



42^a Olimpíada Internacional de Física
Bangkok, Tailândia
Prova Teórica
Terça-feira, 12 de Julho de 2011

Por favor, ler estas instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova teórica é de 5 horas. Há 3 questões, valendo **10 pontos** cada uma.
2. Utilizar apenas a caneta fornecida.
3. Utilizar apenas o lado da frente das folhas.
4. Transcrever sempre para a **Folha de Respostas** o sumário dos resultados que obteve. Os resultados numéricos devem ser escritos com o número de algarismos significativos requerido pelos dados do problema. *Não esquecer de indicar as unidades.*
5. Serão também fornecidas **folhas de papel em branco** onde deve apresentar as resoluções detalhadas. Escrever nestas folhas tudo o que considerar relevante para a resolução da questão e desejar que seja classificado. Por favor, utilizar *o mínimo de texto*; deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, símbolos, figuras e gráficos.
6. É absolutamente imperioso preencher as caixas no topo de cada folha de papel que utilizar com o seu código de estudante (**Student Code**). Adicionalmente, nas folhas em branco utilizadas em cada questão, deve indicar o número de problema (**Problem No.**), o número da tarefa (**Task No.**). Deve ainda numerar estas folhas e indicar em cada uma, além do seu número de página (**Page No.**), o número total de folhas usadas que deseja ver classificadas (**Total No. of pages**). Se usar folhas de rascunho que não deseje que sejam corrigidas, não as destrua: marque-as com uma grande cruz sobre a folha e não as inclua na sua numeração.
7. No final da prova, ordenar as folhas de cada problema *pela seguinte ordem*:
 - folha de respostas,
 - folhas utilizadas (ordenadas),
 - folhas de rascunho,
 - folhas não utilizadas e
 - enunciado da prova.

Colocar depois os conjuntos de folhas por ordem de questão e pôr no envelope fornecido. Deixe tudo sobre a mesa. *Não é permitido retirar da sala quaisquer folhas de papel.*

1. Um problema de 3 corpos e o sistema LISA

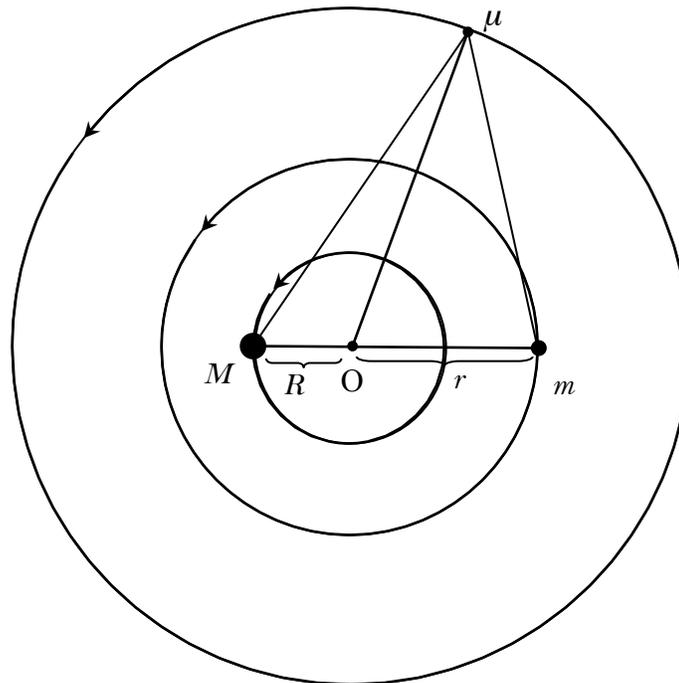


FIGURA 1: Órbitas coplanares de três corpos.

- 1.1 Duas massas M e m gravitam uma em torno da outra descrevendo órbitas circulares de raios R e r , respectivamente, em torno do seu centro de massa. Determinar a velocidade angular ω_0 da linha que une M e m e escrevê-la em função de R , r , M , m e da constante gravitacional universal G .

[1,5 pontos]

- 1.2 Um terceiro corpo de massa infinitesimal μ é colocado numa órbita circular em torno do mesmo centro de massa. Esta órbita é coplanar com as anteriores e é tal que o corpo de massa μ permanece estacionário relativamente a M e m , como se pode ver na Figura 1. Assumir que o vector posição da massa infinitesimal não é colinear com os vectores posição das outras duas massas. Determinar os valores dos seguintes parâmetros em função de R e r :

- 1.2.1 A distância entre μ e M .
- 1.2.2 A distância entre μ e m .
- 1.2.3 A distância de μ ao centro de massa.

[3,5 pontos]

- 1.3 Considerar o caso em que $M = m$. Se o corpo de massa μ for ligeiramente perturbado na direção radial ($O\mu$), qual a frequência angular da oscilação do corpo em torno da sua posição não perturbada? Escrever a resposta em função de ω_0 , assumindo que o momento angular do corpo de massa μ é conservando.

[3,2 pontos]

A Antena Espacial por Interferometria Laser (Laser Interferometry Space Antenna – LISA) é um sistema de detecção de ondas gravitacionais de baixa frequência composto por três veículos espaciais idênticos. Cada um dos veículos é colocado nos vértices de um triângulo equilátero (ver Figuras 2 e 3). Os lados do triângulo (os “braços” do sistema LISA) têm cerca de 5,0 milhões de quilômetros de comprimento. A constelação LISA orbita como um todo em torno do Sol numa órbita idêntica à da Terra, estando atrasada 20° em relação a esta. Cada um dos veículos, individualmente, move-se numa órbita ligeiramente inclinada em relação ao plano da eclíptica. Na prática, o conjunto dos três veículos parece rodar em torno do seu centro de massa uma revolução por ano.

Os três elementos da constelação LISA transmitem continuamente sinais Laser entre si. As ondas gravitacionais são identificadas detectando, por interferometria, pequenas alterações dos comprimentos dos braços. Estas ondas são geradas, por exemplo, quando dois objectos de grande massa, como os buracos negros, colidem em galáxias próximas.

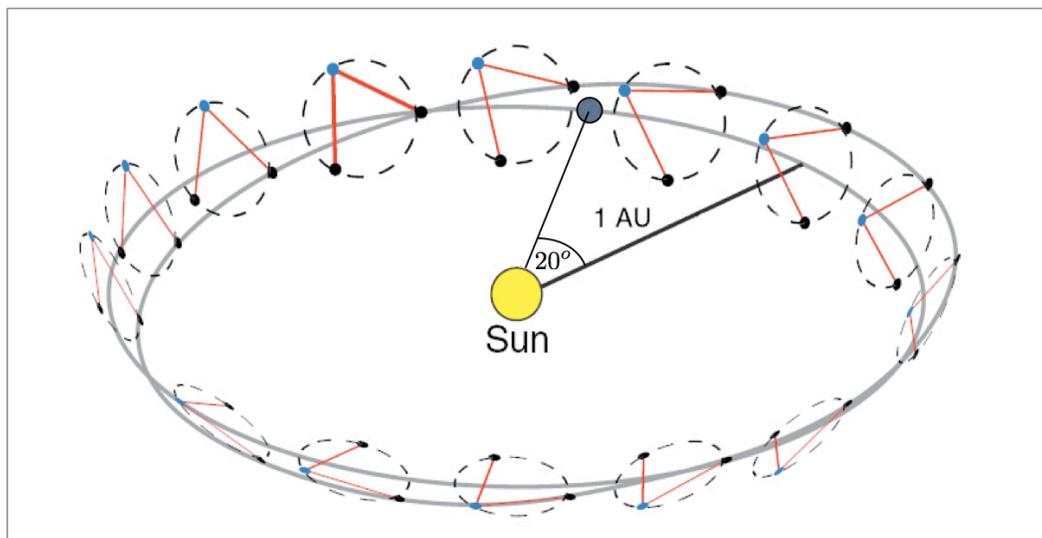


FIGURA 2: Ilustração da órbita do sistema LISA. Os três veículos espaciais rodam em torno do seu centro de massa com período igual a 1 ano. Inicialmente eles estão atrasados 20° em relação à Terra. (Figura extraída de D. A. Shaddock, “An overview of the Laser Interferometer Space Antenna”, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, pp. 128-132.)

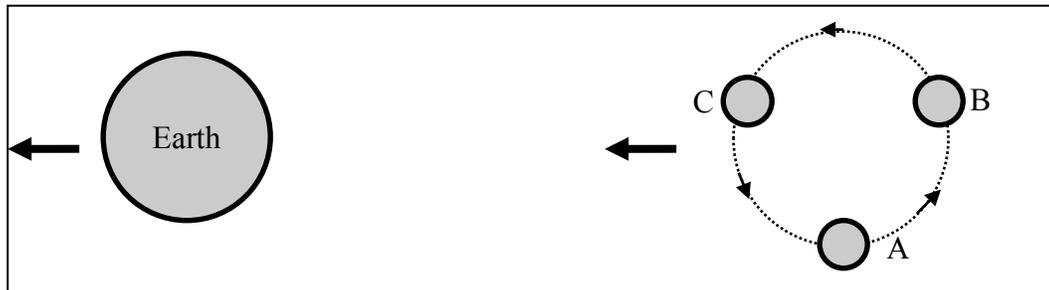


FIGURA 3: Vista ampliada do sistema LISA. A, B e C são os três veículos nos vértices de um triângulo equilátero.

- 1.4 No plano contendo os três veículos, qual é a velocidade de um deles em relação a um dos outros?

[1,8 pontos]

Student Code -



FOLHA DE RESPOSTAS

1.1 $\omega_0 =$

1.2
1.2.1 A distância entre μ e M é

1.2.2 A distância entre μ e m é

1.2.3 A distância de μ ao centro de massa é

1.3 A frequência angular de μ é

1.4 A velocidade relativa de dois veículos espaciais é

2. Uma bolha de sabão electrificada

Uma bolha de sabão esférica que contém, no seu interior, ar de densidade ρ_i , temperatura T_i e raio R_0 , está mergulhada em ar com densidade ρ_a , à pressão atmosférica P_a e temperatura T_a . A película de sabão tem tensão superficial γ , densidade ρ_s e espessura t . A massa e a tensão superficial do sabão não dependem da temperatura. Assumir que $R_0 \gg t$.

A energia dE que é necessário fornecer a uma interface sabão-ar para aumentar a sua área em dA é $dE = \gamma dA$, onde γ é a tensão superficial da interface.

2.1 Calcular a razão $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ em função de γ , P_a e R_0 .

[1,7 pontos]

2.2 Calcular o valor numérico de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ usando $\gamma = 0,0250$ N/m, $R_0 = 1,00$ cm e $P_a = 1,013 \times 10^5$ N/m².

[0,4 pontos]

2.3 Inicialmente, a bolha contém ar a uma temperatura superior à do ar exterior. Encontrar o valor mínimo de T_i de modo a que a bolha flutue no ar (desprezar o movimento do ar). Usar $T_a = 300$ K, $\rho_s = 1000$ kg m⁻³, $\rho_a = 1,30$ kg m⁻³, $t = 100$ nm e $g = 9,80$ m s⁻².

[2,0 pontos]

Algum tempo após a bolha estar formada, esta estará em equilíbrio térmico com o meio envolvente e, naturalmente, começará a cair na direcção do solo.

2.4 Encontrar a velocidade mínima u de uma corrente de ar ascendente que manterá a bolha a flutuar quando em equilíbrio térmico. Exprimir a resposta em função de ρ_s , R_0 , g , t e do coeficiente de viscosidade do ar η . Assumir que a velocidade é pequena de modo que a lei de Stokes pode ser aplicada. Ignorar qualquer alteração do raio da bolha durante o tempo que a bolha leva a atingir o equilíbrio térmico. A força de atrito viscoso, de acordo com a lei de Stokes, é $F = 6\pi\eta R_0 u$.

[1,6 pontos]

2.5 Calcular o valor numérico de u para $\eta = 1,8 \times 10^{-5}$ Kg m⁻¹ s⁻¹.

[0,4 pontos]

Os cálculos anteriores sugerem que os termos envolvendo a tensão superficial γ praticamente não contribuem para o resultado final. Em todas as questões seguintes, pode desprezar estes termos.

2.6 Considerar que a bolha é agora uniformemente carregada com uma carga total q . Obter uma equação que relacione o novo raio R_1 com R_0 , P_a , q e a permitividade eléctrica do vazio, ϵ_0 .

[2,0 pontos]

2.7 Assumindo que a carga total não é demasiado grande (isto é, $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) e que o raio da bolha aumenta muito pouco, determinar ΔR , com $R_1 = R_0 + \Delta R$. Recordar que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$.

[0,7 pontos]

2.8 Qual é o valor da carga q em função de t , ρ_a , ρ_s , ϵ_0 , R_0 e P_a para que a bolha fique a flutuar em repouso em ar estacionário. Calcular também o valor numérico de q . A permitividade eléctrica do vazio é $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m.

[1,2 pontos]

Student Code -



FOLHA DE RESPOSTAS

2.1 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} =$

2.2 O valor numérico de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ é

2.3 O valor mínimo de T_i é

2.4 A velocidade mínima u é

2.5 O valor numérico de u é

2.6 Uma equação para R é

2.7 ΔR é dado por

Student Code -



2.8 A expressão para $q_é$

O valor numérico de $q_é$

**3. Em comemoração do Centenário do Núcleo Atômico de Rutherford:
a difusão de um ião por um átomo neutro**

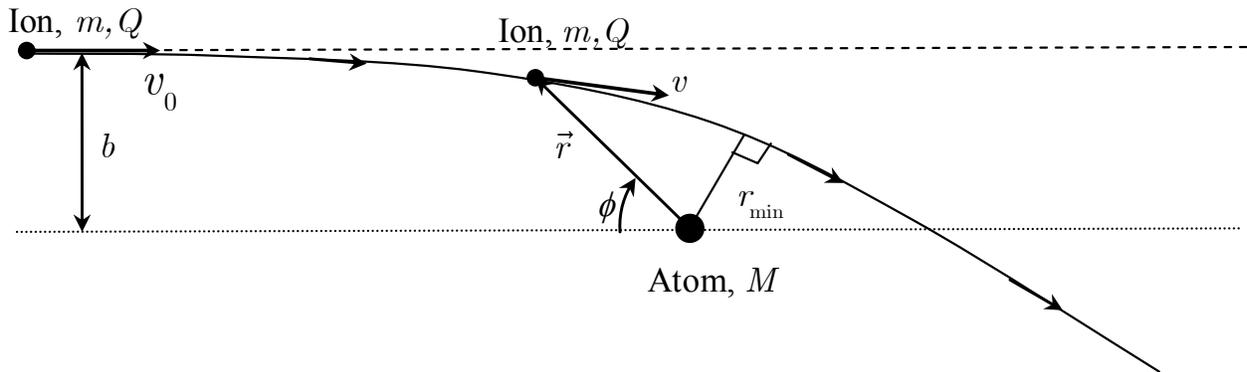


FIGURA 1

Um ião de massa m e carga Q é disparado de muito longe de modo a passar próximo de um átomo neutro de massa $M \gg m$ e polarizabilidade eléctrica α . A velocidade inicial do ião é v_0 e é não-relativista. O parâmetro de impacto é b , tal como se pode ver na Figura 1.

À medida que se desloca, o ião induz instantaneamente no átomo um momento dipolar eléctrico $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, em que \vec{E} é o campo eléctrico criado pelo ião no local em que o átomo se encontra nesse instante. As perdas radiativas neste problema são desprezáveis.

3.1 Calcular o campo eléctrico \vec{E}_p criado por um dipolo eléctrico ideal \vec{p} num ponto à distância r de O na direcção definida por \vec{p} (ver Figura 2).

[1,2 pontos]

$$p = 2aq, \quad r \gg a$$

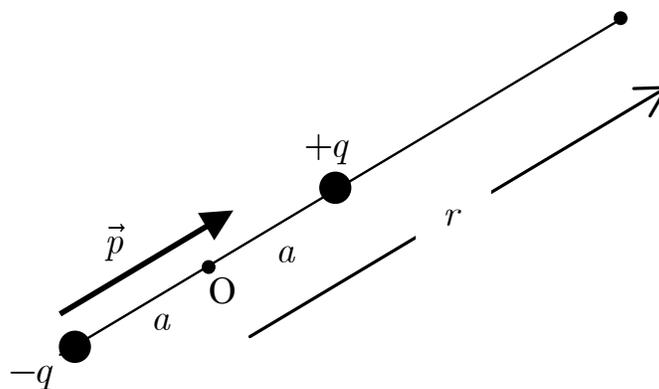


FIGURA 2

3.2 Obter uma expressão para a força \vec{f} que o átomo polarizado exerce sobre o ião. Mostrar que esta força é atractiva, qualquer que seja o sinal da carga do ião.

[3,0 pontos]

3.3 Qual é a energia potencial de interacção entre o ião e o átomo? Escrevê-la em função de α , Q e r .

[0,9 pontos]

3.4 Obter uma expressão para a distância de maior aproximação, r_{\min} (ver Figura 1).

[2,4 pontos]

3.5 Se o parâmetro de impacto b for menor que um certo valor crítico b_0 , o ião irá seguir uma trajectória em espiral até colidir com o átomo. Neste caso, o ião poderá ser neutralizado, ficando o átomo carregado, um processo conhecido por interacção de “troca de carga”. Qual é a secção eficaz, $A = \pi b_0^2$, deste processo visto da perspectiva do ião?

[2,5 pontos]

Student Code -



FOLHA DE RESPOSTAS

3.1 $\vec{E}_p =$

3.2 $\vec{f} =$

3.3 A energia potencial é

3.4 $r_{\min} =$

3.5 A seccão eficaz é
