c, em função apenas do raio e da massa da estrela e de constantes físicas.	0.5

Pode-se usar a seguinte previsão deste modelo como critério para a sua validade:

2b	Usando a equação (2a) escrever a razão M/R apenas em função de constantes físicas e T_c.	0.5

2c	A partir do valor de T_c deduzido em (1a) , determinar o valor numérico de M/R esperado para uma estrela.	0.5

2d	Calcular agora a razão $M(Sol)/R(Sol)$, e mostrar que este valor é muito menor que o encontrado em (2c).	0.5

3. Uma estimativa quântica da temperatura no centro das estrelas.

A grande discrepância encontrada em (2d) sugere que a estimativa clássica para T_c obtida em (1a) não está correcta. A solução para esta discrepância encontra-se quando se consideram efeitos quânticos, tratando os protões como ondas tais que um protão isolado se encontra espalhado por uma região de dimensões comparáveis a λ_p, o comprimento de onda de de Broglie. Isto implica que, se d_c, a distância de maior aproximação dos protões for da ordem de λ_p, os protões se sobrepõem e podem mesmo fundir-se.

3a	Assumindo que $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ é a condição de fusão para um protão com velocidade v_{rms}, encontrar uma equação para T_c envolvendo apenas constantes físicas.	1.0

3b	Determinar o valor numérico de T_c obtido em (3a).	0.5

3c	Usando o valor de T_c determinado em (3b), calcular o valor numérico da razão M/R esperada para uma estrela a partir da fórmula derivada em (2b). Verificar que este valor é muito próximo da razão $M(Sol)/R(Sol)$.	0.5

De facto, estrelas na chamada *sequência principal* (aquelas onde se dá a fusão do hidrogénio) seguem aproximadamente esta razão para uma larga gama de massas.

4. A razão massa/raio das estrelas.

O acordo anterior sugere que o uso da mecânica quântica para estimar a temperatura no centro do Sol está correcta.

4a	A partir dos resultados anteriores, demonstrar que, para qualquer estrela onde se dê a fusão do hidrogénio a razão entre a massa M e o raio R é a mesma e depende apenas de constantes físicas. Encontrar esta equação para a razão M/R das estrelas onde há fusão de hidrogénio.	0.5

5. A massa e o raio da estrela mais pequena.

O resultado encontrado em (4a) sugere que podem existir estrelas de qualquer massa desde que seja satisfeita uma relação desse tipo; contudo, isto não é verdade.

O gás no interior das estrelas normais onde há fusão de hidrogénio comporta-se aproximadamente como um gás perfeito. Isto significa que d_e, a separação típica *entre electrões* é, em média, maior que λ_e, o seu comprimento de onda de de Broglie típico. Se estivessem mais próximos, os electrões estariam num estado degenerado e as estrelas comportar-se-iam de maneira diferente. É de salientar a distinção entre o tratamento dos protões e dos electrões dentro da estrela. Para os protões, as ondas de de Broglie devem sobrepor-se bastante enquanto estes colidem para que se dê a fusão, enquanto para os electrões as ondas de de Broglie não se devem sobrepor de modo a que estes permaneçam semelhantes a um gás perfeito.

A densidade das estrelas aumenta com a diminuição do raio. No entanto, para esta estimativa da ordem de grandeza, assuma-se que as estrelas têm densidade uniforme. Recordar também que $m_p >> m_e$.

5a	Obter uma equação para for n_e, a densidade média de electrões dentro da estrela.	0.5

5b	Encontrar uma equação para d_e, a separação típica entre electrões no interior da estrela.	0.5

5c	Utilizar a condição $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ para escrever uma equação para o raio da menor estrela normal possível. Considerar que a temperatura no centro da estrela é típica de todos os interiores estelares.	1.5

5d	Determinar o valor numérico do raio da menor estrela normal possível, em metros e em unidades de raio do Sol.	0.5

5e	Determinar o valor numérico da massa da menor estrela normal possível, em kg e em unidades de massa do Sol.	0.5

6. Fundindo núcleos de hélio em estrelas mais antigas.

Quando as estrelas são velhas, a maior parte do hidrogénio dos seus núcleos terá já fundido em hélio (He), e elas são forçadas a começar a fundir hélio em elementos mais pesados de modo a continuarem a brilhar. Um núcleo de hélio tem dois protões e dois neutrões, tendo por isso o dobro da carga e aproximadamente o quádruplo da massa de um protão. Atrás considerou-se que $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ era a condição para haver fusão dos protões.

6a	Encontrar a condição equivalente para os núcleos de hélio e determinar $v_{rms}(He)$, a média geométrica da velocidade dos núcleos de hélio, e $T(He)$, a temperatura requerida para a fusão do hélio.	0.5

Folha de Respostas

Problema Teórico No. 3

Porque são as estrelas tão grandes?

1) Uma estimativa clássica da temperatura no centro das estrelas

1a		1.5

2) Mostrar que a estimativa anterior está errada

2a		0.5

2b		0.5

2c		0.5

2d		0.5

3) Uma estimativa quântica da temperatura no centro das estrelas

3a		1.0

3b		0.5

3c		0.5

4) A razão massa/raio das estrelas

4a		0.5

5) A massa e o raio da estrela mais pequena

5a		0.5

5b		0.5

5c		1.5

5d		0.5

5e		0.5

6) Fundindo núcleos de hélio em estrelas mais antigas

6a		0.5

Folha em branco