CAPA

43ª Olimpíada Internacional de Física — Prova Teórica

Tartu, Estónia — Terça-feira, 17 de Julho de 2012

- Dispõe de 5 horas para responder às questões. A prova contém 3 problemas cotados, no total, para 30 pontos. **Note que os problemas não têm todos a mesma cotação.**
- **Não pode abrir o envelope com os problemas antes de ouvir o sinal sonoro de início da prova (três sinais curtos).**
- **Não pode abandonar o seu local de trabalho sem autorização prévia.** Se necessitar de qualquer ajuda (calculadora avariada, ida à casa de banho, etc), levante a bandeira correspondente acima das paredes da caixa onde está sentado e mantenha-a levantada até à chegada de um organizador (as bandeiras "HELP" ou "TOILET" encontram-se no seu lugar e possuem uma haste longa).
- **As suas respostas devem ser expressas em função das quantidades sombreadas** no texto do problema, e podem também conter constantes fundamentais. Assim, se estiver escrito que "a altura da caixa é a e a sua largura é b", pode utilizar a na sua resposta, mas b não pode ser usado (a não ser que esteja sombreado noutra parte do texto, veja mais abaixo). As quantidades sombreadas no texto de uma alínea só podem ser utilizadas na resposta a essa alínea; as quantidades sombreadas no texto introdutório de um Problema (ou Parte de um Problema), i.e., fora do âmbito de qualquer alínea, podem ser usadas em todas as respostas desse Problema (ou dessa Parte do Problema).
- Utilize apenas o lado da frente das folhas.
- Há **Folhas de Resolução** para cada problema (no cabeçalho encontra o número e um pictograma alusivo ao problema). Escreva as suas resoluções nas Folhas de Resolução apropriadas. As Folhas de Resolução para cada Problema estão numeradas; use as folhas de acordo com a sua numeração. **Indique sempre a Parte do Problema e a Questão a que está a responder.** Copie as respostas finais para as caixas respectivas da **Folha de Respostas**. Há ainda **Papel de Rascunho**; utilize-o para escrever aquilo que não deseja que seja avaliado. Se tiver escrito nas Folhas de Resolução algo que não queira ver avaliado (tais como resoluções iniciais e incorrectas), marque-o com uma grande cruz.
- Se necessitar de mais folhas para um dado Problema, por favor levante a bandeira "HELP" e indique a um organizador o número do Problema: ser-lhe-ão dadas duas Folhas de Resolução (pode fazer este pedido mais de uma vez).
- **Deve usar o mínimo de texto possível:** tente explicar a sua resolução principalmente com equações, números, símbolos e diagramas. ~~Quando se tornar inevitável escrever uma explicação textual, tente providenciar uma tradução em inglês em simultâneo com o texto na sua língua mãe (se a tradução estiver incorrecta ou ausente, o texto na sua língua mãe será usado durante a Moderação).~~
- O primeiro sinal sonoro (isolado) indica que está a 30 minutos do fim da prova; o segundo sinal (duplo) indica que faltam 5 minutos para o fim da prova; o terceiro sinal (triplo sinal sonoro) indica o fim da prova. **Após o terceiro sinal deve imediatamente parar de escrever.** Coloque todas as folhas no envelope que se encontra na sua secretária. **Não está autorizado a levar consigo qualquer folha de papel.** Se concluir a resolução da prova antes do sinal sonoro final, por favor levante a sua bandeira.

Problema T1. Concentre-se nos diagramas *(13 pontos)*

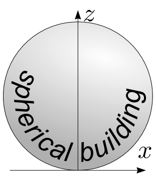
Parte A. Balística *(4.5 pontos)*

Uma bola lançada com velocidade inicial v_0 move-se num campo gravítico homogéneo, no plano $x-z$ plane, onde o eixo x é horizontal e o eixo z é vertical e de sentido contrário ao da aceleração em queda livre g; despreze a resistência do ar.

i. (0.8 pts) Escolhendo judiciosamente o ângulo de lançamento é possível atingir alvos na região

$$z \leq z_0 - kx^2;$$

com uma bola lançada da origem com velocidade inicial fixa v_0 (não necessita de demonstrar esta expressão). Determine as constantes z_0 e k.



ii. (1.2 pts) Considere agora que o ponto de lançamento pode ser livremente escolhido ao longo da linha $z = 0$, e que o ângulo de lançamento também pode ser ajustado livremente. O objectivo é atingir o ponto mais alto de um edifício esférico de raio R (ver figura) lançando a bola com a menor velocidade inicial v_0 possível. (A bola não deve tocar no edifício antes de atingir o alvo.) Esboce a trajectória óptima da bola (use a caixa apropriada na Folha de Respostas). Note que, para classificação da sua resposta, apenas será considerado o esboço.

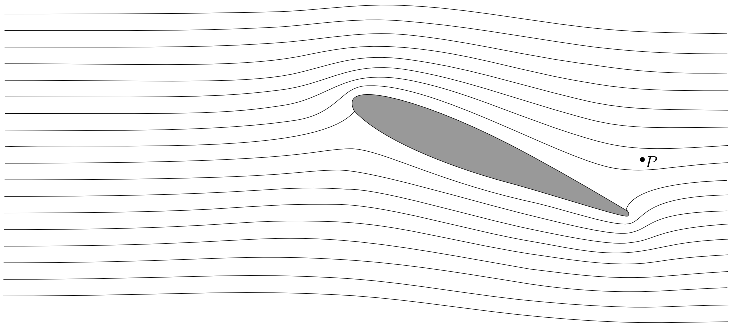
iii. (2.5 pts) Qual é a velocidade de lançamento mínima, $v_{\min}$, que é necessário imprimir à bola para que ela atinja o ponto mais alto de um edifício esférico de raio R?

La Géode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchooo/flickr.com

Parte B. Escoamento de ar em torno de uma asa *(4 pontos)*

Para esta Parte do Problema, a seguinte informação pode ser útil. No escoamento de um líquido ou de um gás ao longo de um tubo, $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = \text{c.}^{\text{te}}$ ao longo de uma linha de fluxo, sempre que a velocidade v seja menor que a velocidade do som. Aqui ρ é a densidade do fluido, h a altura, g a aceleração da gravidade e p a pressão hidrostática. As linhas de fluxo são as trajectórias das partículas do fluido (assumindo que o padrão de escoamento é estacionário). O termo $\frac{1}{2}\rho v^2$ é designado por pressão dinâmica.

Na figura abaixo estão representadas a secção transversal da asa de um avião e as linhas de fluxo do ar em torno da asa, vistas do sistema de referência da asa. Assuma que (a) o escoamento do ar é estritamente bidimensional (i.e. que os vectores velocidade do ar estão no plano da figura); (b) o padrão de escoamento é o mesmo qualquer que seja a velocidade do avião; (c) não há vento; (d) a pressão dinâmica é muito menor que a pressão atmosférica $p_0 = 1.0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Pode utilizar a régua para tirar medidas da figura na Folha de Respostas.

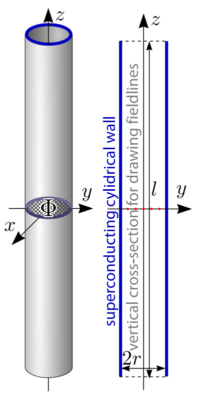


i. (0.8 pts) Se a velocidade do avião relativamente ao solo for $v_0 = 100\,\mathrm{m/s}$, qual é a velocidade do ar v_P no ponto P (indicado na figura) relativamente ao solo?

ii. (1.2 pts) Quando a humidade relativa do ar é elevada e a velocidade do avião relativamente ao solo excede um valor crítico v_{crit}, forma-se um jacto de gotículas de água junto à asa. As gotículas emergem num certo ponto Q. Indique esse ponto Q na figura da Folha de Respostas. Explique qualitativamente como determinou a posição deste ponto (recorrendo a fórmulas e ao mínimo de texto possível).

iii. (2.0 pts) Estime a velocidade crítica v_{crit} usando os seguintes dados: a humidade relativa do ar é $r = 90\%$, a capacidade térmica do ar a pressão constante é $c_p = 1.00 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\cdot K}$, a pressão do vapor de água saturado é $p_{sa} = 2.31\,\mathrm{kPa}$ quando a temperatura do ar não perturbado é $T_a = 293\,\mathrm{K}$ e $p_{sb} = 2.46\,\mathrm{kPa}$ quando $T_b = 294\,\mathrm{K}$. Pode ainda necessitar da capacidade térmica do ar a volume constante $c_V = 0.717 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\cdot K}$. Note que a humidade relativa se define como a razão entre a pressão de vapor e a pressão de vapor saturado a uma certa temperatura. A pressão de vapor saturado é a pressão de vapor à qual o vapor está em equilíbrio com o líquido.

Parte C. Palhinhas magnéticas *(4.5 pontos)*

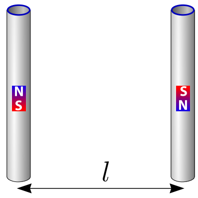


Considere um tubo cilíndrico feito de um material supercondutor. O comprimento do tubo é l e o seu raio interno é r; considere sempre que $l \gg r$. O centro do tubo coincide com a origem, e o seu eixo coincide com o eixo z. Há um fluxo magnético Φ através da secção transversa do tubo a meio deste, $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$.

Um supercondutor é um material que expele o campo magnético do seu interior, i.e. o campo magnético no seu interior é sempre nulo.

i. (0.8 pts) Esboce, na caixa apropriada da Folha de Respostas, cinco linhas de campo magnético que passem pelos cinco pontos vermelhos assinalados na secção axial do tubo.

ii. (1.2 pts) Determine a componente na direcção z da força de tensão T no meio do tubo (i.e. a força de interacção entre as duas metades do tubo $z > 0$ e $z < 0$).

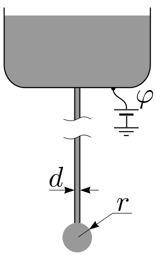


iii. (2.5 pts) Considere agora um outro tubo, idêntico ao primeiro e colocado paralelamente a este. O campo magnético no segundo tubo tem sentido oposto ao do primeiro. O centro do segundo tubo é colocado em $y = l$, $x = z = 0$ (de tal forma que os tubos coincidem com os lados opostos de um quadrado). Determine a força de interacção magnética F entre os tubos.

Problema T2. Gerador de Kelvin *(8 pontos)*

A informação que se segue sobre tensão superficial pode vir a ser útil para a resolução deste problema. Note que é mais favorável energeticamente que as moléculas de um líquido como a água estejam localizadas no interior do líquido do que na interface líquido-ar. Devido a este facto existe uma energia superficial $U = \sigma S$, onde S é a área da interface e σ é a tensão superficial do líquido. Esta tensão superficial σ está também relacionada com a força exercida entre quaisquer dois fragmentos da superfície do líquido. Na realidade, esta força é dada por $F = \sigma l$, onde l é o comprimento da linha que separa os fragmentos.

Um longo tubo metálico de diâmetro interno d está na vertical, apontando para baixo, e gotas de água caem pelo orifício de baixo do tubo (ver figura). A água pode ser considerada como um bom condutor de electricidade, com densidade ρ e tensão superficial σ. Assuma sempre que $d \ll r$, onde r é o raio da gota debaixo do tubo, que cresce devagar até se separar deste devido à aceleração gravítica g.



Parte A. Um tubo único *(4 pontos)*

i. (1.2 pts) Encontre o raio $r_{\max}$ da gota imediatamente antes de se separar do tubo.

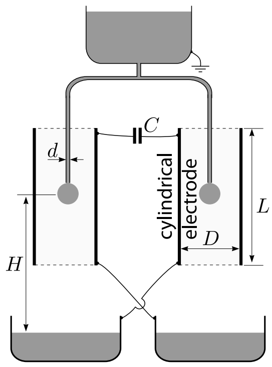
ii. (1.2 pts) O potencial electrostático do tubo em relação à sua vizinhança é φ. Calcule a carga Q de uma gota quando o seu raio é r.

iii. (1.6 pts) Assuma que o raio r não se altera enquanto o potencial φ vai aumentando lentamente. A gota torna-se instável, dividindo-se em pequenas gotículas, quando a pressão hidrostática dentro da gota for menor que a pressão atmosférica. Calcule o potencial crítico $\varphi_{\max}$ a que este processo ocorre.

Parte B. Dois tubos *(4 pontos)*

Um "Gerador de Kelvin" é formado por dois tubos (idênticos ao tubo descrito na Parte A deste problema), ligados através de uma junção em "T" (note que o contentor de água está ligado à terra, ver figura). Os extremos dos tubos estão no centro de dois eléctrodos cilíndricos (de altura L e diâmetro D, com $L \gg D \gg r$). O número de gotas que saem de cada tubo por unidade de tempo é n. As gotas caem de uma altura H para recipientes de um material bom condutor de electricidade que estão colocados por baixo dos tubos. Estes recipientes estão ligados aos eléctrodos da maneira indicada na figura. Os eléctrodos estão também ligados directamente através de um condensador de capacitância C. A carga total do sistema formado pelos eléctrodos e pelos recipientes é nula.

A primeira gota a cair terá uma carga microscópica que provocará um desiquilíbrio entre os dois lados e carregará ligeiramente o condensador.



i. (1.2 pts) Escreva, em função de $r_{\max}$ (ver Parte A-i), o módulo da carga Q_0 das gotas que se separam dos tubos no instante em que a carga do condensador é q. Despreze o efeito referido na Parte A-iii.

ii. (1.5 pts) Obtenha a dependência de q no tempo, t, aproximando-a por uma função contínua $q(t)$, assumindo que inicialmente $q(0) = q_0$.

iii. (1.3 pts) O funcionamento do gerador pode ser dificultado pelo efeito referido na Parte A-iii. Adicionalmente, a interacção eléctrica entre a gota que cai e o recipiente por baixo impõe um limite $U_{\max}$ à diferença de potencial máxima entre os eléctrodos que é possível obter. Determine $U_{\max}$.

Problema T3. Formação de uma proto-estrela *(9 pontos)*

Neste problema irá modelar a formação de uma estrela. Uma nuvem esférica de gás inter-estrelar, inicialmente em repouso, começa a colapsar devido à sua própria gravidade. O raio inicial da nuvem é r_0, e a sua massa é m. O meio que rodeia a nuvem (muito menos denso que a própria nuvem) possui uma temperatura uniforme T_0, igual à temperatura inicial da nuvem. O gás pode ser considerado ideal. A massa molar média do gás é μ e o seu coeficiente adiabático é $\gamma > \frac{4}{3}$. Considere ainda que $G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, onde R é a constante dos gases ideais e G é a constante de gravitação universal.

i. (0.8 pts) Durante a maior parte do colapso, o gás é transparente e qualquer calor que seja gerado é imediatamente dissipado por radiação, i.e. a nuvem mantém-se em equilíbrio térmico com o meio envolvente. Por quantas vezes (n) a pressão aumenta quando o raio da nuvem passa a metade ($r_1 = 0.5r_0$)? Assuma que a densidade do gás se mantém uniforme.

ii. (1 pt) Estime o tempo t_2 necessário para o raio da nuvem diminuir de r_0 a $r_2 = 0.95r_0$. Despreze a alteração do campo gravítico na posição das partículas de gás em queda.

iii. (2.5 pts) Assumindo que a pressão se mantém desprezável, encontre o tempo $t_{r\to 0}$ necessário para a nuvem reduzir o seu raio de r_0 até um raio muito pequeno usando as leis de Kepler para órbitas elípticas.

iv. (1.7 pts) Para um certo raio $r_3 \ll r_0$ o gás fica suficientemente denso para ser opaco à radiação térmica. Calcule a quantidade total de calor Q que é radiado durante o colapso da nuvem de r_0 até r_3.

v. (1 pt) Para raios mais pequenos que r_3 pode desprezar a radiação térmica. Determine a dependência no raio $r < r_3$ da temperatura T da nuvem.

vi. (2 pts) A partir de certo ponto a pressão começa a ser relevante para a dinâmica do gás, e o colapso pára para $r = r_4$ (com $r_4 \ll r_3$). Contudo, ainda é possível desprezar a radiação térmica e a temperatura não é suficientemente elevada para desencadear reações de fusão nuclear. Nestas condições a pressão da proto-estrela deixa de ser uniforme, mas ainda podem ser feitas estimativas com factores numéricos incorrectos. *Estime* o raio final r_4 e a respectiva temperatura T_4 da proto-estrela.

Problema T1. Concentre-se nos diagramas *(13 pontos)*

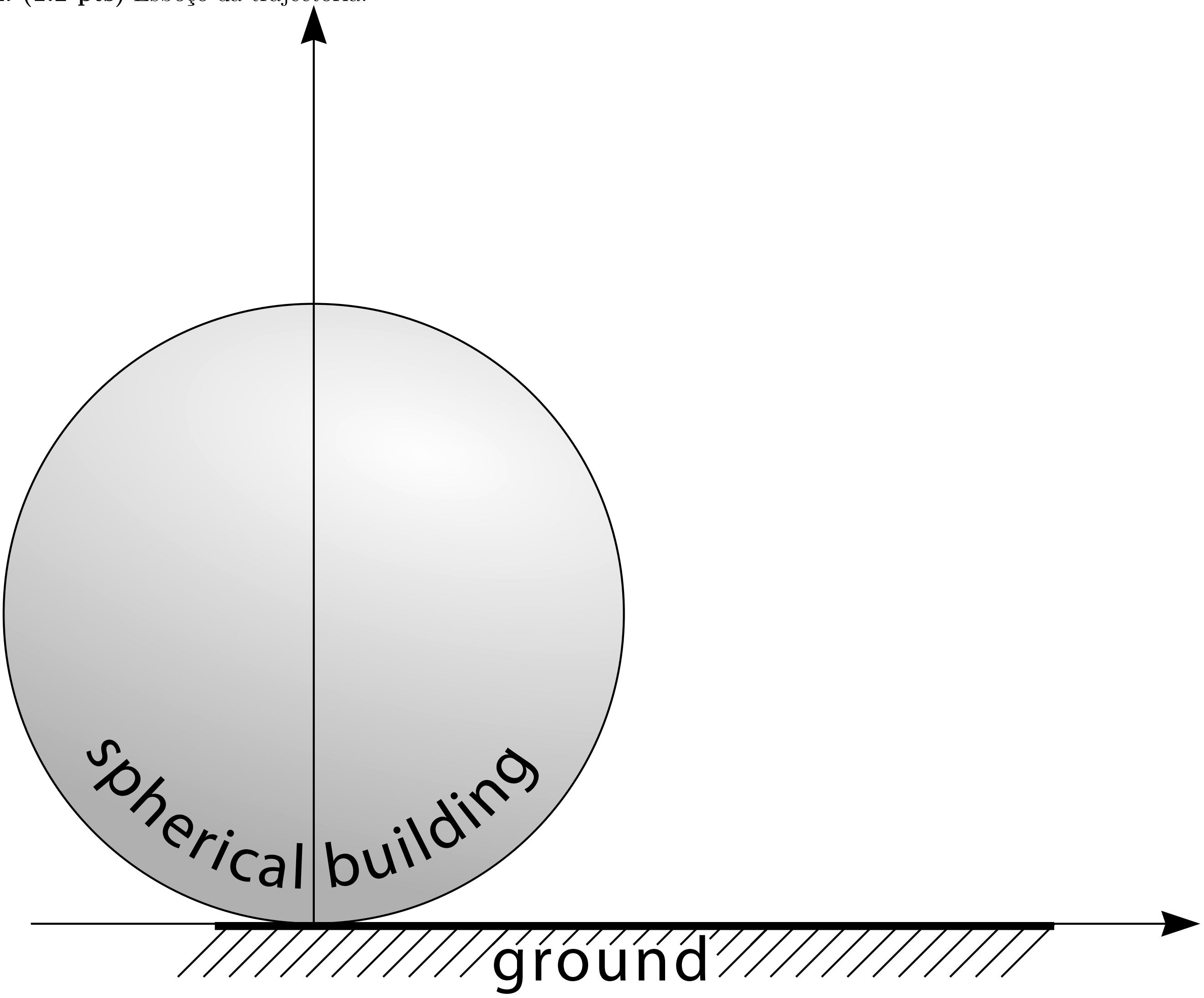
Parte A. Balística *(4.5 pontos)*

i. (0.8 pts)

$z_0 =$

$k =$

ii. (1.2 pts) Esboço da trajectória:



iii. (2.5 pts)

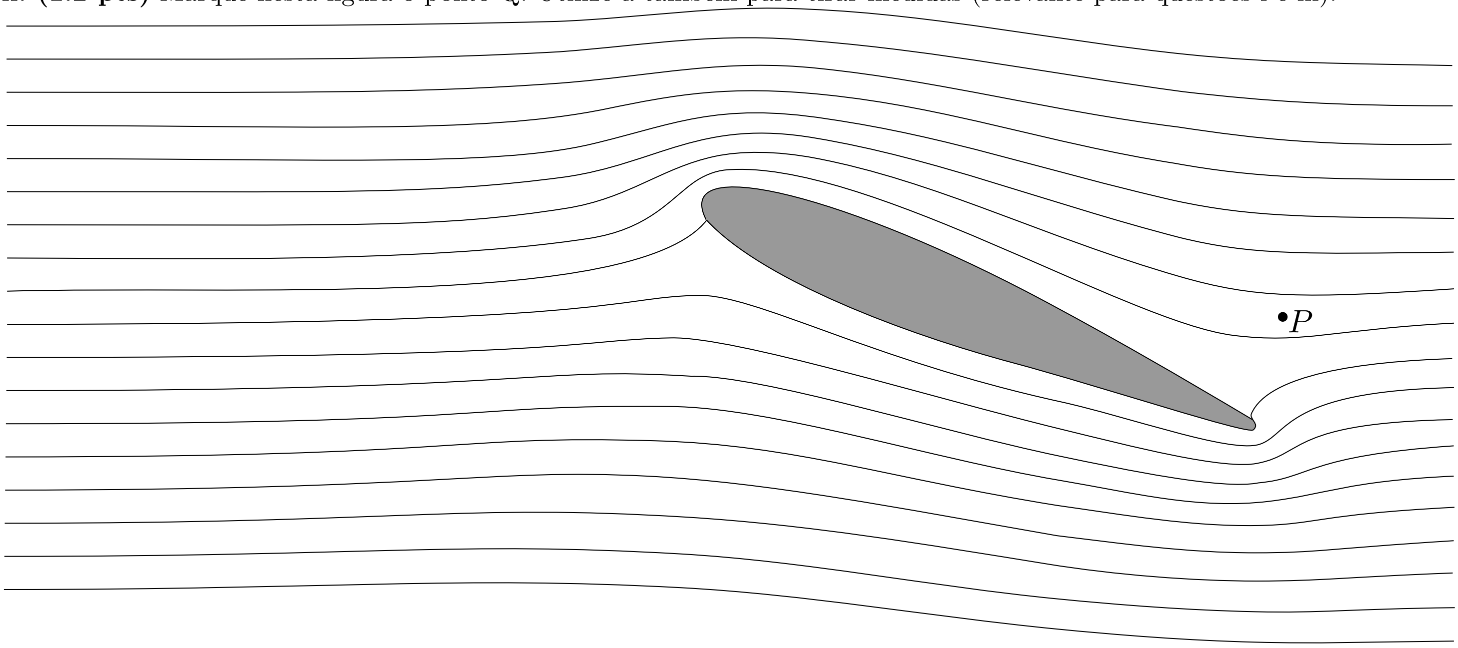
$v_{\min} =$

Parte B. Escoamento de ar em torno de uma asa *(4 pontos)*

i. (0.8 pts)

$v_P =$

ii. (1.2 pts) Marque nesta figura o ponto Q. Utilize-a também para tirar medidas (relevante para questões i e iii).



Fórmulas que motivam
a escolha do ponto Q:

iii. (2.0 pts)

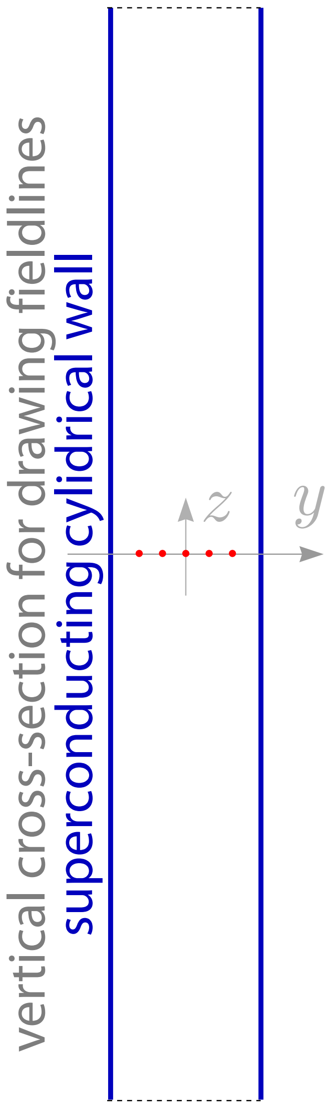
Fórmula: $v_{\text{crit}} =$

Valor numérico: $v_{\text{crit}} \approx$

Parte C. Palhinhas magnéticas *(4.5 pontos)*

i. (0.8 pts)

Represente neste diagrama
cinco linhas do campo magnético.



ii. (1.2 pts)

$T =$

iii. (2.5 pts)

$F =$

Problema T2. Gerador de Kelvin *(8 pontos)*

Parte A. Um tubo único *(4 pontos)*

i. (1.2 pts)

$r_{\max} =$

ii. (1.2 pts)

$Q =$

iii. (1.6 pts)

$\varphi_{\max} =$

Parte B. Dois tubos *(4 pontos)*

i. (1.2 pts)

$Q_0 =$

ii. (1.5 pts)

$q(t) =$

iii. (1.3 pts)

$U_{\max} =$

Problema T3. Formação de uma proto-estrela *(9 pontos)*

i. (0.8 pts)

$n =$

ii. (1 pt)

$t_2 \approx$

iii. (2.5 pts)

$t_{r\to 0} =$

iv. (1.7 pts)

$Q =$

v. (1 pt)

$T(r) =$

vi. (2 pts)

$r_4 \approx$

$T_4 \approx$