1. Imagem de uma carga num objecto metálico

Introdução – Método das imagens

Uma carga pontual q é colocada na vizinhança de uma esfera metálica de raio R ligada à terra [ver Fig. 1(a)]. Em resultado da colocação da carga é induzida uma distribuição superficial de carga na esfera. O cálculo do campo eléctrico e do potencial a partir da distribuição de superficial de carga é uma tarefa extremamente difícil. No entanto, o cálculo pode ser consideravelmente simplificado se se recorrer ao método das imagens. Neste método, o campo eléctrico e o potencial gerados pela carga distribuída sobre a esfera são tratados como se resultassem não da distribuição superficial de carga mas apenas de uma única carga pontual q' colocada no interior da esfera (não é preciso demonstrar esta equivalência). Nota: **o campo eléctrico e o potencial desta carga q' apenas reproduzem o campo eléctrico e o potencial gerados pela distribuição superficial no exterior da esfera (incluindo a sua superfície).**

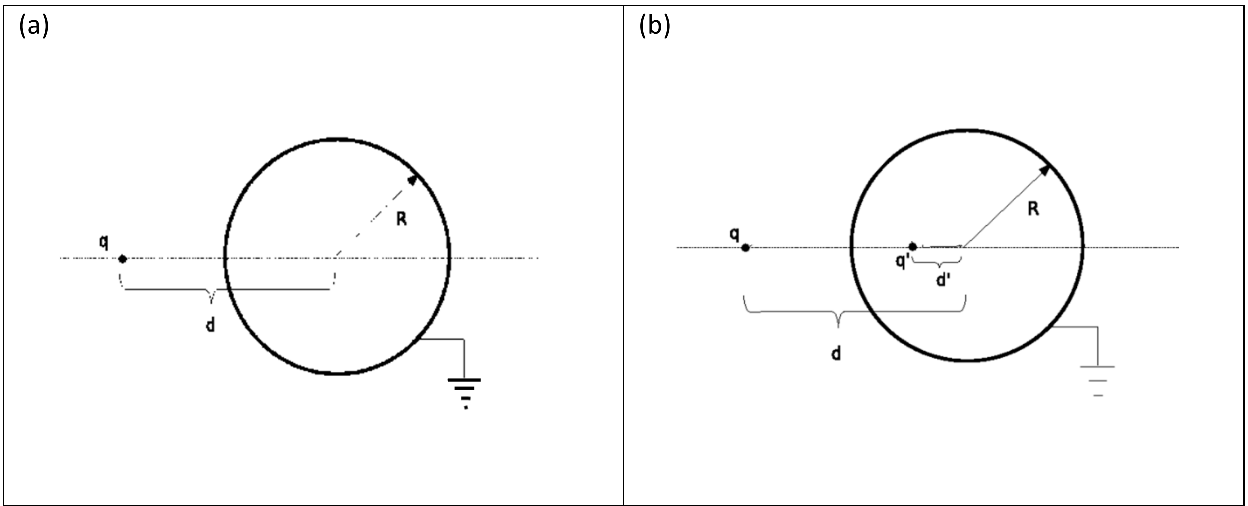

Fig 1. (a) Uma carga pontual q na vizinhança de uma esfera metálica ligada à terra. (b) O campo eléctrico da carga induzida na esfera pode ser representado como o campo eléctrico de uma carga imagem q'.

Tarefa 1 – A carga imagem

A simetria do problema impõe que a carga q' seja colocada na linha ligando a carga pontual q e o centro da esfera [ver Fig. 1(b)].

a) Qual é o valor do potencial na esfera? (0,3 pontos)
b) Exprimir q' e a distância d' da carga q' ao centro da esfera em função de q, d e R. (1,9 pontos)
c) Obter o módulo da força sobre a carga q. A força é repulsiva? (0,5 pontos)

Tarefa 2 – Blindagem de um campo electrostático

Considerar uma carga pontual q colocada a uma distância d do centro de uma esfera metálica de raio R que está ligada à terra. Estamos interessados em estudar a influência da esfera metálica no campo eléctrico no ponto *A*, do lado da esfera oposto à carga pontual (ver Fig. 2). O ponto *A* está sobre a linha que liga a carga *q* ao centro da esfera, a uma distância *r* da carga pontual *q*.

a) Determinar o vector campo eléctrico no ponto *A.* (0,6 pontos)
b) Para uma distância muito grande, $r >> d$, obter uma expressão para o campo eléctrico recorrendo à aproximação $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$, onde $a << 1$. (0,6 pontos)
c) Para que valor limite de *d* a esfera metálica blinda completamente o campo da carga *q*, tornando exactamente nulo o campo eléctrico no ponto *A*? (0,3 pontos)

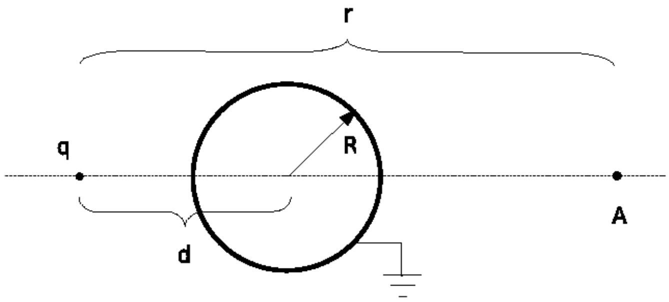

Fig 2. O campo eléctrico no ponto *A* é parcialmente blindado pela esfera metálica ligada à terra.

Tarefa 3 – Pequenas oscilações do campo eléctrico da esfera metálica ligada à terra

Uma carga pontual *q* de massa *m* está presa a uma extremidade de um fio de comprimento *L* cuja outra extremidade está presa a uma parede. A carga está na vizinhança de uma esfera metálica ligada à terra. Ignorar todos os efeitos electrostáticos da parede. A carga oscila como um pêndulo (ver Fig. 3). O ponto onde o fio está preso à parede está a uma distância *l* do centro da esfera. Supor que os efeitos da gravidade são desprezáveis.

a) Obter o módulo da força eléctrica sobre a carga *q* para um dado ângulo α e indicar a sua direcção e sentido num diagrama claro. (0,8 pontos)
b) Determinar a componente desta força na direcção perpendicular ao fio, em função de *l*, *L*, *R*, *q* e α. (0,8 pontos)
c) Calcular a frequência das pequenas oscilações do pêndulo. (1,0 pontos)

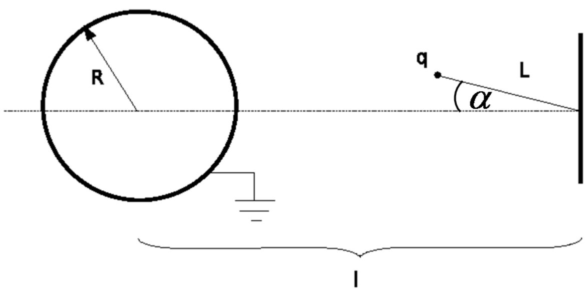

Fig 3. Uma carga pontual oscilando como um pêndulo na vizinhança de uma esfera metálica ligada à terra.

Tarefa 4 – A energia electrostática do sistema

É importante conhecer a energia electrostática de uma distribuição de cargas eléctricas. Neste problema (ver Fig. 1a) há uma interacção electrostática entre a carga externa *q* e as cargas induzidas na esfera, e também uma interacção electrostática entre as cargas induzidas na esfera. Determinar as seguintes energias electrostáticas em função da carga *q*, do raio da esfera *R* e da distância *d*:

a) energia electrostática de interacção entre a carga *q* e as cargas induzidas na esfera; (1,0 pontos)
b) energia electrostática de interacção entre as cargas induzidas na esfera; (1,2 pontos)
c) energia electrostática de interacção total do sistema. (1,0 pontos)

Sugestão

Há várias maneiras de resolver este problema:

(1) Numa delas, pode usar o seguinte integral,

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{\left(x^2 - R^2\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

(2) Noutra, pode recorrer à expressão da energia electrostática de um conjunto de *N* cargas q_i localizadas nos pontos $\vec{r}_i$, com $i = 1, \ldots, N$, como uma soma das contribuições de todos os pares de cargas

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}.$$

Imagem de uma carga – Folhas de Resposta

Country code	Student code

Importante: deixar a coluna «Pontos» em branco para os correctores!

Tarefa 1		Pontos
a)		
b)		
c)		
	Sim **Não**	

A Folhas de Resposta – Prova Teórica 1 – Imagem de uma carga

Country code	Student code

Tarefa 2		Pontos
a)		
b)		
c)		
Tarefa 3		**Pontos**
a)		
b)		
c)		

A Folhas de Resposta – Prova Teórica 1 – Imagem de uma carga

Country code	Student code

Tarefa 4		Pontos
a)		
b)		
c)		
Total:		

2. Física das chaminés

Introdução

Gases de combustão (fumos) são libertados para a atmosfera, que se encontra à temperatura T_{Ar}, através de uma chaminé de secção transversal *A* e altura *h* (ver Fig. 1). O combustível é queimado numa fornalha que se encontra à temperatura T_{fumo}. O volume de gases produzidos por unidade de tempo na fornalha é *B*.

Considerar que:

- A velocidade dos gases na fornalha é desprezável
- A densidade dos gases (fumo) é igual à do ar à mesma pressão e temperatura; na fornalha, os gases podem ser considerados ideais
- A pressão do ar varia com a altura de acordo com a lei da hidrostática; a variação da densidade do ar com a altura é desprezável
- O escoamento dos gases obedece à equação de Bernoulli que diz que a seguinte quantidade se conserva:

  $$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = const\,,$$

  onde ρ representa a densidade do gás, *v(z)* a sua velocidade de escoamento, *p(z)* a pressão e z a altura acima do ponto de referência
- A variação da densidade dos gases ao longo da chaminé é desprezável

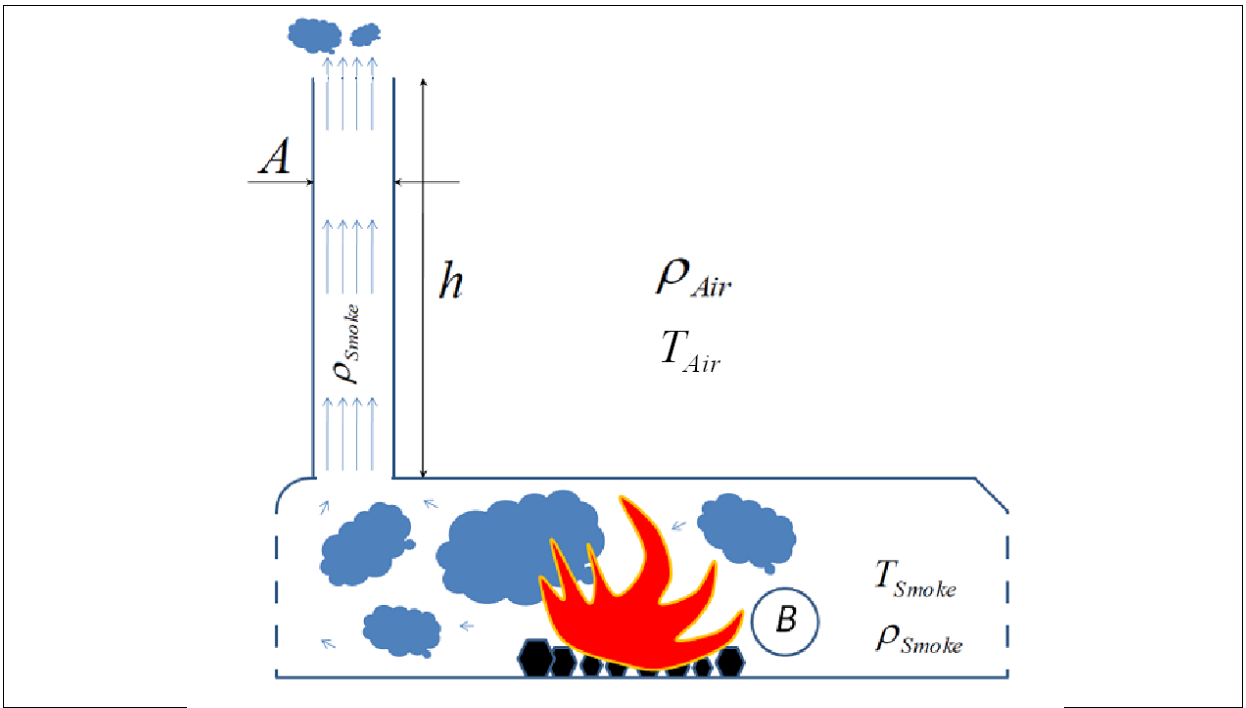

Fig 1. Esquema de uma chaminé de altura *h* com uma fornalha a uma temperatura T_{fumo}.

Tarefa 1

a) Calcular a altura mínima da chaminé de forma a que esta trabalhe eficientemente, i.e., permita o escape para a atmosfera de todos os gases produzidos na combustão. Expressar o resultado em função de B, A, T_{Ar} , g (9,81 m/s^2), $\Delta T = T_{fumo} - T_{Ar}$. **Importante: em todas as tarefas que se seguem, assumir que esta altura mínima é de facto a altura da chaminé.** (3,5 pontos)

b) Considerar que duas chaminés foram construídas exactamente com o mesmo objectivo. Considerar que ambas possuem a mesma secção transversal mas que foram desenhadas para funcionar em diferentes regiões da Terra: uma em regiões frias, com temperaturas médias da atmosfera de -30 ^{o}C, e outra para regiões quentes desenhada para trabalhar a temperaturas médias da atmosfera de +30 ^{o}C . Considerar ainda que a temperatura da fornalha de ambas as chaminés é de 400 ^{o}C. Sabendo que a altura da chaminé desenhada para trabalhar nas regiões frias foi estimada em 100 m, calcular a altura da outra chaminé. (0,5 pontos)

c) Como varia a velocidade dos gases ao longo da chaminé? Esboçar um gráfico desta variação assumindo que a secção transversal da chaminé não varia ao longo da sua altura. Indicar, no gráfico, o ponto de entrada dos gases na chaminé. (0,6 pontos)

a) Como varia a pressão dos gases ao longo da altura da chaminé? (0,5 pontos)

Chaminé solar

O escoamento de gases numa chaminé pode ser utilizado para construir um tipo particular de central solar, designada por “chaminé solar”. A ideia encontra-se representada na Fig. 2. O Sol aquece o ar debaixo de um colector, de área *S*, que possui uma abertura na periferia que permite a entrada de ar (Fig. 2). À medida que o ar quente sobe pela chaminé (representado pelas setas pequenas a cheio), novo ar frio (representado pelas setas a tracejado) entra pela periferia do colector, proveniente do meio ambiente que o rodeia, permitindo assim um fluxo contínuo de ar através da chaminé solar. O escoamento do ar através da chaminé permite alimentar uma turbina, resultando na produção de energia eléctrica. Considerar que a energia solar colectada por unidade de tempo e por unidade de área horizontal do colector é dada por *G*. Assumir ainda que toda essa energia pode ser usada para aquecer o ar no colector (considerar que a capacidade calorífica do ar é igual a c e que se pode desprezar a sua dependência da temperatura). A eficiência da chaminé solar é definida como a razão entre a energia cinética associada ao escoamento do gás e a energia solar absorvida no aquecimento do ar (antes da sua entrada na chaminé).

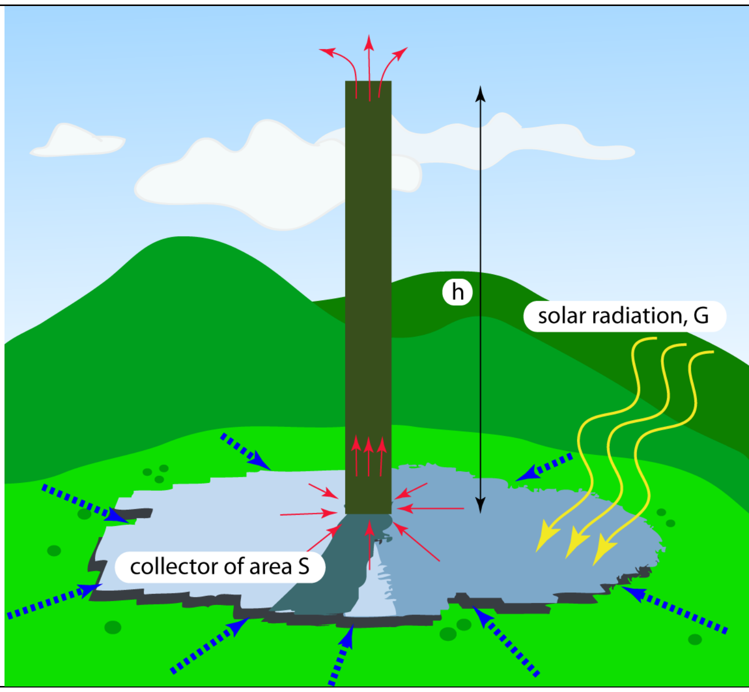

Fig 2. Esquema de uma chaminé solar.

Tarefa 2

a) Calcular a eficiência da chaminé solar. (2,0 pontos)

b) Representar, num diagrama, a variação da eficiência da chaminé em função da sua altura. (0,4 pontos)

Protótipo de Manzanares

O protótipo da chaminé solar construído em Manzanares, Espanha, tem uma altura de 195 m e um raio de 5 m. O colector é circular e possui um diâmetro de 244 m. Considerar que a capacidade calorífica do ar, em condições normais de funcionamento do protótipo, é igual a 1012 J/(kg·K), que a densidade do ar quente é aproximadamente igual a 0,9 kg/m^3 e que a temperatura típica da atmosfera é igual a T_{Ar}=295 K. Em Manzanares, a potência solar por unidade de área horizontal é tipicamente igual a 150 W/m^2 num dia de sol sem nuvens.

Tarefa 3

a) Calcular a eficiência da chaminé do protótipo de Manzanares. Obter uma estimativa numérica. (0,3 pontos)

b) Calcular a potência que pode ser produzida no protótipo de Manzanares. (0,4 pontos)

c) Calcular a energia que poderia ser produzida num dia de sol sem nuvens. (0,3 pontos)

Tarefa 4

a) Calcular o aumento da temperatura do ar desde que este entra na periferia do colector (ar frio) até à sua entrada na chaminé (ar quente): escrever a fórmula geral e obter o valor para o protótipo de Manzanares. (1,0 pontos)

b) Calcular a massa de ar escoada, por unidade de tempo, através do sistema. (0,5 pontos)

Física das chaminés – Folhas de Resposta

Country code	Student code

Importante: deixe a coluna "Pontos" em branco para os correctores!

Tarefa 1		Pontos
a)		
b)		
c)		
d)		

Country code	Student code

Tarefa 2		Pontos
a)		
b)		
Tarefa 3		**Pontos**
a)		
b)		
c)		

Folhas de Resposta – Prova Teórica 2 – Física das chaminés

Country code	Student code

Tarefa 4		Pontos
a)		
b)		
Total:		

3. Modelo simples de um núcleo atómico

Introdução

Apesar de os núcleos atómicos serem objectos quânticos, várias leis fenomenológicas associadas às suas propriedades fundamentais (como o raio ou energia de ligação) podem ser deduzidas a partir de princípios simples: (i) os núcleos são constituídos por nucleões (i.e., protões e neutrões): (ii) a interacção nuclear forte que mantém estes nucleões ligados possui alcance muito curto (actua unicamente entre nucleões vizinhos); (iii) o número de protões (Z) num dado núcleo é aproximadamente igual ao número de neutrões (N), i.e., $Z \approx N \approx A/2$ em que A é o número total de nucleões (A>>1). **Importante: use estes princípios fundamentais na execução das Tarefas 1 a 4 descritas abaixo.**

Tarefa 1 - O núcleo atómico como um sistema densamente empacotado de nucleões

Num modelo simples, um núcleo atómico pode ser considerado como uma bola de nucleões densamente empacotados [ver Fig. 1(a)], onde os nucleões são considerados como esferas rígidas de raio r_N=0.85 fm (1 fm = 10^{-15} m). A força nuclear existe apenas quando dois nucleões se encontram em contacto. O volume do núcleo, V, é maior que o volume de todos os nucleões AV_N, em que $V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi$. A razão $f = AV_N / V$ é designada por fracção de empacotamento e corresponde à percentagem de espaço do núcleo ocupado por matéria nuclear.

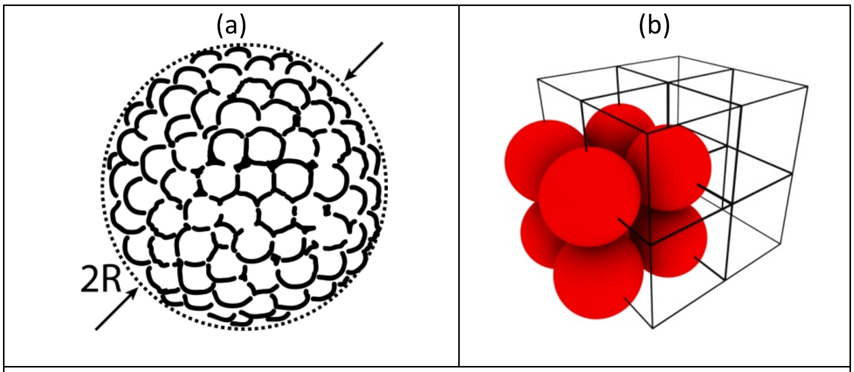

Fig. 1. (a) Um núcleo atómico representado como uma bola de nucleões densamente empacotados. (b) O empacotamento CS.

a) Calcular a fracção de empacotamento, f, se os nucleões estiverem dispostos num sistema "cúbico simples" (CS), representado na Fig. 1(b). (0,3 pontos)

Importante: na realização das Tarefas seguintes, assumir que a fracção de empacotamento dos núcleos é igual ao obtido na Tarefa 1a. Se não foi capaz de calcular esse factor, assuma que o valor é f=1/2.

b) Estimar o valor médio da densidade de massa ρ_m, densidade de carga ρ_c e o raio R de um núcleo com A nucleões. O valor média da massa de um nucleão é igual a $1{,}67\times10^{-27}$kg. (1,0 pontos)

Tarefa 2 - Energia de ligação de um núcleo atómico: contribuições volúmicas e superficiais

A energia de ligação de um núcleo é a energia necessária para desagregar o núcleo no conjunto dos seus nucleões constituintes e tem origem essencialmente na força atractiva entre cada nucleão e os seus vizinhos. Se um dado nucleão não se encontrar à superfície do núcleo, contribui para a energia total de ligação com a_V=15,8 MeV (1 MeV=$1{,}602\times10^{-13}$ J), enquanto um nucleão à superfície contribui com aproximadamente $a_V/2$. Exprimir a energia de ligação, E_b, de um núcleo com A nucleões, em função de A, a_V e f, incluindo ainda a correcção proveniente dos nucleões que se encontram à superfície. (1,9 pontos)

Tarefa 3 - Correção electrostática (Coulombiana) para a energia de ligação

A energia electrostática de uma esfera uniformemente carregada (com raio R e carga total Q_0) é $U_c = \dfrac{3Q_0^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$, onde $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{C}^2N^{-1}m^{-2}$.

a) Utilizar esta fórmula para calcular a energia electrostática de um núcleo. Num núcleo, um protão não actua sobre si próprio (através da força de Coulomb) mas apenas sobre os outros protões. Este facto pode ser tido em conta substituindo, na fórmula acima, Z^2 por $Z(Z-1)$. Utilize esta correcção nas Tarefas seguintes. (0,4 pontos).

b) Escrever a fórmula completa para a energia de ligação de um núcleo, incluindo o termo dominante (volume), a correcção associada aos nucleões superficiais e a correcção electrostática obtida atrás. (0,3 pontos)

Tarefa 4 – Cisão de núcleos pesados

A cisão é um processo nuclear em que um núcleo se divide (cinde) em partes mais pequenas (núcleos mais leves). Supor que um núcleo com A nucleões se divide em dois núcleos mais pequenos e iguais, como se representa na Fig. 2.

a) Calcular a energia cinética total (E_{kin}) dos produtos de cisão quando os centros dos dois núcleos mais leves se encontram separados por uma distância $d \geq 2R(A/2)$, em que $R(A/2)$ é o seu raio. Considerar que o núcleo pesado se encontrava em repouso quando se deu a cisão. (1,3 pontos)

b) Assumir que $d = 2R(A/2)$ e avaliar a expressão para E_{kin} obtida na alínea a) para A=100, 150, 200 e 250. Exprimir os resultados em MeV. Estimar os valores de A para os quais a cisão é possível, de acordo com o modelo acima referido. (1,0 pontos)

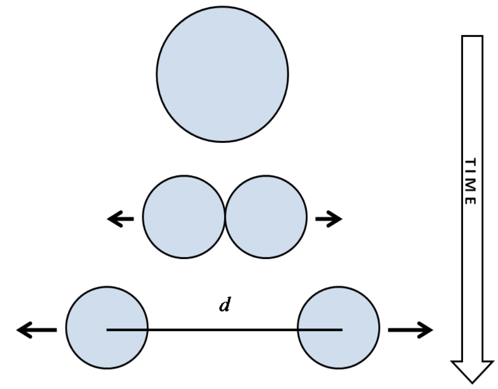

Fig. 2. Descrição esquemática do processo de cisão nuclear no modelo utilizado.

Tarefa 5 – Reacções nucleares de transferência

a) Na Física Moderna, as energias dos núcleos e das suas reacções são descritas em termos de massas. Por exemplo, se um núcleo (em repouso) estiver num estado excitado com energia E_{exc} acima do estado fundamental, a sua massa é dada por $m = m_0 + E_{exc}/c^2$, onde m_0 é a massa em repouso do núcleo no estado fundamental. A reacção nuclear ${}^{16}\mathrm{O}+{}^{54}\mathrm{Fe}\rightarrow{}^{12}\mathrm{C}+{}^{58}\mathrm{Ni}$ é um exemplo de uma reacção nuclear dita "de transferência", na qual parte de um núcleo (o "agregado") é transferida para outro (ver Fig. 3). No nosso exemplo a parte transferida é um agregado ^{4}He (uma partícula alfa). A reacção de transferência ocorre com máxima probabilidade se a velocidade do produto de reacção que sai "projectado" (no caso em discussão: ^{12}C) for igual tanto em magnitude como em direcção à velocidade do núcleo incidente (no caso em discussão: ^{16}O). O alvo (^{54}Fe) encontra-se inicialmente em repouso. Na reacção, ^{58}Ni é excitado para um estado de energia mais elevada. Encontrar a energia de excitação desse estado (e exprimir o resultado em MeV) se a energia cinética do núcleo incidente (^{16}O) for igual a 50 MeV. Considerar a velocidade da luz igual a c=3x10^{8}m/s. (2,2 pontos).

1.	M(^{16}O)	15,99491 u.m.a.
2.	M(^{54}Fe)	53,93962 u.m.a
3.	M(^{12}C)	12,00000 u.m.a.
4.	M(^{58}Ni)	57,93535 u.m.a.

Tabela 1. Massa em repouso dos núcleos envolvidos, nos respectivos estados fundamentais. 1 u.m.a.= 1,6605·10^{-27} kg.

b) O núcleo ^{58}Ni produzido no estado excitado discutido na alínea a), decai para o seu estado fundamental emitindo um fotão na direcção do seu movimento. Considerar este decaimento no sistema de referência em que o ^{58}Ni está em repouso para determinar a sua energia de recuo (i.e., a energia cinética adquirida pelo ^{58}Ni depois da emissão do fotão). Calcular a energia do fotão nesse sistema. Calcular ainda a energia do fotão no sistema de referência do laboratório (i.e., qual seria a energia do fotão medida num detector que se encontra na direcção de voo do núcleo de ^{58}Ni)? (1,6 pontos)

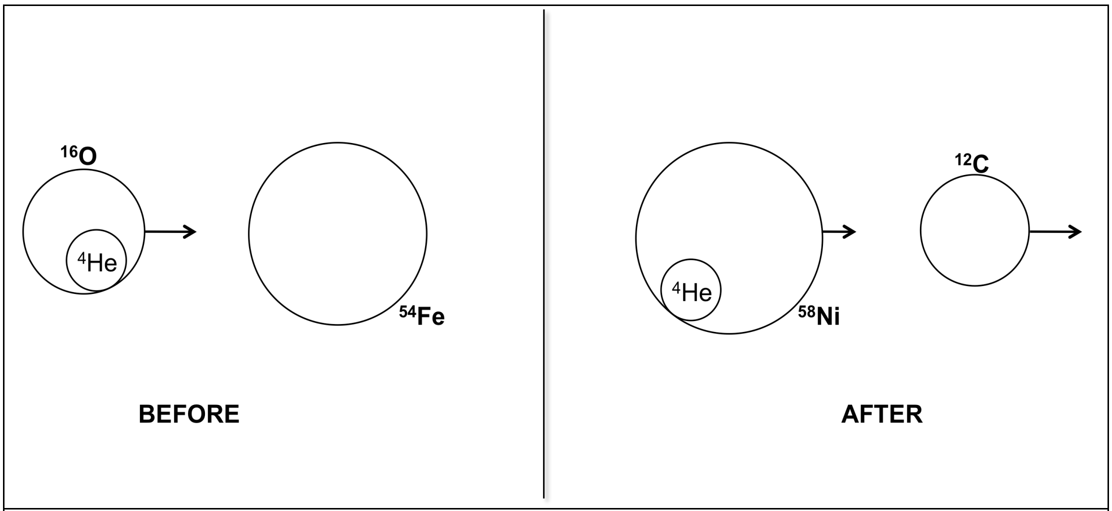

Fig. 3. Esquema de uma reacção nuclear de transferência.

Modelo simples do núcleo atómico – Folhas de Resposta

Country code	Student code

Importante: deixe a coluna «Pontos» em branco para os correctores!

Tarefa 1		Pontos
a)		
b)	$\rho_m =$	
	$\rho_c =$	
	$R =$	

Tarefa 2		Pontos

Country code	Student code

Tarefa 3		Pontos
a)		
b)		

Tarefa 4		Pontos
a)		
b)	$E_{kin}(A=100)=$ $E_{kin}(A=150)=$ $E_{kin}(A=200)=$ $E_{kin}(A=250)=$ Condição necessária para a cisão:	

Country code	Student code

Tarefa 5		Pontos
a)		
b)	$E_\gamma =$	
	$E_{\text{recoil}} =$	
	$E_{\text{detector}} =$	
Total:		