

Instruções Gerais: Prova Teórica (30 pontos)

A prova teórica tem a duração de 5 horas e está cotada para 30 pontos.

Antes da prova

- Não abra os envelopes que contêm os problemas antes do sinal sonoro que indica o começo da prova.
- Tanto o começo como o final da prova serão indicados por sinais sonoros. O tempo de prova será também anunciado no final de cada hora de prova, assim como 15 minutos antes do final (15 minutos antes do último sinal sonoro).

Durante a prova

- Escreva as respostas nas folhas de resposta fornecidas (indicadas com a letra A). Introduza as respostas finais nas caixas apropriadas da folha de resposta correspondente. Para cada problema serão também fornecidas folhas brancas extra destinadas a cálculos mais detalhados (estas folhas estão marcadas com a letra W). Utilize sempre as folhas brancas que correspondem ao problema em que está a trabalhar (verifique o número do problema no cabeçalho da folha branca). Se tiver escrito alguma coisa que não quiser que seja cotado, faça uma cruz por cima.
- Seja o mais conciso possível nas respostas: sempre que possível use equações, operadores lógicos e diagramas. Evite frases longas.
- Use o número apropriado de algarismos significativos nas respostas.
- Frequentemente será possível resolver alíneas do problema mais à frente sem ter resolvido todas as alíneas para trás.
- Uma tabela com constantes físicas estará disponível na próxima página.
- Não é permitido sair do local de trabalho sem permissão. Se necessitar de assistência (encher a garrafa de água, avaria da calculadora, ir à casa de banho, etc.) chame a atenção de um guia levantando uma das três bandeiras que tem à disposição no cubículo ("Refill my water bottle, please", ou "I need to go to the toilet, please", ou "I need help, please", nos outros casos).

No final da prova

- Pare de escrever imediatamente quando tocar o sinal sonoro indicador do final da prova.
- Para cada problema junte as folhas na seguinte ordem: folha de capa (C), perguntas (Q), folhas de resposta (A) e folhas brancas (W).
- Coloque todas as folhas que correspondem a um mesmo problema no mesmo envelope. Coloque as instruções gerais (G) no envelope que sobrar. O código de aluno deverá ser visível através da janela cortada em cada envelope. Entregue também todas as folhas em que não escreveu. Não é permitido levar nenhuma folha de papel para fora da sala de prova.
- Deixe na mesa a calculadora azul providenciada pela organização.
- Os alunos devem levar consigo o equipamento de escrita (2 esferográficas, 1 caneta de filtro, 1 lápis, 1 tesoura, 1 régua, 2 tampões dos ouvidos) assim como a calculadora pessoal (se a tiver levado). Leve também consigo a garrafa de água.

- Espere na mesa até que os envelopes sejam recolhidos. Quando todos os envelopes forem recolhidos os guias conduzirão os alunos para fora da sala de prova.

Tabela de Constantes Físicas

Velocidade da luz no vácuo	c	$=$	$299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividade elétrica do vácuo	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817\dots \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Carga elementar	e	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$
Massa do eletrão	m_e	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Massa do próton	m_p	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Massa do neutrão	m_n	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Unidade de massa atómica	m_u	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Constante de Rydberg	R_∞	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
Constante de gravitação universal	G	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Aceleração da gravidade (em Zurique)	g	$=$	$9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Número de Avogadro	N_A	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Constante dos gases ideais	R	$=$	$8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de massa molar	M_u	$=$	$1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Dois Problemas de Mecânica

Antes de iniciar este problema, leia cuidadosamente as Instruções Gerais que pode encontrar noutro envelope.

Parte A. O Disco Escondido (3,5 pontos)

Considere um cilindro sólido de madeira com raio r_1 e espessura h_1 . Algures dentro deste cilindro a madeira foi substituída por um disco metálico de raio r_2 e de espessura h_2 . O disco metálico está colocado de tal forma que o seu eixo de simetria B é paralelo ao eixo de simetria S do cilindro de madeira. O disco metálico está posicionado a igual distância das duas superfícies do cilindro de madeira. A distância entre os eixos S e B é d . A densidade da madeira é ρ_1 e a densidade do metal é $\rho_2 > \rho_1$. A massa total do sistema é M .

Nesta tarefa colocamos o cilindro de madeira num plano de tal forma que este possa oscilar livremente para a direita e para a esquerda. Na Fig. 1 representamos uma vista de lado e uma vista de cima do objeto.

O objetivo desta tarefa é determinar o tamanho e a posição do disco metálico.

No que se segue, quando for pedido para exprimir o resultado em função de quantidades conhecidas, pode sempre assumir que os seguintes parâmetros são conhecidos:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

O objetivo é determinar r_2, h_2 e d através de medidas indiretas.

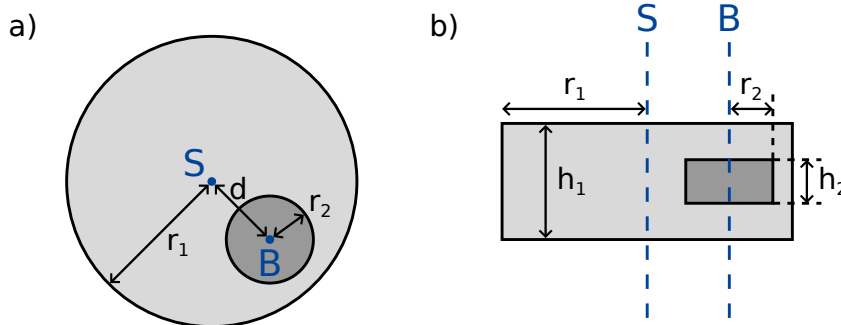


Figura 1: a) vista lateral b) vista de cima.

A distância entre o centro de massa C do sistema e o eixo de simetria S do cilindro de madeira é b . Para obter esta distância colocamos o cilindro numa base horizontal de tal forma que se encontre num equilíbrio estável. Posteriormente, inclinamos a base lentamente até esta atingir um ângulo Θ (ver Fig. 2). Devido ao atrito estático, o cilindro de madeira pode rodar sem deslizar. Irá rodar um pouquinho no plano inclinado até parar no novo estado de equilíbrio, após ter rodado um ângulo mensurável ϕ em torno do eixo de simetria.

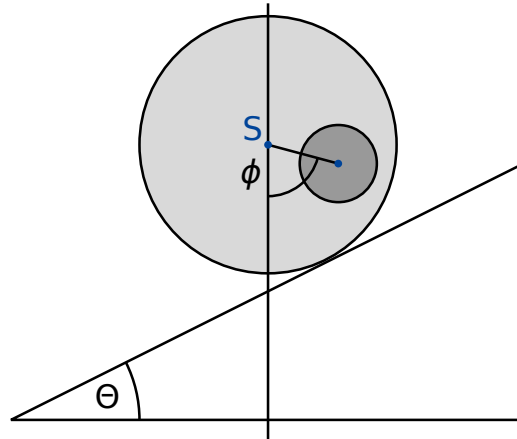


Figura 2: Cilindro na base inclinada.

- A.1** Determine a expressão para b em função das quantidades da equação (1), do ângulo ϕ e da inclinação da base Θ . 0.8pt

A partir de agora assuma que o valor de b é conhecido.

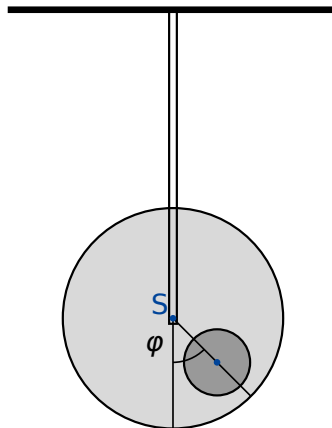


Figura 3: Cilindro suspenso.

Seguidamente iremos medir o momento de inércia I_S do sistema em relação ao eixo de simetria S . Com este objetivo iremos suspender numa barra rígida o cilindro de madeira pelo seu eixo de simetria. Rodamos o cilindro um ângulo φ da sua posição de equilíbrio e deixamo-lo oscilar. Veja a figura 3. Observamos que o ângulo φ segue um movimento periódico com período T .

- A.2** Escreva a equação de movimento obedecida por φ . Escreva o momento de inércia I_S do sistema em relação ao eixo de simetria S em função de T , b e das quantidades conhecidas (1). Pode assumir que o ângulo de oscilação φ é sempre pequeno. 0.5pt

A partir das medidas realizadas nas perguntas **A.1** e **A.2**, queremos agora determinar a geometria e a posição do disco metálico dentro do cilindro de madeira.

- A.3** Encontre a expressão para a distância d em função de b e das quantidades da equação (1). Pode incluir na sua expressão as variáveis r_2 e h_2 pois elas serão calculadas na resposta à pergunta **A.5**. 0.4pt

- A.4** Escreva a expressão para o momento de inércia I_S em função de b e das quantidades da equação (1). Pode incluir na sua expressão as variáveis r_2 e h_2 pois elas serão calculadas na resposta à pergunta **A.5**. 0.7pt

- A.5** Use todos os resultados acima para escrever h_2 e r_2 em função de b , T e das quantidades da equação (1). Pode exprimir h_2 em função de r_2 . 1.1pt

Parte B. Estação Espacial a Rodar (6,5 pontos)

A Alice é uma astronauta que vive numa estação espacial. Esta estação espacial é uma roda gigante de raio R que roda em torno do seu eixo de simetria. Deste modo, os astronautas que vivem no lado de dentro da borda da estação espacial, sentem uma força que se assemelha à força gravítica. A estação espacial é tão leve que a força gravítica que exerce sobre os astronautas é desprezável. Do mesmo modo não considere a curvatura do chão onde estão os astronautas.

- B.1** Qual é o valor da frequência angular ω_{ss} da estação espacial de modo a que os astronautas sintam a mesma aceleração gravítica g_E que à superfície terrestre? 0.5pt

A Alice e o seu amigo astronauta Bernardo têm um desacordo. O Bernardo não acredita que estão a viver na estação espacial e pensa que na realidade estão na Terra. A Alice quer utilizar a Física para provar ao Bernardo que estão na realidade a rodar na estação espacial. Com este objetivo, ela Para isso ela põe um objeto de massa m a oscilar numa mola de constante k . A massa oscila somente na vertical e não pode mover-se na direção horizontal.

- B.2** Assumido que a aceleração da gravidade na Terra é uma constante, qual seria a frequência angular da oscilação ω_E que se mediria se o sistema estivesse na Terra? 0.2pt

- B.3** Qual é a frequência angular ω do movimento da massa que a Alice mede na estação espacial? 0.6pt

A Alice está convencida que a sua experiência mostra ao Bernardo que eles se encontram numa estação espacial. O Bernardo ainda não está convencido. Ele diz que se tomar em conta a variação da gravidade com a altura na superfície da Terra também se obtém um efeito semelhante. Nas tarefas seguintes iremos investigar se o Bernardo está correto.

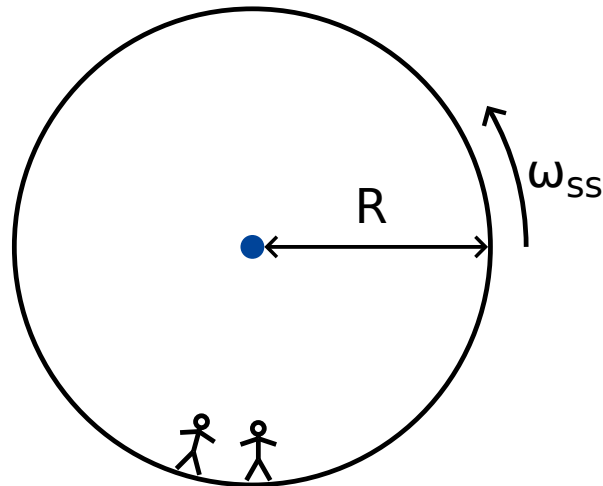


Figura 4: Estação espacial.

- B.4** Derive uma expressão $g_E(h)$ para a aceleração da gravidade à superfície da Terra em função da altura, quando h é pequeno. Calcule a frequência de oscilação $\tilde{\omega}_E$ que seria observada (a aproximação linear é suficiente). Indique o raio da Terra por R_E . Despreze o efeito da rotação da Terra. 0.8pt

De facto, nesta estação espacial, a Alice descobre que a mola oscila com a frequência prevista pelo Bernardo.

- B.5** Qual deverá ser o raio R da estação espacial para que a frequência angular da oscilação ω medida seja idêntica à frequência de oscilação $\tilde{\omega}_E$ que seria medida na superfície da Terra? Exprima a sua resposta em função de R_E . 0.3pt

Farta da teimosia do Bernardo, a Alice tenta realizar outra experiência para mostrar que ele está errado. Ela sobe ao topo de uma torre de altura H na estação espacial e deixa cair uma massa. Esta experiência tanto pode ser analisada a partir do referencial não inercial que roda com os astronautas, como a partir de um referencial inercial.

No referencial que roda com um movimento circular uniforme, os astronautas sentem uma força inercial que se denomina por força de Coriolis, \vec{F}_C . A força \vec{F}_C é aplicada num objeto com massa m que se move com velocidade \vec{v} num referencial que roda com velocidade angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ e é dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Ou seja, o módulo da força de Coriolis é

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

onde ϕ é o ângulo entre a velocidade da massa e o eixo de rotação. A força é perpendicular tanto à velocidade v como ao eixo de rotação. O sinal da força pode ser determinado pela regra da mão direita.

- B.6** Calcule a velocidade horizontal v_x e o deslocamento horizontal d_x (relativo à base da torre, na direção perpendicular à torre) da massa no momento em que esta embate no solo. Pode assumir que a altura H da torre é pequena, de tal modo que a aceleração medida pelos astronautas é constante durante a queda. Também pode assumir que $d_x \ll H$. 1.1pt

Para obter um bom resultado, a Alice decide realizar a sua experiência a partir de uma torre muito mais alta. Para sua surpresa ela nota que a massa atinge o solo imediatamente abaixo do sítio de onde a largou, de tal forma que $d_x = 0$.

- B.7** Encontre um limite mínimo para a altura da torre de forma a que seja possível que $d_x = 0$. 1.3pt

A Alice está disposta a tentar por uma última vez a convencer o Bernardo. Ela volta a utilizar a mola desta vez para demonstrar o efeito da força de Coriolis. Deste modo, ela utiliza uma nova montagem: prende a mola num anel que pode deslizar livremente e sem fricção sobre uma barra colocada na direção x . A mola continua a oscilar somente na direção y . A barra é paralela ao solo e perpendicular ao eixo de rotação da estação espacial. O plano xy é assim perpendicular ao eixo de rotação, com a direção y a apontar para o centro de rotação da estação espacial.

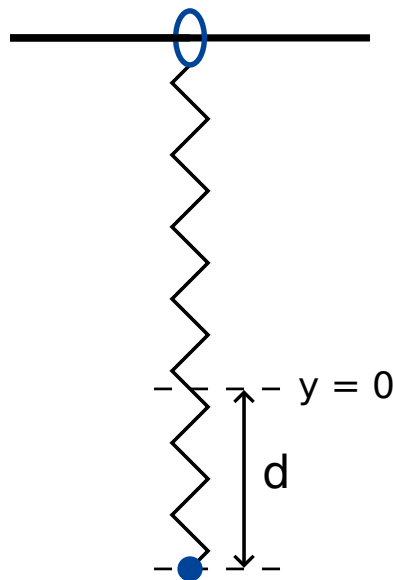


Figura 5: Montagem utilizada.

- B.8** A Alice desloca a massa uma distância d para baixo do ponto de equilíbrio $x = 0$, $y = 0$, e larga a mola (ver figura 5). 1.7pt
- Derive uma expressão para $x(t)$ e para $y(t)$. Pode assumir que $\omega_{ss}d$ é pequeno e pode desprezar a componente segundo y da força de Coriolis.
 - Faça o esboço de uma trajetória $(x(t), y(t))$, indicando todas as características importantes da trajetória como por exemplo a amplitude.

A Alice e o Bernardo continuaram a discutir.

Dois Problemas de Mecânica

Parte A. O Disco Escondido (3,5 pontos)

A.1 (0.8 pt)

$$b =$$

A.2 (0.5 pt)

Equação do movimento para $\varphi =$

$$I_S =$$

A.3 (0.4 pt)

$$d =$$

A.4 (0.7 pt)

$$I_S =$$

A.5 (1.1 pt)

$$h_2 =$$

$$r_2 =$$

Parte B. Estação Espacial a Rodar (6,5 pontos)

B.1 (0.5 pt)

$$\omega_{ss} =$$

B.2 (0.2 pt)

$$\omega_E =$$

B.3 (0.6 pt)

$$\omega =$$

B.4 (0.8 pt)

$$g_E(h) =$$

$$\tilde{\omega}_E =$$

B.5 (0.3 pt)

$$R =$$

B.6 (1.1 pt)

$$v_x =$$

$$d_x =$$

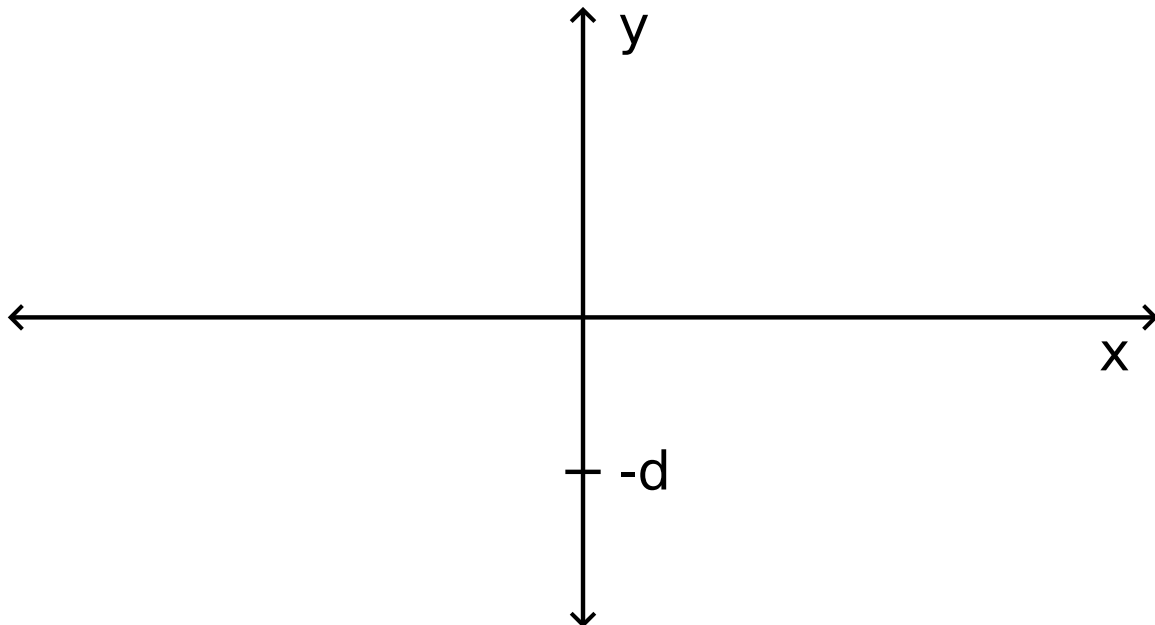
B.7 (1.3 pt)

$$H \geq$$

B.8 (1.7 pt)

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$



Dinâmica Não-Linear em Circuitos Elétricos (10 pontos)

Por favor leia as instruções gerais que se encontram num outro envelope antes de começar a resolver este problema.

Introdução

Os elementos semicondutores não-lineares bi-estáveis (tiristores, por exemplo) são muito usados na eletrónica como interruptores e geradores de oscilações eletromagnéticas. A principal utilização dos tiristores é o controlo de correntes alternas em eletrónica de potência (retificação de corrente alterna para corrente contínua para potências da ordem do MW, por exemplo). Os elementos bi-estáveis podem também ser utilizados como modelos dos fenómenos de auto-organização na Física (que é o objeto da parte B deste problema), na Biologia (parte C) e noutros campos da ciência não-linear atual.

Obejtivos

Estudar instabilidades e dinâmica não trivial de circuitos que incluem elementos com características $I-V$ não lineares e descobrir possíveis aplicações destes circuitos na engenharia e na modelação de sistemas biológicos.

Parte A. Estados estacionários e instabilidades (3 pontos)

A Fig.1 mostra a curva $I - V$ **em forma de S** característica de um elemento não-linear X . Para tensões entre $U_h = 4,00$ V (a tensão de bloqueio) e $U_{th} = 10,0$ V (a tensão de limiar) esta curva característica é uma função multívoca. Para simplificar o problema, o gráfico da Fig. 1 foi escolhido de modo a que esta função seja a aglutinação de várias funções lineares (cada ramo da função é um segmento de reta). Note que se a linha do ramo superior da curva fosse prolongada, passaria pela origem do gráfico. Esta aproximação leva a bons resultados na análise dos tiristores.

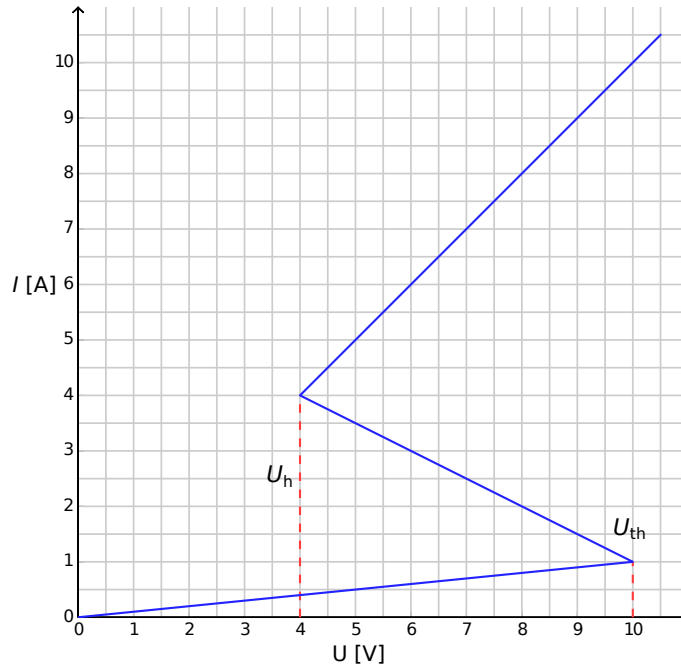


Figura 1: Curva característica ($I - V$) do elemento não-linear X .

- A.1** Use o gráfico para determinar a resistência R_{on} do elemento X no ramo superior da curva $I - V$, e R_{off} no ramo inferior, respetivamente. O ramo intermédio é descrito pela equação 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

Encontre os valores dos parâmetros I_0 e R_{int} .

O elemento X é ligado em série (ver Fig. 2) à resistência R , a uma bobina L e a uma fonte de tensão contínua ideal \mathcal{E} . Diz-se que o circuito se encontra no estado estacionário quando a corrente é constante no tempo, $I(t) = \text{const.}$

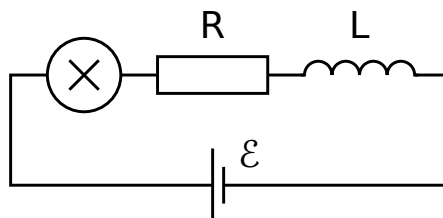


Figura 2: Circuito com o elemento X , a resistência R , a bobina L e a fonte de tensão \mathcal{E} .

A.2 Quantos estados estacionários pode o circuito da Fig. 2 ter para um dado valor de \mathcal{E} quando $R = 3,00 \Omega$? Como muda a resposta quando $R = 1,00 \Omega$? 1pt

A.3 Sejam $R = 3,00 \Omega$, $L = 1,00 \mu\text{H}$ e $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$ no circuito da Fig. 2. Determine os valores da corrente $I_{\text{estacionário}}$ e da tensão $V_{\text{estacionário}}$ aos terminais do elemento não-linear X quando o circuito está no estado estacionário. 0.6pt

Considere que o circuito da Fig. 2 está no estado estacionário com $I(t) = I_{\text{estacionário}}$. Diz-se que este estado estacionário é *estável* se, após uma pequena variação (subida ou descida) da corrente, a corrente volta ao valor estacionário. Por outro lado, se a corrente no sistema continuar a afastar-se do valor estacionário, diz-se que este estado é *instável*.

A.4 Recorra aos valores numéricos da questão **A.3** e estude a estabilidade do estado estacionário com $I(t) = I_{\text{estacionário}}$. O estado estacionário é estável ou instável? 1pt

Parte B. Elementos bi-estáveis não lineares na Física: emissor de rádio (5 pontos)

Vamos agora investigar uma nova configuração do circuito (ver Fig. 3). Desta vez o elemento não-linear X será ligado em paralelo a um condensador de capacidade $C = 1,00 \mu\text{F}$. O conjunto é depois ligado em série a uma resistência $R = 3,00 \Omega$ e a uma fonte de tensão contínua ideal $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$. Verifica-se que o circuito 'oscila': no decurso de um ciclo, o elemento não-linear X salta de um ramo da curva característica $I - V$ para outro.

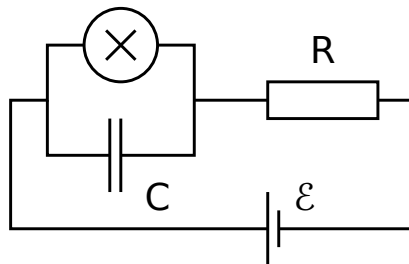


Figura 3: Circuito com o X , o condensador C , a resistência R e a fonte de tensão \mathcal{E} .

B.1 Desenhe o ciclo de oscilação no gráfico $I - V$ graph, não se esquecendo de indicar o seu sentido (horário ou anti-horário). Justifique a sua resposta com equações e diagramas. 1.8pt

B.2 Encontre expressões para os tempos t_1 e t_2 de permanência do sistema em cada um dos ramos da curva $I - V$ durante um ciclo de oscilação. Determine os seus valores numéricos. Determine o valor numérico do período de oscilação T supondo que o tempo requerido para os saltos entre os ramos da curva $I - V$ é desprezável. 1.9pt

B.3 Estime a potência média P dissipada pelo elemento não-linear no decurso de uma oscilação. A estimativa da sua ordem de grandeza é suficiente. 0.7pt

O circuito da Fig. 3 é usado para construir um emissor de rádio. Para este fim, é ligada ao elemento X uma antena linear (um arame direito e comprido) de comprimento s . A ponta da antena está livre. Na antena é criada uma onda eletromagnética estacionária. Considere que a velocidade das ondas eletromagnéticas na antena é igual à velocidade das mesmas ondas no vácuo. O harmónico principal que este emissor de rádio usa tem o período T calculado na questão **B.2**.

B.4 Assumindo que s não pode exceder 1 km, qual é o seu valor ótimo? 0.6pt

Parte C. Elementos bi-estáveis não lineares na Biologia: o neuristor (2 pontos)

Nesta parte do problema iremos considerar uma aplicação dos elementos bi-estáveis não lineares à modelação de processos biológicos. Um neurónio no cérebro humano possui a seguinte propriedade: quando é excitado por um sinal externo, oscila apenas uma vez e regressa ao seu estado inicial. Esta propriedade chama-se 'excitabilidade' e é devido a ela que é possível a propagação de impulsos na rede de neurónios acoplados que forma o sistema nervoso. Um neuristor é um circuito integrado concebido para reproduzir a excitabilidade e a propagação de impulsos. O seu nome resulta da aglutinação de 'neurónio' e 'transistor'.

Vamos tentar construir um modelo simples de um neuristor recorrendo a um circuito que inclui o elemento não-linear X que estudámos anteriormente. Começemos por diminuir a tensão \mathcal{E} no circuito da Fig. 3 até ao valor $\mathcal{E}' = 12,0$ V, o que conduz à paragem das oscilações, permitindo que o sistema atinja o seu estado estacionário. De seguida esta tensão é subitamente aumentada para $\mathcal{E} = 15,0$ V, e, após um certo tempo τ (com $\tau < T$), recoloca-se a tensão no valor \mathcal{E}' (ver Fig. 4). Com este procedimento pode-se constatar que há um valor crítico para este tempo, τ_{crit} , isto é, que o sistema exhibe um comportamento qualitativamente diferente para $\tau < \tau_{\text{crit}}$ e para $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

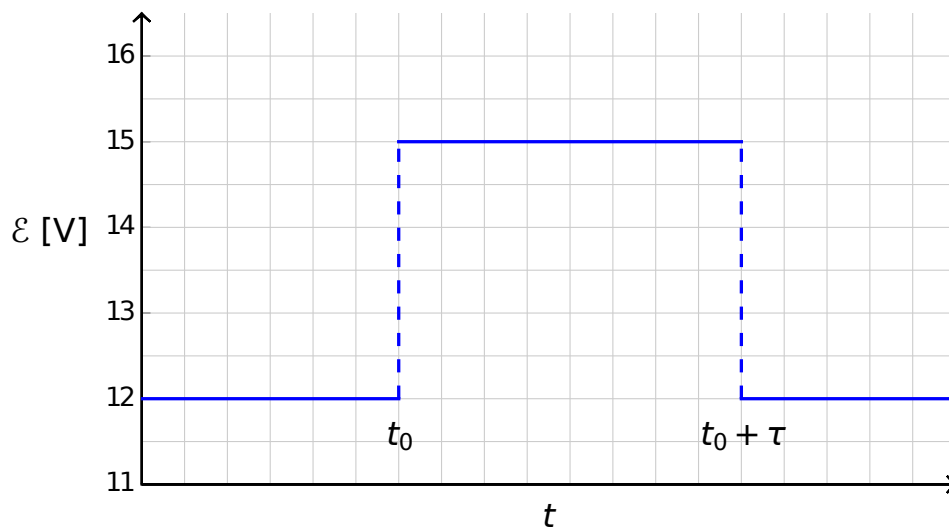


Figura 4: Tensão fornecida pela fonte, em função do tempo.

C.1 Esboce gráficos que mostrem a variação com o tempo da corrente $I_X(t)$ no elemento não-linear X para os casos $\tau < \tau_{\text{crit}}$ e $\tau > \tau_{\text{crit}}$. 1.2pt

C.2 Encontre a expressão e o valor numérico do tempo crítico τ_{crit} para o qual ocorre a mudança de comportamento. 0.6pt

C.3 O circuito representa um neuristor quando $\tau = 1,00 \times 10^{-6}$ s? 0.2pt

Dinâmica Não-Linear em Circuitos Elétricos (10 pontos)

Parte A. Estados estacionários e instabilidades (3 pontos)

A.1 (0.4 pt)

$$R_{\text{on}} =$$

$$R_{\text{off}} =$$

$$I_0 =$$

$$R_{\text{int}} =$$

A.2 (1 pt)

Número possível de estados estacionários para $R = 3,00 \Omega$:

Número possível de estados estacionários para $R = 1,00 \Omega$:

A.3 (0.6 pt)

$$I_{\text{estacionário}} =$$

$$V_{\text{estacionário}} =$$

A.4 (1 pt)

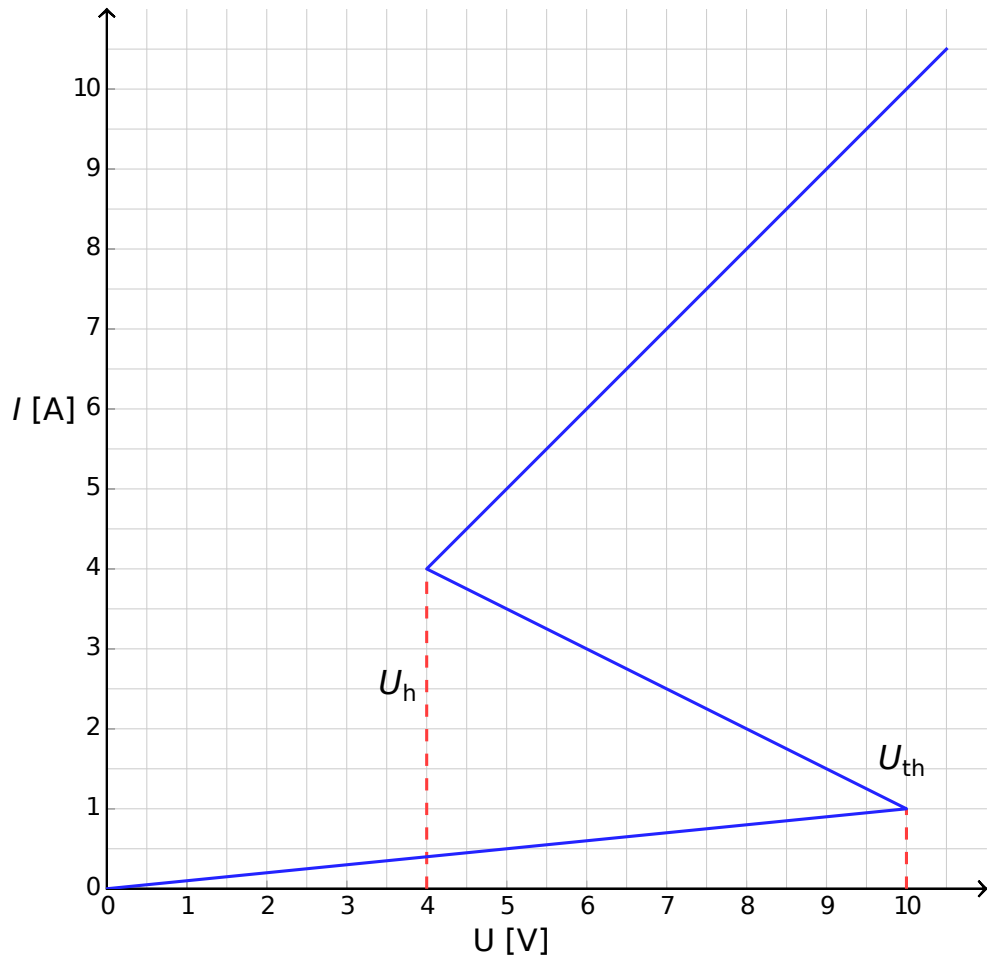
Comportamento para $I(t = 0) > I_{\text{estacionário}}$:

Comportamento para $I(t = 0) < I_{\text{estacionário}}$:

O estado estacionário é: estável? instável?

Parte B. Elementos bi-estáveis não lineares na Física: emissor de rádio (5 pontos)

B.1 (1.8 pt)



Justificação:

B.2 (1.9 pt)

Fórmula para $t_1 =$

Valor numérico de $t_1 =$

Fórmula para $t_2 =$

Valor numérico de $t_2 =$

Valor numérico de $T =$

B.3 (0.7 pt)

$P \approx$

B.4 (0.6 pt)

$s =$

Parte C. Elementos bi-estáveis não lineares na Biologia: o neuristor (2 pontos)

C.1 (1.2 pt)

Diagrama para $\tau < \tau_{\text{crit}}$:

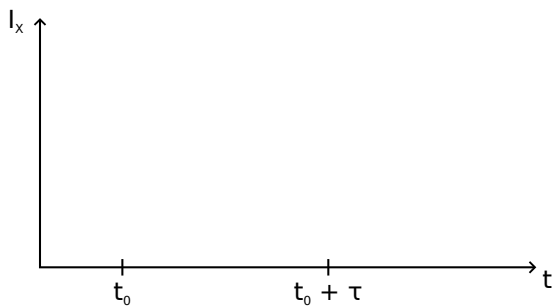
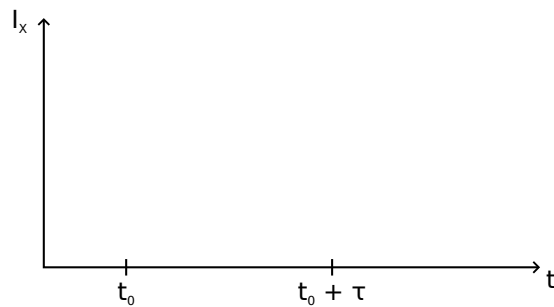


Diagrama para $\tau > \tau_{\text{crit}}$:



C.2 (0.6 pt)

Fórmula para $\tau_{\text{crit}} =$

Valor numérico de $\tau_{\text{crit}} =$

C.3 (0.2 pt)

Este circuito é um neuristor? Sim Não

Large Hadron Collider (10 pontos)

Por favor leia as instruções gerais no envelope separado antes de começar este problema.

Nesta tarefa é discutida alguma física do acelerador de partículas LHC (Large Hadron Collider) no CERN. O CERN é o maior laboratório do mundo em física de partículas. Um dos seus principais objetivos é o de obter informação sobre as leis fundamentais da natureza. Dois feixes de prótons são acelerados até altas energias e guiados ao longo do acelerador por um forte campo magnético e então forçados a colidir um com o outro. Os prótons não estão distribuídos uniformemente ao longo da circunferência no LHC, mas estão agrupados em pacotes de prótons. As partículas resultantes das colisões são estudadas com grandes detetores. Alguns parâmetros do LHC podem ser consultados na tabela 1.

Anel LHC	
Perímetro do anel	26659 m
Número de pacotes em cada feixe de prótons	2808
Número de prótons por pacote	$1,15 \times 10^{11}$
Feixes de Prótons	
Energia dos prótons	7,00 TeV
Energia no Centro de Massa	14,0 TeV

Tabela 1: Valores típicos dos parâmetros relevantes do LHC.

Os físicos de partículas usam unidades convenientes para energia, momento linear e massa. A energia é medida em eletrões-volt [eV]. Por definição, 1 eV é a energia ganha por uma partícula com a carga elétrica elementar, e , que se deslocou ao longo de uma diferença de potencial de um volt ($1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

O momento linear é medido em unidades de eV/c e a massa em unidades de eV/c^2 , em que c é a velocidade da luz no vácuo. Como 1 eV é uma pequena quantidade de energia, os físicos de partículas usam MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) ou TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

A parte A é sobre a aceleração de prótons e de eletrões. A parte B tem a ver com a identificação de partículas produzidas nas colisões no CERN.

Parte A. Acelerador LHC (6 pontos)

Aceleração:

Assuma que os prótons foram acelerados pela diferença de potencial V de forma a que a sua velocidade seja muito próxima da velocidade da luz no vácuo e despreze as perdas de energia devido à radiação ou colisões com outras partículas.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Obtenha a expressão para a velocidade final v dos prótons em função da diferença de potencial de aceleração V e de constantes físicas. | 0.7pt |
|------------|--|-------|

Uma futura experiência no CERN planeia usar prótons do LHC e colidi-los com eletrões que têm uma energia de 60,0 GeV.

- A.2** Para partículas de alta energia e baixa massa o desvio relativo $\Delta = (c - v)/c$ da velocidade final v em relação à velocidade da luz no vázio é muito pequeno. Obtenha uma aproximação de 1ª ordem para Δ e calcule Δ para eletrões com uma energia de 60,0 GeV, usando a diferença de potencial aceleradora V e constantes físicas. 0.8pt

Voltemos agora aos protões no LHC. Assuma que o tubo de feixe tem uma forma circular.

- A.3** Obtenha uma expressão para o campo magnético uniforme B necessário para manter o feixe de protões numa trajetória circular. A expressão deve conter apenas a energia dos protões E , o perímetro L , constantes fundamentais e números. Poderá usar aproximações adequadas se os seus efeitos forem mais pequenos do que a precisão dada pelo menor número de algarismos significativos. Calcule o campo magnético B para um protão de energia $E = 7,00$ TeV, desprezando as interações entre protões. 1.0pt

Potência Radiada:

Uma partícula eletricamente carregada e acelerada radia energia na forma de ondas eletromagnéticas. A potência radiada P_{rad} duma partícula carregada que circule com velocidade angular constante depende apenas da sua aceleração a , da sua carga elétrica q , da velocidade da luz c e da permitividade elétrica no vázio ϵ_0 .

- A.4** Use análise dimensional para obter uma expressão para a potência radiada P_{rad} . 1.0pt

A fórmula correta para a potência radiada contém um factor $1/(6\pi)$; uma derivação relativista fornece um factor adicional γ^4 , com $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

- A.5** Calcule P_{tot} , a potência total radiada no LHC tendo os protões uma energia $E = 7,00$ TeV (conforme tabela 1). Pode usar aproximações adequadas. 1.0pt

Aceleração linear:

No CERN, protões em repouso são acelerados por um acelerador linear de comprimento $d = 30,0$ m através de uma diferença de potencial $V = 500$ MV. Assuma que o campo elétrico é homogéneo. Um acelerador linear consiste em duas placas, como esquematizado na Figura 1.

- A.6** Determine o tempo T que os protões demoram a atravessar o campo elétrico. 1.5pt

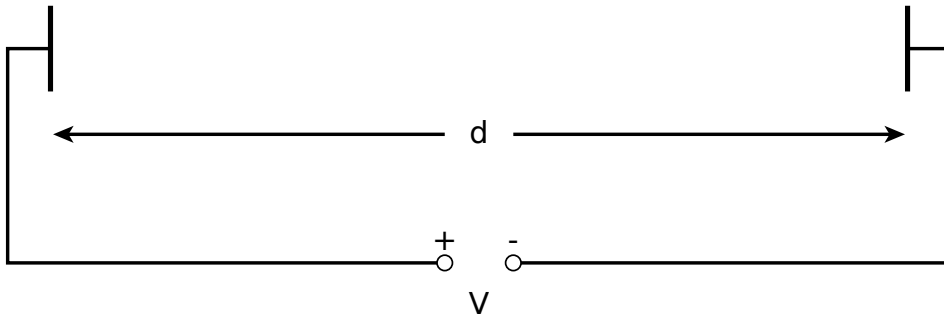


Figura 1: Esquema de um módulo acelerador.

Parte B. Identificação de Partículas (4 pontos)

Tempo de voo:

A identificação das partículas de alta energia geradas numa colisão é importante para interpretar o processo de interação. Um método simples é a medida do tempo (t) que uma partícula com momento linear conhecido leva a percorrer uma distância l no chamado detetor de tempo de voo (ToF para Time-of-Flight). Algumas partículas que são identificadas no detetor, bem como as respetivas massas, são indicadas na Tabela 2.

Partícula	Massa [MeV/c ²]
Deutério	1876
Protão	938
Kaão carregado	494
Piãõ carregado	140
Elétrão	0,511

Tabela 2: Partículas e respetivas massas.

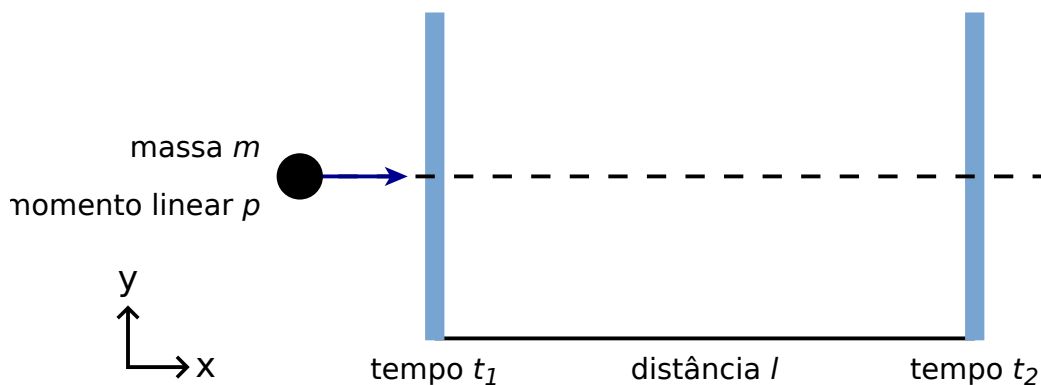
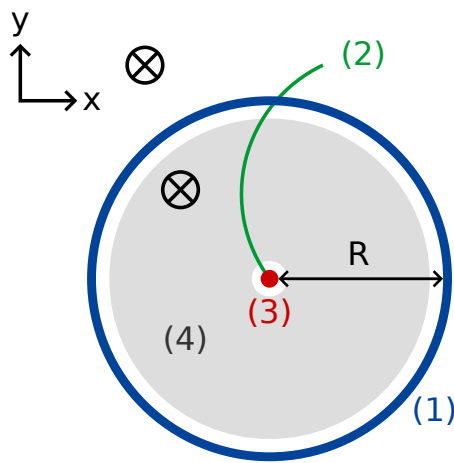


Figura 2: Vista esquemática dum detetor de tempo de voo.

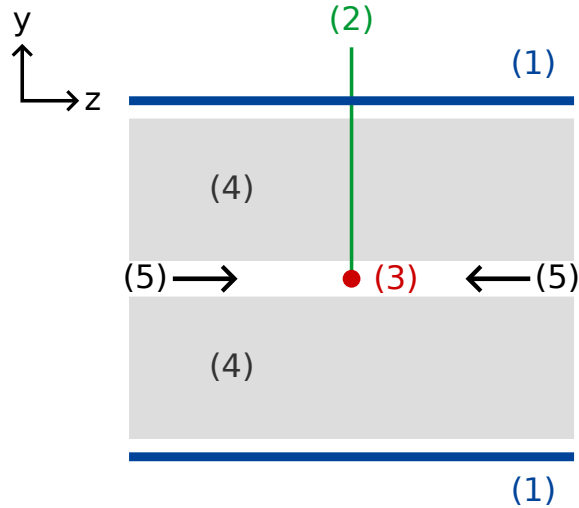
- B.1** Exprima a massa m da partícula em função do momento linear p , da distância percorrida l e do tempo de voo t , assumindo que as partículas têm carga elétrica elementar e e que viajam com velocidade próxima de c numa trajetória retilínea no detetor ToF, perpendicular aos dois planos de deteção (veja a Figura 2). 0.8pt

- B.2** Calcule a distância mínima l num detetor ToF que permita distinguir inequivocamente um kaão carregado dum pião carregado, sabendo que os respetivos módulos do momento linear têm ambos o valor $1,00 \text{ GeV}/c$. Para uma boa separação das duas partículas é necessário que a diferença entre as duas medidas de tempo de voo seja maior do que o triplo da resolução temporal do detetor. A resolução temporal típica de um detetor de tempo de voo é 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$). 0.7pt

No que se segue, partículas produzidas numa experiência típica em LHC são identificadas por um conjunto de dois detetores, um detetor de trajetórias e um detetor ToF. Na Figura 3 mostra-se a montagem no plano transverso aos feixes de protões e também no plano longitudinal (contendo os feixes de protões). Ambos os detetores são tubos à volta da região de interação. Os feixes estão alinhados com os eixos destes tubos. O detetor de trajetórias mede as trajetórias das partículas eletricamente carregadas que atravessam um campo magnético paralelo aos feixes de protões. O raio r da trajetória permite determinar o momento transversal p_T da partícula (componente do momento linear perpendicular à linha dos feixes de protões). Como o instante de colisão é conhecido, basta um tubo no detetor de tempo de voo para medir o tempo do voo desde o ponto de interação até ao tubo ToF. Este tubo ToF está localizado junto ao detetor de trajetórias (lado de fora deste). Para esta tarefa pode assumir que todas as partículas criadas na colisão viajam perpendicularmente aos feixes de protões, isto é, que não têm componente do momento linear paralela à linha dos feixes.



plano transverso



corte da vista
longitudinal no centro do tubo
contendo a linha dos feixes

- (1) - Tubo ToF
- (2) - traço (trajetória) da partícula
- (3) - ponto de interação (colisão)
- (4) - detetor de trajetórias
- (5) - feixes de prótons
- ⊗ - campo magnético

Figura 3 : Montagem experimental para a identificação de partículas com um detetor de trajetórias e um detetor ToF. Ambos os detetores são tubos rodeando o ponto de interação, localizado no eixo destes. Do lado esquerdo mostra-se a vista perpendicular à linha dos feixes (plano transversal) e do lado direito a vista contendo a linha dos feixes (plano longitudinal). A partícula está a viajar perpendicularmente à linha dos feixes.

B.3 Exprima a massa da partícula em função do campo magnético B , do raio R do tubo ToF, de constantes fundamentais e das quantidades medidas: raio da trajetória r e tempo de voo t . 1.7pt

Foram detetadas quatro partículas e é necessário identificá-las. O campo magnético no detetor de trajetórias foi $B = 0,500$ T. O raio R do tubo ToF foi $3,70$ m. As medidas obtidas foram ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Partícula	Raio da trajetória r [m]	Tempo de voo t [ns]
A	5,10	20
B	2,94	14
C	6,06	18
D	2,31	25

B.4 Identifique as quatro partículas através do cálculo da sua massa.

0.8pt

Large Hadron Collider (10 pontos)

Parte A. Acelerador LHC (6 pontos)

A.1 (0.7 pt)

$v =$

A.2 (0.8 pt)

aproximação: $\Delta =$

valor: $\Delta =$

A.3 (1.0 pt)

fórmula: $B =$

valor: $B =$

A.4 (1.0 pt)

$P_{\text{rad}} \propto$

A.5 (1.0 pt)

$P_{\text{tot}} =$

A.6 (1.5 pt)

$T =$

Parte B. Identificação de Partículas (4 pontos)

B.1 (0.8 pt)

$m =$

B.2 (0.7 pt)

$l =$

B.3 (1.7 pt)

$m =$

B.4 (0.8 pt)

Partícula	Massa medida; unidade de massa [] :	Identificada como:
A		
B		
C		
D		