

- O tempo disponível para a prova teórica é 5 horas. Há 3 problemas valendo um total de 30 pontos. Note que os problemas não valem todos o mesmo número de pontos. A **TABELA DE DADOS** que foi fornecida diz respeito aos 3 problemas.
- Não deve abrir o envelope castanho contendo os problemas antes de ouvir o sinal sonoro (apito) que indica o início da prova.
- Há uma Folha de Respostas para cada problema (esteja atento ao cabeçalho, que tem a cor e o número do problema a que respeita). Transcreva as suas respostas para as caixas apropriadas das Folhas de Respostas.
- Utilize apenas o papel oficial (branco ou milimétrico) da IPhO para indicar os detalhes dos seus cálculos. **PREENCHA TODAS AS CAIXAS DO CABEÇALHO e ESCREVA APENAS NA PÁGINA FRONTAL DA FOLHA** (as costas da folha não serão digitalizadas). Por favor, utilize o mínimo de texto possível. Deverá procurar exprimir-se sobretudo com equações, números, símbolos, diagramas e gráficos. Se tiver escrito algo em qualquer folha que não deseje ver corrigido marque-o com uma grande cruz.
- Não pode abandonar o seu lugar sem autorização. Se necessitar de assistência (calculadora avariada, necessidade de mais papel, ida à casa de banho, etc.), levante a sua mão e mantenha-a levantada até à chegada de um guia.
- O final da prova é assinalado por um sinal sonoro (apito). Deve parar de escrever imediatamente. Se terminar a prova antes do final do tempo regulamentar, por favor levante a sua mão.
- Ordene as suas folhas **COM O LADO ESCRITO VIRADO PARA CIMA** e coloque-as no envelope castanho na seguinte ordem:
  1. Folha de Respostas T1 seguida dos cálculos detalhados do problema T1
  2. Folha de Respostas T2 seguida dos cálculos detalhados do problema T2
  3. Folha de Respostas T3 seguida dos cálculos detalhados do problema T3
- Não pode retirar qualquer folha de papel da sala.

## Tabela de parâmetros físicos

Velocidade da luz no vácuo	$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck dividida por $2\pi$	$\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de gravitação universal	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Aceleração gravítica	$g = 9,82 \text{ m s}^{-2}$
Carga do electrão	$e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permitividade eléctrica do vazio	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Massa do electrão	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Meteorito rochoso, calor específico	$c_{sm} = 1,2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rochoso, condutividade térmica	$k_{sm} = 2,0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rochoso, densidade	$\rho_{sm} = 3,3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Meteorito rochoso, ponto de fusão	$T_{sm} = 1,7 \times 10^3 \text{ K}$
Meteorito rochoso, calor latente de fusão	$L_{sm} = 2,6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Prata, massa molar	$M_{Ag} = 1,079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Prata, densidade	$\rho_{Ag} = 1,049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Prata, calor específico	$c_{Ag} = 2,40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Água, massa molar	$M_{wa} = 1,801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Água, densidade	$\rho_{wa} = 0,998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Água, calor específico	$c_{wa} = 4,181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Água, calor latente de vaporização	$L_{wa} = 2,260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Água, ponto de ebulição	$T_{100} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373,15 \text{ K}$
Gelo, densidade de um glaciar	$\rho_{ice} = 0,917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Vapor, calor específico	$c_{st} = 2,080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Terra, massa	$m_E = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Terra, raio	$R_E = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$
Sol, massa	$m_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sol, raio	$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Distância média Sol-Terra	$a_E = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$

## Introdução

Um meteoro é um pequeno fragmento (normalmente de diâmetro inferior a 1 m) de um cometa ou um asteroide. Um meteoro que atinge o solo antes de se desintegrar completamente designa-se por meteorito.

Durante a noite de 17 de Janeiro de 2009 foi avistado por muitos observadores junto ao Báltico o rastro brilhante de um meteoro (uma bola de fogo) que atravessava a atmosfera da Terra. Uma câmara de vigilância na Suécia filmou a queda do meteoro (Fig. 1.1(a)). A partir das imagens e dos depoimentos de testemunhas oculares foi possível delimitar a zona de impacto, tendo um meteorito de 0,025 kg sido encontrado seis semanas mais tarde, perto da cidade de Maribo, no Sul da Dinamarca. A análise do meteorito, hoje em dia designado por meteorito de Maribo, e da sua trajectória enquanto caía forneceu resultados interessantes. A sua velocidade ao entrar na atmosfera foi excepcionalmente alta. A sua idade,  $4,567 \times 10^9$  anos, indica que terá sido formado pouco depois do nascimento do Sistema Solar, supondo-se que seja um fragmento do Cometa Encke.

## A velocidade do meteorito de Maribo

A bola de fogo movia-se inicialmente para o quadrante Oeste, mais precisamente ao longo de uma linha que faz um ângulo de  $285^\circ$  relativamente ao Norte, em direcção ao local onde o meteorito foi posteriormente encontrado (ver Fig. 1.1). O meteorito foi encontrado a 195 km da câmara de vigilância, na direcção  $230^\circ$  relativamente ao Norte.

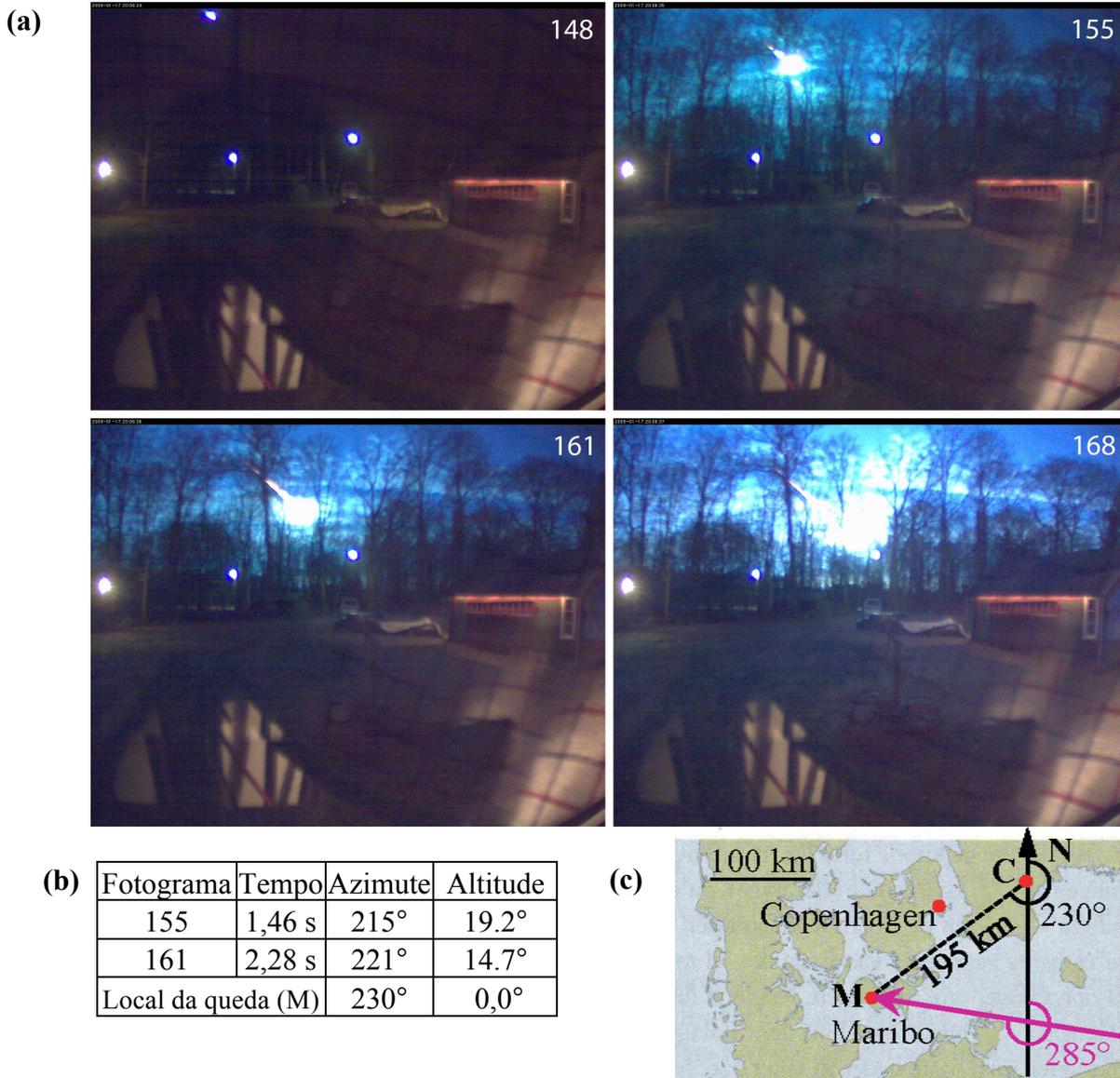
1.1	A partir desta informação e dos dados da Fig. 1.1, calcule a velocidade média do meteorito no intervalo de tempo entre os fotogramas 155 e 161. Despreze os efeitos da curvatura da Terra e da força gravítica.	1,3
-----	---	-----

## Através da atmosfera e derretendo?

A fricção do ar num meteoro que se move nas camadas superiores da atmosfera depende de uma maneira complicada da forma e velocidade do meteoro e da temperatura e densidade do ar. Uma aproximação razoável para a força de atrito  $F$  nas camadas superiores da atmosfera é dada pela expressão  $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ , onde  $k$  é uma constante,  $\rho_{\text{atm}}$  é a densidade do ar,  $A$  é a secção projectada do meteoro, e  $v$  é a sua velocidade.

Assuma as simplificações seguintes ao analisar o meteoro: o objecto que entrou na atmosfera era uma esfera de massa  $m_M = 30$  kg, raio  $R_M = 0,13$  m, temperatura  $T_0 = 200$  K, e velocidade  $v_M = 2,91 \times 10^4$  m/s. A densidade do ar é constante e igual ao seu valor 40 km acima da superfície da Terra,  $\rho_{\text{atm}} = 4,1 \times 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup>, e o coeficiente de fricção é  $k = 0,60$ .

1.2a	Estime quanto tempo decorre, após a entrada na atmosfera, até que a velocidade do meteoro se reduza 10 %, de $v_M$ para $0,90 v_M$ . Despreze a força gravitacional e considere que o meteoro mantém a sua massa e a forma esférica.	0,7
1.2b	Determine a razão entre a energia cinética $E_{\text{kin}}$ do meteoro ao entrar na atmosfera e a energia $E_{\text{melt}}$ que é necessária para o fundir completamente (ver Tabela de Dados).	0,3



**Figura 1.1** (a) Um conjunto dos fotogramas registados pela câmara de vigilância na Suécia onde se vê a queda do meteoro (bola de fogo). (b) Dados extraídos de dois dos fotogramas indicando o instante, a direcção (azimute) em graus observada a partir da câmara (C), e a altura acima do horizonte (altitude) em graus. O azimute é a posição angular medida no sentido horário a partir da direcção Norte e no plano horizontal. A altitude é a posição angular acima do horizonte. (c) Esboço do trajecto (seta magenta) do meteorito de Maribo relativamente à direcção Norte (N) e ao local de aterragem na Dinamarca (M) tal como observado pela câmara na Suécia (C).

### Aquecimento do meteoro de Maribo enquanto atravessa a atmosfera

O meteoro rochoso de Maribo foi visto como uma bola de fogo ao penetrar na atmosfera a uma velocidade supersónica porque o ar que o rodeava estava a brilhar. No entanto, apenas a camada superficial de Maribo aqueceu. Suponha que Maribo é uma esfera homogénea de densidade  $\rho_{sm}$ , calor específico (capacidade calorífica mássica)  $c_{sm}$ , e condutividade térmica  $k_{sm}$  (consulte a Tabela de Dados para obter os seus valores). Além disso, ao penetrar na atmosfera a sua temperatura era  $T_0 = 200$  K, e, enquanto caía através da atmosfera, a temperatura da sua superfície

era constante e igual a  $T_s = 1000$  K, devido ao atrito do ar, sendo o seu interior gradualmente aquecido.

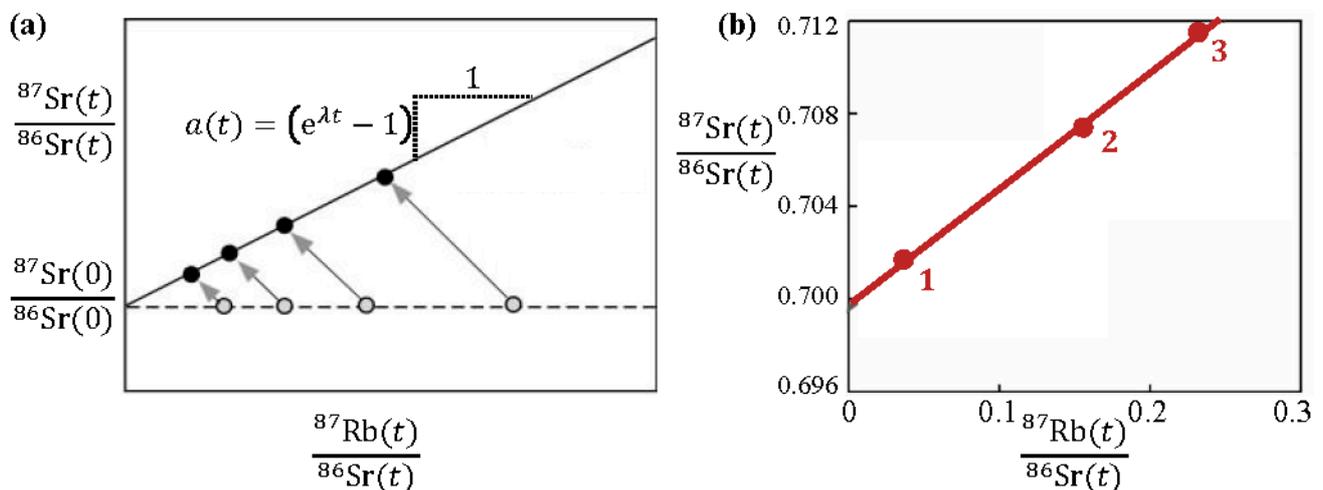
$t$  segundos após iniciar a travessia da atmosfera, uma camada superficial de Maribo de espessura  $x$  foi aquecida até uma temperatura significativamente superior a  $T_0$ . A espessura desta camada pode ser estimada por análise dimensional do produto de potências dos parâmetros termodinâmicos relevantes para o problema:  $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$ .

1.3a	Determine por análise dimensional o valor dos quatro expoentes: $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , e $\delta$ .	0,6
1.3b	Calcule a espessura $x$ após um tempo de queda $t = 5$ s, e determine a razão $x/R_M$ .	0,4

## A idade de um meteorito

As propriedades químicas de isótopos radioativos, assim como os seus produtos de decaimento, são diferentes. Assim, durante a cristalização dos minerais de um dado meteorito, alguns minerais terão um conteúdo elevado de um dado isótopo radioativo e um conteúdo baixo dos seus produtos de decaimento, enquanto noutros minerais se passará o contrário. A idade de um meteorito pode portanto ser determinada recorrendo à datação radiométrica dos seus minerais radioativos.

Vai-se estudar um exemplo concreto que envolve o isótopo  $^{87}\text{Rb}$  (cujo número atómico é 37), que decai para o isótopo estável  $^{87}\text{Sr}$  (cujo número atómico é 38) com uma meia-vida de  $T_{1/2} = 4,9 \times 10^{10}$  anos. Estes isótopos coexistem com o isótopo estável  $^{86}\text{Sr}$ . No momento da cristalização a razão  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  é a mesma em todos os minerais, mas a razão  $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$  é diferente. À medida que o tempo passa, a quantidade de  $^{87}\text{Rb}$  diminui por decaimento, levando ao aumento da quantidade de  $^{87}\text{Sr}$ . Em consequência deste decaimento, a razão  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  vai variar com o tempo. Na Fig. 1.2(a), os pontos na linha horizontal referem-se à razão  $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$  em diferentes minerais no momento da cristalização.



**Figura 1.2 (a)** A razão  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  em diferentes minerais no instante  $t = 0$  (momento da cristalização – círculos abertos) e hoje em dia (círculos a cheio). **(b)** A linha isocrónica para três amostras minerais diferentes tiradas de um meteorito no tempo actual.

1.4a	Escreva a equação de decaimento de $^{87}_{37}\text{Rb}$ para $^{87}_{38}\text{Sr}$ .	0,3
1.4b	Mostre que se marcar a razão $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ , medida hoje em amostras minerais diferentes retiradas do mesmo meteorito, em função da razão $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ , medida também hoje nas	0,7

	mesmas amostras, obtém uma linha recta, designada por linha isocrónica. O declive da linha isocrónica é $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$ , onde $t$ é o tempo decorrido desde a formação dos minerais e $\lambda$ é a constante de decaimento, inversamente proporcional à meia-vida $T_{1/2}$ .	
1.4c	Determine a idade $\tau_M$ do meteorito recorrendo à linha isocrónica da Fig. 1.2(b).	0,4

## O cometa Encke, a possível origem do meteorito de Maribo

Na sua órbita em torno do Sol, as distâncias mínima e máxima do cometa Encke ao Sol são  $a_{\min} = 4,95 \times 10^{10}$  m e  $a_{\max} = 6,16 \times 10^{11}$  m, respectivamente.

1.5	Calcule o período orbital do cometa Encke, $t_{\text{Encke}}$ .	0,6
-----	---	-----

## Consequências da colisão de um asteróide com a Terra

65 milhões de anos atrás, a Terra foi atingida por um grande asteróide de densidade  $\rho_{\text{ast}} = 3,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , raio  $R_{\text{ast}} = 5$  km, e velocidade final  $v_{\text{ast}} = 2,5 \times 10^4$  m/s. Este impacto levou à extinção da maioria da vida na Terra e à formação da enorme cratera de Chicxulub. Vamos imaginar que um asteróide idêntico atinge a Terra hoje, numa colisão perfeitamente inelástica. Considere que o momento de inércia da Terra é 0,83 vezes o de uma esfera homogénea com a mesma massa e raio. O momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo centro de uma esfera homogénea de massa  $M$  e raio  $R$  é  $\frac{2}{5}MR^2$ . Despreze alterações na órbita da Terra.

1.6a	Considere que o asteróide atinge o Pólo Norte. Encontre a variação máxima do ângulo de inclinação do eixo da Terra após o impacto.	0,7
1.6b	Considere que o asteróide atinge o equador na direcção radial. Encontre a variação $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ do período de revolução da Terra com o impacto.	0,7
1.6c	Considere que o asteróide atinge tangencialmente a linha do equador. Encontre a variação $\Delta\tau_{\text{tan}}$ do período de revolução da Terra com o impacto.	0,7

## Velocidades de colisão máxima e mínima

Considere um corpo celeste, ligado gravitacionalmente ao Sistema Solar, que colide com a superfície da Terra com velocidade  $v_{\text{imp}}$ . Inicialmente, o efeito do campo gravítico da Terra sobre o corpo pode ser desprezado. Ignore a fricção na atmosfera, o efeito de outros corpos celestes e a rotação da Terra.

1.7	Calcule $v_{\text{imp}}^{\max}$ , o maior valor possível de $v_{\text{imp}}$ .	1,6
-----	--	-----

**Folha de Respostas**

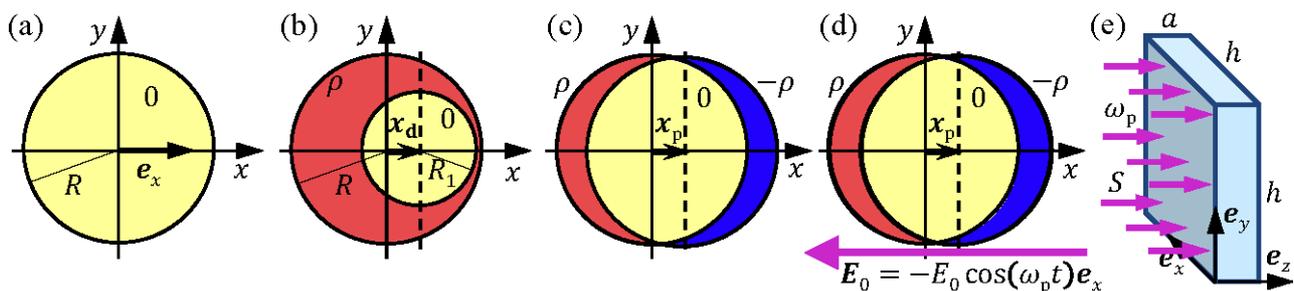
Código do País **PT**

Número de Estudante (1-5)

1.1	Velocidade média $v(t) =$	1,3
1.2a	Tempo $t_{10\%}$ para reduzir a velocidade por 10 %: $t_{10\%} =$	0,7
1.2b	$E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} =$	0,3
1.3a	Valores das potências: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) =$	0,6
1.3b	$x(5 \text{ s}) =$ <span style="margin-left: 150px;"><math>x/R_M =</math></span>	0,4
1.4a	Equação de decaimento Rb-Sr:	0,3
1.4b	Demonstração para obter declive da recta $a = (e^{\lambda t} - 1)$ :	0,7
1.4c	Idade do meteorito, $\tau_M =$	0,4
1.5	$t_{\text{Encke}} =$	0,6
1.6a	$\max \Delta\theta =$	0,7
1.6b	$\Delta\tau_{\text{vrt}} =$	0,7
1.6c	$\Delta\tau_{\text{tan}} =$	0,7
1.7	Velocidade máxima de impacto $v_{\text{imp}}^{\text{max}} =$	1,6
	<b>Total</b>	<b>9.0</b>

### Introdução

Neste problema iremos estudar um método eficiente de produção de vapor. Uma solução aquosa de nano-esferas de prata (apenas cerca de  $10^{13}$  nano-partículas por litro) é iluminada por um feixe de luz. Parte da luz é absorvida pelas nano-partículas, que aquecem, produzindo vapor junto à sua superfície sem aquecer toda a solução aquosa. O vapor escapa-se do sistema sob a forma de bolhas de vapor. O processo não está ainda totalmente compreendido, mas sabe-se que o mecanismo fundamental é a absorção de luz e excitação das oscilações colectivas dos electrões das nano-partículas metálicas. Este dispositivo é conhecido como Gerador Plasmónico de Vapor.



**Figura 2.1** (a) Uma nano-partícula esférica e electricamente neutra, de raio  $R$ , colocada na origem do sistema de coordenadas. (b) Uma esfera positivamente carregada (vermelho) que contém uma pequena região esférica electricamente neutra (0, amarelo) de raio  $R_1$  cujo centro se encontra em  $x_d = x_d e_x$ . A distribuição de carga da esfera de raio  $R$  é homogénea, com densidade  $\rho$ . (c) A esfera de densidade  $\rho$  positiva correspondente aos iões de prata da nano-partícula está fixa na origem do sistema de coordenadas. O centro da região esférica de densidade de carga negativa  $-\rho$  (azul) correspondente à nuvem electrónica está deslocado de  $x_p$ , sendo  $x_p \ll R$ . (d) Um campo eléctrico externo e homogéneo  $E_0 = -E_0 e_x$ . Se  $E_0$  não for constante, a nuvem electrónica move-se com velocidade  $v = dx_p/dt$ . (e) O vaso rectangular ( $h \times h \times a$ ) que contém a solução aquosa de nano-partículas iluminada por luz monocromática de frequência angular  $\omega_p$  e intensidade  $S$  que se propaga ao longo do eixo- $z$ .

### Uma nano-partícula esférica de prata

Ir-se-á considerar, em todo o problema, uma nano-partícula esférica de prata, de raio  $R = 10$  nm, cujo centro está fixo na origem do sistema de coordenadas (Fig. 2.1(a)). Todos os movimentos, forças e campos são paralelos ao eixo- $x$  (horizontal), indicado pelo versor  $e_x$ . A nano-partícula contém electrões livres (electrões de condução) que se movem em todo o seu volume, não estando ligados a qualquer átomo de prata. Cada átomo de prata será tratado como um ião positivo, visto ter cedido um electrão à nuvem de electrões livres.

2.1	Determine as seguintes quantidades: o volume $V$ e a massa $M$ da nano-partícula, o número $N$ e a densidade de carga $\rho$ dos iões de prata da nano-partícula, e a concentração $n$ , a carga total $Q$ , e a massa total $m_0$ dos electrões livres.	0,7
-----	--	-----

### O campo eléctrico numa região neutra no interior de uma esfera carregada

Nas restantes questões assuma que a permitividade dieléctrica relativa de todos os materiais é  $\epsilon = 1$ . É possível criar uma região electricamente neutra no interior de uma esfera de densidade

homogénea de carga  $\rho$  e raio  $R$  adicionando simplesmente uma pequena esfera, de raio  $R_1$ , com densidade de carga de sinal contrário,  $-\rho$ , e cujo centro está afastado do centro da esfera maior por  $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$  (ver Fig. 2.1(b)).

2.2	Mostre que o campo eléctrico no interior da região neutra é homogéneo e tem a forma $\mathbf{E} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$ . Determine o pré-factor $A$ .	1,2
-----	--	-----

### A força de restauro sobre a nuvem electrónica deslocada

No que se segue, ir-se-á estudar o movimento colectivo dos electrões livres, tratando-os como uma esfera negativamente carregada, com densidade homogénea de carga  $-\rho$ , centrada em  $\mathbf{x}_p$ . Esta esfera pode mover-se ao longo do eixo- $x$  relativamente ao centro da esfera positivamente carregada (iões de prata), que está fixa na origem do sistema de coordenadas (ver Fig. 2.1(c)). Suponha que uma força externa  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  desloca a nuvem electrónica para uma nova posição de equilíbrio  $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ , com  $|x_p| \ll R$ . Se se ignorarem as pequenas regiões carregadas nas extremidades da nano-partícula, a maior parte do seu interior continuará electricamente neutra.

2.3	Exprima em função de $\mathbf{x}_p$ as seguintes duas quantidades: a força de restauro $\mathbf{F}$ exercida sobre a nuvem electrónica, e o trabalho $W_{\text{el}}$ realizado sobre a nuvem electrónica durante o seu deslocamento.	1,0
-----	--	-----

### A nano-partícula esférica de prata num campo eléctrico uniforme

Uma nano-partícula é colocada numa região onde é feito o vazio e onde existe um campo electrostático uniforme  $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$  que desloca a nuvem electrónica uma pequena distância  $|x_p|$ , sendo  $|x_p| \ll R$ .

2.4	Encontre o deslocamento $x_p$ da nuvem electrónica em função de $E_0$ e de $n$ . Determine a quantidade $-\Delta Q$ de carga dos electrões que é deslocada ao longo do plano $yz$ no centro da nano-partícula em função de $n$ , $R$ e $x_p$ .	0,6
-----	--	-----

### A capacidade e indutância equivalentes da nano-partícula de prata

Quer o campo eléctrico  $\mathbf{E}_0$  seja constante quer varie no tempo, é possível construir um modelo para a nano-partícula em que esta é substituída por um circuito eléctrico equivalente. A capacidade equivalente pode-se encontrar relacionando o trabalho  $W_{\text{el}}$  necessário para uma separação de cargas  $\Delta Q$  com a energia de um condensador cujas placas estão carregadas com  $\pm \Delta Q$ . Esta separação de cargas origina uma diferença de potencial que é equivalente à diferença de potencial entre as placas do condensador equivalente.

2.5a	Obtenha a capacidade equivalente do sistema, $C$ , em função de $\epsilon_0$ e $R$ , e calcule o seu valor.	0,7
2.5b	Para esta capacidade, determine, em função de $E_0$ e $R$ , a tensão equivalente $V_0$ que deve ser ligada à capacidade equivalente de modo a acumular a carga $\Delta Q$ .	0,4

Na presença de um campo eléctrico  $\mathbf{E}_0$  que varia no tempo, a nuvem electrónica move-se com velocidade  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  (Fig. 2.1(d)). A sua energia cinética é  $W_{\text{kin}}$ , havendo uma corrente eléctrica  $I$  através do plano fixo  $yz$  devido ao movimento da nuvem. A energia cinética da nuvem electrónica é equivalente à energia armazenada num indutor equivalente de indutância  $L$ , atravessado pela corrente  $I$ .

2.6a	Obtenha $W_{\text{kin}}$ e $I$ em função da velocidade $v$ .	0,7
2.6b	Obtenha a indutância equivalente $L$ em função do raio da partícula $R$ , da carga $e$ e massa $m_e$ do electrão, e da concentração de electrões $n$ . Calcule o seu valor.	0,5

## A ressonância plasmónica da nano-partícula de prata

Na análise feita anteriormente, verificámos que o movimento resultante do afastamento da nuvem de electrões da sua posição de equilíbrio pode ser modelado através de um circuito  $LC$  ideal que oscila em ressonância com o campo aplicado. Este modo de vibração da nuvem electrónica designa-se por ressonância plasmónica, e tem frequência angular  $\omega_p$ .

2.7a	Derive uma expressão para a frequência angular $\omega_p$ da nuvem electrónica em função da carga, $e$ , e massa, $m_e$ , do electrão, da densidade de electrões, $n$ , e da permissividade do vácuo, $\epsilon_0$ .	0,5
2.7b	Calcule $\omega_p$ , em rad/s, e o comprimento de onda $\lambda_p$ , em nm, da luz no vácuo com frequência angular $\omega = \omega_p$ .	0,4

## A nano-partícula de prata iluminada por luz à frequência plasmónica

Nas restantes questões a nano-partícula é iluminada por uma luz monocromática com frequência angular  $\omega_p$  e com intensidade  $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1,00 \text{ MW m}^{-2}$ . Como este comprimento de onda é grande,  $\lambda_p \gg R$ , podemos considerar que a nano-partícula se encontra num campo eléctrico homogéneo que oscila harmonicamente:  $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$ . Devido a este campo  $\mathbf{E}_0$ , a posição do centro da nuvem electrónica,  $\mathbf{x}_p(t)$ , oscila com a mesma frequência, com velocidade  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ , e com amplitude constante  $x_0$ . Este movimento oscilatório dos electrões permite a absorção de luz. A energia assim capturada pela partícula pode ser convertida em calor por efeito Joule, ou re-emitada pela partícula na forma de luz dispersa.

O aquecimento por efeito Joule é causado por colisões inelásticas aleatórias: um electrão livre choca de vez em quando com um ião de prata e perde toda a sua energia cinética, que é convertida em vibrações dos iões de prata (calor). O tempo médio entre colisões é  $\tau \gg 1/\omega_p$ , que neste caso é aproximadamente dado por  $\tau = 5,24 \times 10^{-15} \text{ s}$ .

2.8a	Obtenha uma expressão para a média temporal da potência de aquecimento por efeito Joule, $P_{\text{heat}}$ , na nano-partícula e para a média temporal do quadrado da corrente $\langle I^2 \rangle$ . Estas expressões devem incluir explicitamente a média no tempo do quadrado da velocidade, $\langle v^2 \rangle$ , da nuvem electrónica.	1,0
------	--	-----

2.8b	Obtenha uma expressão para a resistência Óhmica $R_{\text{heat}}$ de um modelo eléctrico equivalente à nano-partícula com potência $P_{\text{heat}}$ dissipada por efeito Joule devido à corrente da nuvem electrónica $I$ . Calcule o valor numérico de $R_{\text{heat}}$ .	1,0
------	--	-----

O raio de luz incidente perde em média uma potência  $P_{\text{scat}}$  por dispersão de luz (re-emissão) durante a oscilação da nuvem electrónica.  $P_{\text{scat}}$  depende da amplitude da fonte de luz dispersa amplitude  $x_0$ , da carga  $Q$  da nuvem, da frequência angular  $\omega_p$  das oscilações plasmónicas e das propriedades da luz (a velocidade da luz no vácuo  $c$  e a permissividade  $\epsilon_0$  do vácuo). Assim,  $P_{\text{scat}}$  é dada por  $P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$ .

2.9	Usando $P_{\text{scat}}$ , obtenha uma expressão para a resistência equivalente à difusão de luz $R_{\text{scat}}$ (em analogia com $R_{\text{heat}}$ ) de um modelo eléctrico equivalente à nano-partícula e calcule o seu valor numérico.	1,0
-----	---	-----

Os elementos de circuito acima calculados são usados para modelar a nano-partícula através de um circuito  $LCR$  em série, que é forçado harmonicamente por uma tensão efectiva  $V = V_0 \cos(\omega_p t)$  determinada pelo campo eléctrico  $E_0$  da luz incidente.

2.10a	Derive expressões para a média temporal das potências dissipadas $P_{\text{heat}}$ e $P_{\text{scat}}$ que incluam a amplitude $E_0$ do campo eléctrico da luz incidente à frequência de ressonância.	1,2
2.10b	Calcule o valor numérico de $E_0$ , $P_{\text{heat}}$ , e de $P_{\text{scat}}$ .	0,3

## Geração de calor pela luz incidente

Uma solução aquosa de nano-partículas de prata é preparada com uma concentração  $n_{\text{np}} = 7,3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ . É colocada num vaso rectangular de tamanho  $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1,0 \text{ cm}^3$  e iluminada por luz à frequência plasmónica com intensidade  $S = 1,00 \text{ MW m}^{-2}$  e incidência normal (ver Fig. 2.1(e)). A temperatura da água é  $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  e assume-se, de acordo com observações experimentais, que, no estado estacionário, todo o calor produzido por efeito Joule nas nano-partículas é usado na produção de vapor à temperatura  $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$ , sem que se altere a temperatura da água.

A eficiência termodinâmica  $\eta$  deste gerador plasmónico de vapor é definida pela seguinte razão de potências:  $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$ , onde  $P_{\text{st}}$  é a potência usada para aquecer o vapor em todo o vaso, e  $P_{\text{tot}}$  é a potência total da luz incidente no vaso.

Na maior parte do tempo, as nano-partículas estão rodeadas por vapor, e não por água, podendo assim ser descritas como estando em vácuo.

2.11a	Calcule a massa total $\mu_{\text{st}}$ de vapor produzido por segundo pelo gerador plasmónico durante a iluminação por luz com a frequência plasmónica e intensidade $S$ .	0,6
2.11b	Calcule o valor numérico da eficiência termodinâmica $\eta$ do gerador plasmónico de vapor.	0,2

Folha de Respostas

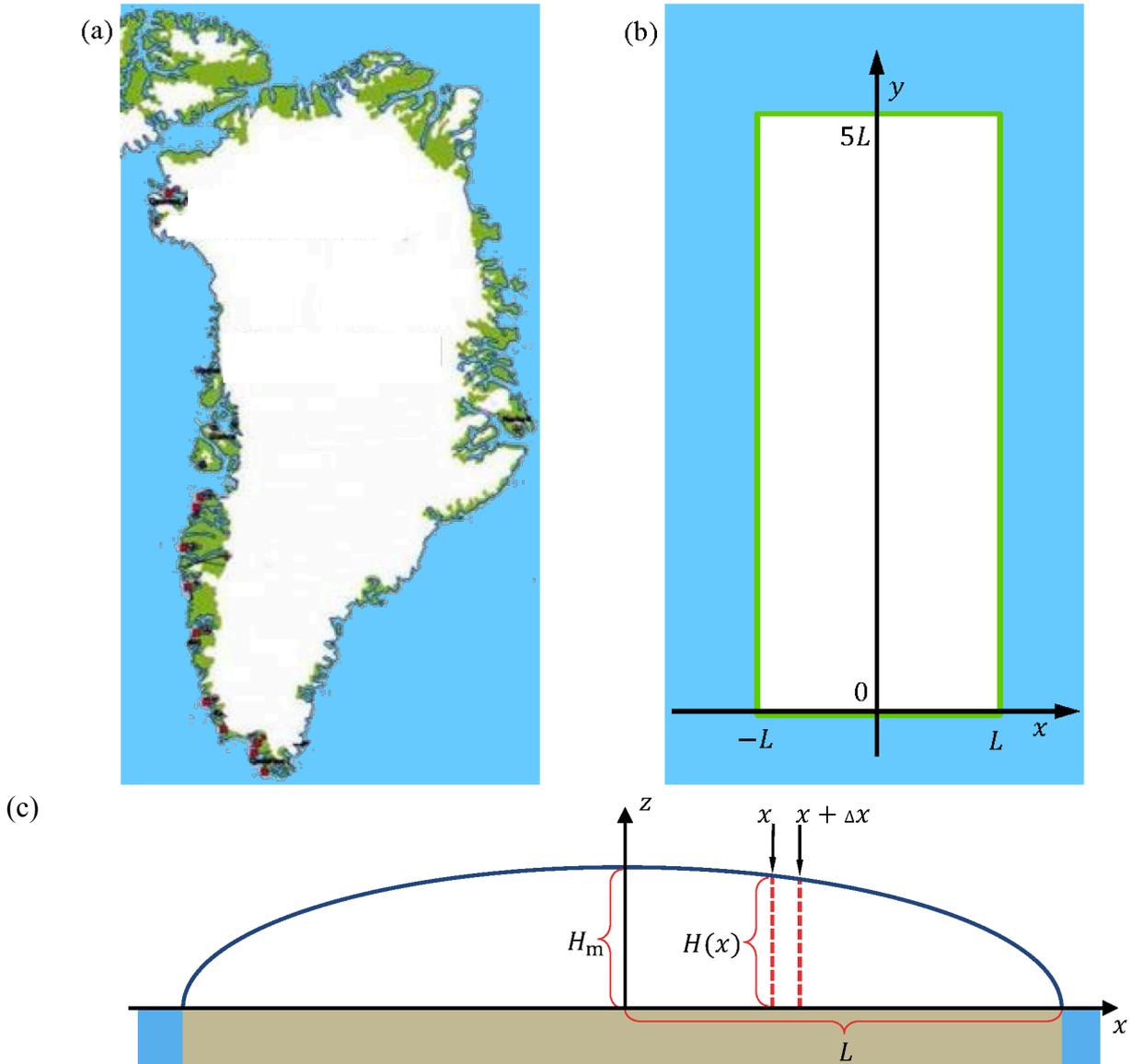
Código do País **PT**

Número de Estudante (1-5)

2.1	Volume $V =$ Número $N =$ Concentração $n =$ Massa total dos electrões da nuvem $m_0 =$	Massa $M =$ Densidade de Carga $\rho =$ Carga $Q =$	0,7
2.2	Derivar $\mathbf{E}_{\text{ind}} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_p$ , com pré-factor $A =$		1,2
2.3	$\mathbf{F} =$	$W_{\text{el}} =$	1,0
2.4	Deslocamento $x_p =$	Carga deslocada $-\Delta Q =$	0,6
2.5a	Expressão $C =$	Valor $C =$	0,7
2.5b	Expressão $V_0 =$		0,4
2.6a	Expressão $W_{\text{kin}} =$	Expressão $I =$	0,7
2.6b	Expressão $L =$	Valor $L =$	0,5
2.7a	Expressão $\omega_p =$		0,5
2.7b	Valor $\omega_p =$	Valor $\lambda_p =$	0,4
2.8a	Expressão $P_{\text{heat}} =$		1,0
2.8b	Expressão $R_{\text{heat}} =$	Valor $R_{\text{heat}} =$	1,0
2.9	Expressão $R_{\text{scat}} =$	Valor $R_{\text{scat}} =$	1,0
2.10a	Expressão $P_{\text{heat}} =$	Expressão $P_{\text{scat}} =$	1,2
2.10b	Valores: $E_0 =$	, $P_{\text{heat}} =$	, $P_{\text{scat}} =$
2.11a	Valor $\mu_{\text{st}} =$		0,6
2.11b	Valor $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}} =$		0,2
	<b>Total</b>		<b>12,0</b>

## Introdução

Este problema lida com a Física da camada de gelo da Gronelândia, o segundo maior glaciar do mundo, Fig. 3.1(a). Podemos idealizar a Gronelândia como uma ilha rectangular de largura  $2L$  e comprimento  $5L$ , estando todo o seu solo ao nível do mar. Esta ilha estaria completamente coberta por gelo incompressível (de densidade constante  $\rho_{ice}$ ) – ver Fig. 3.1(b). A altura  $H(x)$  da camada de gelo não depende da coordenada  $y$  e varia desde zero nas costas ( $x = \pm L$ ) até uma altura máxima  $H_m$  sobre o eixo norte-sul a meio da ilha (o eixo  $y$ ), conhecido como a separação dos gelos – ver Fig. 3.1(c).



**Figura 3.1** (a) Mapa da Gronelândia mostrando a extensão da camada de gelo (branco), as regiões costeiras, livres de gelo (verde), e o oceano (azul). (b) Modelo grosseiro da camada de gelo da Gronelândia cobrindo uma área rectangular no plano  $xy$  de lados  $2L$  e  $5L$ . A separação dos gelos, a linha de altura máxima da camada de gelo  $H_m$ , está sobre o eixo  $y$ . (c) Corte vertical (plano  $xz$ ) da camada de gelo mostrando o perfil  $H(x)$  (linha azul).  $H(x)$  não depende de  $y$  para  $0 < y < 5L$ , e cai abruptamente para zero em  $y = 0$  e  $y = 5L$ . O eixo  $z$  marca a posição da separação de gelos. Para maior clareza, as dimensões verticais foram expandidas relativamente às dimensões horizontais. A densidade  $\rho_{ice}$  do gelo é constante.

## Duas fórmulas úteis

Neste problema poderá utilizar o integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

e a aproximação  $(1+x)^a \approx 1+ax$ , válida quando  $|ax| \ll 1$ .

## O perfil de altura da camada de gelo

A escalas de tempo curtas pode-se assumir que o glaciar é um sistema hidrostático incompressível com um perfil de altura fixo  $H(x)$ .

3.1	Escreva uma expressão para a pressão $p(x, z)$ no interior da camada de gelo em função da altura $z$ acima do solo e da distância $x$ à separação de gelos. Despreze a pressão atmosférica.	0,3
-----	---	-----

Considere uma fatia vertical da camada de gelo em equilíbrio que cobre uma pequena base horizontal de área  $\Delta x \Delta y$  entre  $x$  e  $x + \Delta x$  – ver as linhas vermelhas a tracejado na Fig. 3.1(c). O valor de  $\Delta y$  não é relevante. A componente horizontal  $\Delta F$  da resultante das forças nas duas faces verticais da fatia, que é devida à diferença de altura entre a região da fatia mais próxima do centro da ilha e a região do lado da costa, é contrabalançada por uma força de atrito  $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$  do solo sobre a base de área  $\Delta x \Delta y$ , onde  $S_b = 100$  kPa.

3.2a	Para um dado valor de $x$ , mostre que, no limite $\Delta x \rightarrow 0$ , $S_b = \kappa H dH/dx$ e determine $\kappa$ .	0,9
3.2b	Obtenha uma expressão para a altura $H(x)$ em função de $\rho_{ice}$ , $g$ , $L$ , $S_b$ e da distância $x$ à separação de gelos. O resultado mostrará que a altura máxima do glaciar $H_m$ varia com $L$ como $H_m \propto L^{1/2}$ .	0,8
3.2c	Determine o expoente $\gamma$ da relação entre o volume total $V_{ice}$ da camada de gelo e a área $A$ da ilha rectangular, $V_{ice} \propto A^\gamma$ .	0,5

## Uma camada de gelo dinâmica

A escalas temporais mais longas considera-se que o gelo é um fluido incompressível e viscoso, que escorre do centro da ilha para a costa devido à gravidade. Neste modelo, o perfil  $H(x)$  do gelo é mantido constante quando se atinge um regime estacionário em que o fluxo e consequente fusão do gelo na costa são compensados pela queda de neve na região central do glaciar. Além das hipóteses relativas à geometria da camada de gelo – Figs. 3.1(b) e (c) – assuma ainda que:

- 1) O gelo flui no plano  $xz$  afastando-se da separação de gelos (i.e., do eixo  $y$ ).
- 2) A taxa de acumulação  $c$  (m/ano) na região central é constante.
- 3) O gelo só desaparece do glaciar devido à fusão nas costas.
- 4) A componente horizontal ( $x$ ),  $v_x(x) = dx/dt$ , da velocidade de escoamento do gelo é independente de  $z$ .
- 5) A componente vertical ( $z$ ),  $v_z(z) = dz/dt$ , da velocidade de escoamento do gelo é independente de  $x$ .

Considere apenas a região central ( $|x| \ll L$ ) junto ao centro da camada de gelo, onde a variação de altura da camada é tão pequena que esta pode ser considerada constante, i.e.  $H(x) \approx H_m$ .

3.3	Use a lei de conservação da massa para obter uma expressão para a velocidade de escoamento horizontal $v_x(x)$ em função de $c$ , $x$ , e $H_m$ .	0,6
-----	---	-----

A hipótese de incompressibilidade do gelo, i.e., a suposição que a densidade do gelo  $\rho_{ice}$  é constante, e a lei de conservação da massa redundam na seguinte restrição às componentes da velocidade de escoamento do gelo

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Escreva uma expressão para a dependência em $z$ da componente vertical $v_z(z)$ da velocidade de escoamento do gelo.	0,6
-----	--	-----

Uma pequena partícula de gelo que se encontra inicialmente sobre a superfície do gelo no ponto  $(x_i, H_m)$  irá, à medida que o tempo passa, mover-se na camada de gelo ao longo de uma trajetória de escoamento  $z(x)$  no plano vertical  $xz$ .

3.5	Deduza uma expressão para a trajetória de escoamento $z(x)$ .	0,9
-----	---	-----

### Idade e indicadores climáticos na camada de gelo dinâmica

Recorrendo às componentes  $v_x(x)$  e  $v_z(z)$  da velocidade de escoamento do gelo, é possível estimar a idade  $\tau(z)$  do gelo que se encontra a uma dada profundidade  $H_m - z$ .

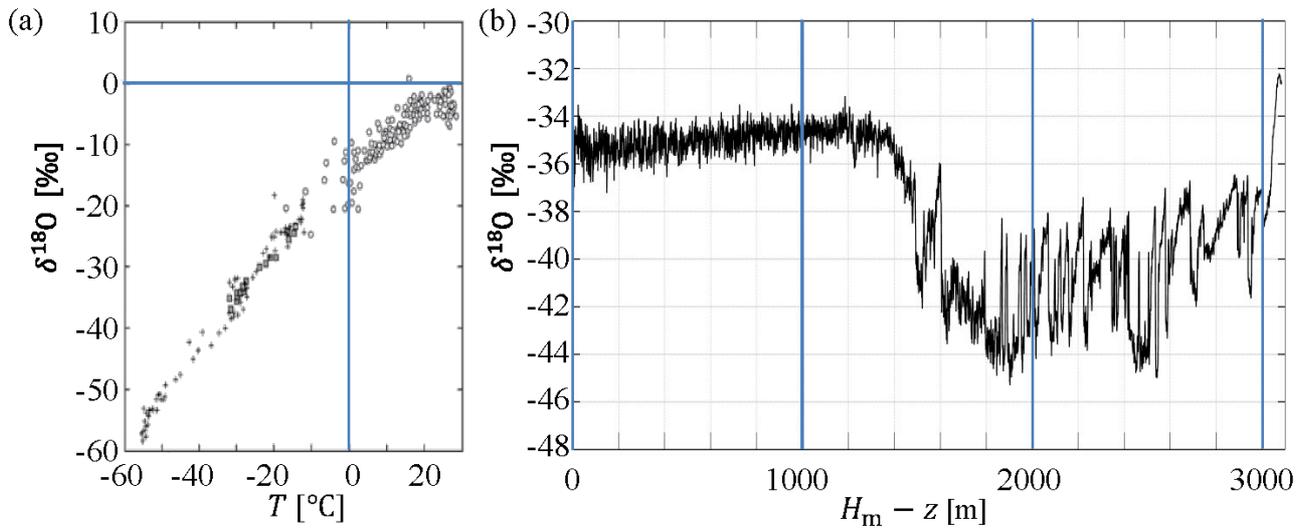
3.6	Obtenha uma expressão para a idade $\tau(z)$ do gelo que se encontra na separação dos gelos ( $x = 0$ ) em função da sua altura $z$ acima do solo.	1,0
-----	--	-----

Um cilindro de gelo extraído por perfuração da camada de gelo da Gronelândia é formado por neve que se depositou ao longo dos tempos. A sua análise poderá assim fornecer informação sobre alterações climáticas ocorridas no passado. Um dos melhores indicadores é designado por  $\delta^{18}\text{O}$ , que é definido como

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ref}} 1000 \text{ ‰},$$

onde  $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$  designa a abundância relativa dos dois isótopos estáveis do oxigénio,  $^{18}\text{O}$  e  $^{16}\text{O}$ . O valor de referência  $R_{ref}$  baseia-se na composição isotópica dos oceanos em torno do equador.

Observações da camada de gelo da Gronelândia mostram que  $\delta^{18}\text{O}$  na neve varia de forma aproximadamente linear com a temperatura – Fig. 3.2(a). Supondo que sempre assim foi,  $\delta^{18}\text{O}$  medido em gelo extraído à profundidade  $H_m - z$  permite estimar a temperatura  $T$  na região em torno da Gronelândia  $\tau(z)$  anos atrás. Medidas de  $\delta^{18}\text{O}$  num cilindro de 3060 m de comprimento extraído da camada de gelo da Gronelândia mostram uma mudança drástica no valor de  $\delta^{18}\text{O}$  em gelo que se encontra a partir de 1492 m de profundidade (ver Fig. 3.2(b)), o que corresponde ao fim da última idade do gelo. A idade do gelo começou há 120000 anos, correspondendo a uma profundidade de 3040 m, e a actual era interglaciar iniciou-se há 11700 anos (profundidade de 1492 m). Suponha que estas duas épocas podem ser descritas por duas taxas de acumulação diferentes,  $c_{ia}$  (idade do gelo) e  $c_{ig}$  (época interglaciar), respectivamente.



**Figura 3.2 (a)** Relação entre  $\delta^{18}\text{O}$  na neve e temperatura média anual à superfície  $T$ . **(b)** Medidas de  $\delta^{18}\text{O}$  em função da profundidade  $H_m - z$ , obtidas num cilindro de gelo retirado de um furo que se estendeu da superfície do glaciar até ao fundo rochoso, num ponto sobre a separação dos gelos da Gronelândia onde  $H_m = 3060$  m.

3.7a	Determine as taxas de acumulação $c_{ia}$ e $c_{ig}$ .	0,8
3.7b	Recorra aos dados da Fig. 3.2 para determinar a mudança de temperatura na transição da idade do gelo para a época interglaciar.	0,2

### Subida do nível do mar devido à fusão da camada de gelo da Gronelândia

A fusão da totalidade do gelo da camada de gelo da Gronelândia provocará a subida global do nível do mar. Uma estimativa grosseira desta subida pode ser obtida supondo que ela será uniforme em todo o oceano e que este tem uma área constante  $A_0 = 3,61 \times 10^{14} \text{ m}^2$ .

3.8	Calcule a subida média do nível do mar devido à fusão da totalidade do gelo da camada de gelo da Gronelândia, sabendo que a sua área actual é $A_G = 1,71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ e que $S_b = 100 \text{ kPa}$ .	0,8
-----	---	-----

A camada de gelo da Gronelândia exerce uma atracção gravitacional sobre o oceano circundante. Se a camada derreter, esta maré alta local perde-se e o nível do mar junto à Gronelândia baixa, contrabalançando parcialmente o efeito da subida do nível do mar calculado mais atrás.

Para estimar a ordem de grandeza desta atracção gravitacional, a camada de gelo da Gronelândia pode ser modelada como uma massa pontual colocada ao nível do solo e possuindo a massa total do gelo da Gronelândia. Copenhaga dista 3500 km sobre a superfície da Terra desta massa pontual. Pode-se considerar que a Terra, sem a massa pontual, é esfericamente simétrica e possui um único oceano espalhado sobre toda a sua superfície (de área  $A_E = 5,10 \times 10^{14} \text{ m}^2$ ). Todos os efeitos da rotação da Terra podem ser desprezados.

3.9	Determine, neste modelo, a diferença $h_{CPH} - h_{OPP}$ entre o nível do mar em Copenhaga ( $h_{CPH}$ ) e num ponto diametralmente oposto à Gronelândia ( $h_{OPP}$ ).	1,8
-----	---	-----

**Folha de Respostas**

Código do País

Número de Estudante (1-5)

3.1	$p(x, z) =$	0,3
3.2a	$\kappa =$	0,9
3.2b	$H(x) =$	0,8
3.2c	$\gamma =$	0,5
3.3	$v_x(x) =$	0,6
3.4	$v_z(z) =$	0,6
3.5	$z(x) =$	0,9
3.6	Idade do gelo a uma dada distância acima do solo: $\tau(z) =$	1,0
3.7a	$c_{ia} =$ $c_{ig} =$	0,8
3.7b	$\Delta T =$	0,2
3.8	Subida do nível global do mar devido à fusão do gelo da Gronelândia =	0,6
3.9	Diferença do nível do mar: $h_{CPH} - h_{OPP} =$	1,8
	<b>Total</b>	<b>9,0</b>