

Matéria escura

A primeira inferência formal da existência de matéria escura foi dada por Fritz Zwicky que se baseou nas suas observações da dinâmica do aglomerado de galáxias Coma, um aglomerado de galáxias que consiste de cerca de mil galáxias. Zwicky usou o teorema do Virial para estimar a massa do aglomerado de galáxias. Em um sistema solar simples, onde o planeta gira em torno do Sol em órbita circular, o teorema do Virial diz que a energia cinética está exatamente relacionada com a energia potencial gravitacional. Enquanto no caso geral de um sistema com muitas partículas confinadas por alguma interação, o teorema do Virial, relaciona a média temporal das energias cinética e potencial.

Em 1933, baseado nas observações da velocidade das galáxias próximo das bordas do aglomerado de galáxias Coma, Zwicky estimou que um aglomerado possui mais massa do que era observado visivelmente (i.e. as galáxias). A atração gravitacional da matéria observável (as galáxias) era muito pequena para explicar a velocidade das galáxias. Portanto, deve haver alguma massa escondida para explicar velocidades tão grandes. Essa massa escondida é a massa da matéria escura. No que se segue, assuma que a massa de cada galáxia é a soma de sua massa visível com a massa da matéria escura que se move junto àquela galáxia, e que a massa da matéria escura interage com a matéria visível apenas gravitacionalmente.

A. Aglomerado de galáxias

Considere um aglomerado de galáxias que consiste de um grande número N de galáxias e matéria escura que são distribuídas uniformemente em uma esfera de raio R com massa total (galáxias e matéria escura) do aglomerado M . Assuma que a massa média da galáxia (visível e matéria escura) é m .

A.1	Assumindo uma distribuição contínua de matéria no aglomerado, encontre a energia potencial gravitacional total do aglomerado em termos de M e R .	1.0 pt.
-----	---	---------

Devido à expansão cosmológica, qualquer objeto distante estará se afastando de um observador na Terra com uma velocidade que depende da distância do observador até o objeto. O valor de uma dada linha de frequência da série de Lyman (uma linha espectral da linha de hidrogênio) de uma supernova do tipo IA na i -ésima galáxia do aglomerado vale f_i , com $i = 1, \dots, N$, enquanto a mesma frequência de Lyman na Terra vale f_0 .

A.2	Determine a velocidade média V_{cr} de todo o aglomerado de galáxias que está se afastando da Terra em termos de f_i (com $i = 1, \dots, N$), f_0 e N . Considere que a velocidade de uma galáxia é muito pequena quando comparada com a velocidade da luz c .	0.5 pt.
-----	---	---------

--	--	--

A.3	Assumindo que as velocidades das galáxias com relação ao centro do aglomerado são isotrópicas (a mesma em todas as direções), determine a velocidade quadrática média v_{rms} das galáxias com relação ao centro do aglomerado em termos de N , f_i (com $i = 1, \dots, N$) e f_0 . Desse resultado determine a energia cinética média de uma galáxia com relação ao centro do aglomerado em termos de v_{rms} e m .	1.5 pt.
-----	---	---------

Para encontrar a massa total do aglomerado, podemos usar o Teorema do Virial. Este teorema afirma que para um sistema de partículas confinado pelas suas forças conservativas,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

onde $\langle K \rangle_t$ é a média temporal da energia cinética total, $\langle U \rangle_t$ é a média temporal da energia potencial total, e γ é uma constante. Este teorema pode ser obtido assumindo que para um sistema de partículas confinadas pela sua própria interação, as magnitudes da posição e momento de cada partícula são finitos, e, portanto, a seguinte quantidade

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

é finita.

A.4	Usando o fato de que a média temporal de $d\Gamma/dt$ para um longo período de tempo se anula, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, determine γ no teorema do Virial mencionado acima para o caso da interação gravitacional.	1.7 pt.
-----	--	---------

A.5	Partindo dos resultados anteriores, determine a massa total da matéria escura no aglomerado em termos de N , m_g , R e v_{rms} , onde m_g é o valor médio da massa visível total. Observe que a velocidade quadrática média da matéria escura é a mesma que aquela das galáxias.	0.5 pt.
-----	--	---------

B. Matéria escura numa Galáxia

A matéria escura também existe dentro e no entorno de uma galáxia. Considere uma galáxia esférica com uma borda visível de raio R_g (uma distância externa aproximada na qual um grande número de estrelas ainda é visível, mas ainda é possível que um pequeno número de estrelas possa estar distribuído fora da região de raio R_g). Assuma que as estrelas na galáxia são partículas pontuais com massa média m_s . As estrelas na galáxia são distribuídas homoganeamente com uma densidade de estrelas n , quantidade de

estrelas por unidade de volume, e se movem em órbitas circulares.

B.1	Se a galáxia consiste apenas de estrelas, encontre a velocidade $v(r)$ de uma estrela como função da sua distância ao centro da galáxia e esboce um gráfico de $v(r)$ para $r < R$ e $r \geq R$.	0.8 pt.
-----	---	---------

A existência de matéria escura pode ser inferida a partir da curva de rotação da galáxia, que é um gráfico de $v(r)$ obtido a partir de observações. A figura abaixo mostra um padrão comum da curva de rotação de uma galáxia. Por simplicidade, assuma que $v(r)$ é uma função linear para $r \leq R_g$ e possui um valor constante v_0 para $r > R$.

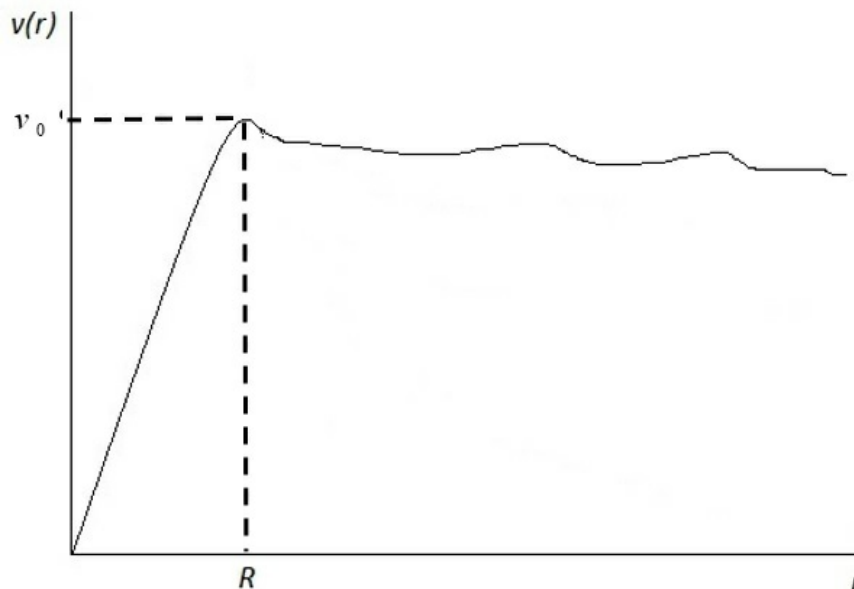


Fig. 1 Gráfico da curva rotacional de uma estrela numa galáxia.

B.2	Encontre a massa total m_R daquela parte da galáxia que esta dentro de uma esfera de raio R_g em termos de v_0 e R_g .	0.5 pt.
-----	--	---------

A discrepância entre a figura B.2 e o gráfico obtido em B.1 indica a existência de matéria escura.

B.3	Determine a densidade de massa da matéria escura em função de r, R_g, v_0, n e m_s para $r < R_g$ e $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	--	---------

C. Gás interestelar e Matéria escura

Agora considere uma galáxia jovem cuja massa é predominantemente composta por gás interestelar e matéria escura (despreze a massa das estrelas). Assuma que o gás interestelar consiste de partículas idênticas de massa m_p . A densidade de número $n(r)$, de partículas por unidade de volume, e a temperatura $T(r)$ do gás depende da distância r até o centro da galáxia. Apesar de vários processos físicos ocorrerem no gás, podemos assumir que o gás está em equilíbrio hidrostático devido à sua pressão e à atração gravitacional da galáxia.

C.1	Encontre o gradiente de pressão do gás dP/dr , em termos de $M'(r)$, r e $n(r)$. Considere que $M'(r)$ é a massa total do gás e da matéria escura contidos numa esfera de raio r cujo centro encontra-se no centro da galáxia.	0.5 pt.
-----	--	---------

C.2	Assumindo que o gás interestelar é um gás ideal, encontre $M'(r)$ em termos de $n(r)$, $T(r)$ e de suas derivadas com relação r .	0.5 pt.
-----	--	---------

Assuma a seguir, por simplicidade, que o gás apresenta uma distribuição isotérmica a uma temperatura T_0 e que a densidade de número do gás interestelar é dada por

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

onde α e β são constantes.

C.3	Encontre a densidade de massa da matéria escura como função de r dentro da galáxia.	1.0 pt.
-----	---	---------

Terremoto, Vulcão e Tsunami

Indonésia é um supermercado de desastres naturais. Quase todos os desastres naturais já ocorreram na Indonésia, assim como erupções vulcânicas, terremotos e tsunamis.

A. Erupção vulcânica de Merapi



(Fig. 1: Nuvem piroclástica durante a erupção de Merapi, Cortesia do escritório Volcanológico de Yogyakarta, BPPTKG)

O vulcão Merapi em Yogyakarta é um dos vulcões mais ativos em Java. Os fluxos piroclásticos são características conhecidas das erupções vulcânicas. O fluxo piroclástico é uma mistura quente de gás e rochas que viaja se afastando do vulcão. Para o vulcão Merapi, a velocidade de fluxo é aproximadamente 700 km/h. Em 26 de outubro de 2010, o vulcão Merapi mostrou seu caráter explosivo ao produzir uma pluma de cinza que atingiu 12 km de altitude (Fig. 1) e correntes piroclásticas que causaram o deslocamento de cerca de 20 000 pessoas em torno do vulcão.

Vamos investigar as causas da maior erupção de Merapi em 2010. É sabido pelos geofísicos que a influência da água externa no magma tem papel importante no comportamento explosivo das erupções vulcânicas (erupções hidro-magmáticas). Vamos assumir que estamos tratando de um vulcão como um sistema que consiste de uma mistura de partículas magmáticas e água. A estrutura de ventilação do vulcão e a atmosfera formam o limite do sistema. Considera-se que a erupção explosiva acontece em dois estágios, (1) uma interação instantânea magma-água, e (2) uma expansão do sistema. No primeiro estágio, uma massa de magma (m_m) a uma temperatura absoluta (T_m) se mistura com uma massa de água externa (m_w) a uma temperatura absoluta (T_w). O equilíbrio térmico é atingido quase instantaneamente. Essa interação pode ser tratada como um processo com volume aproximadamente constante. Os calores latentes de evaporação da água e de fusão do magma podem ser desprezados.

A.1	Encontre a temperatura de equilíbrio do primeiro estágio em termos das massas e da capacidade térmica por unidade de massa da água c_{Vw} e do magma c_{Vm} .	0.4 pt.
-----	---	---------

A.2	Determine a pressão de equilíbrio no primeiro estágio assumindo que a mistura pode ser considerada como um gás ideal. Assuma que o volume por unidade de mol da mistura é v_e .	0.3 pt.
-----	---	---------

A expansão do sistema (segundo estágio) pode ocorrer de diversas maneiras, uma das quais é a detonação térmica. Apesar desse processo ser relativamente complicado, podemos medir empiricamente a velocidade relativa da mistura que entrou em erupção. A velocidade do gás durante a erupção depende da pressão p , da massa total m e do volume V da mistura dentro do vulcão.

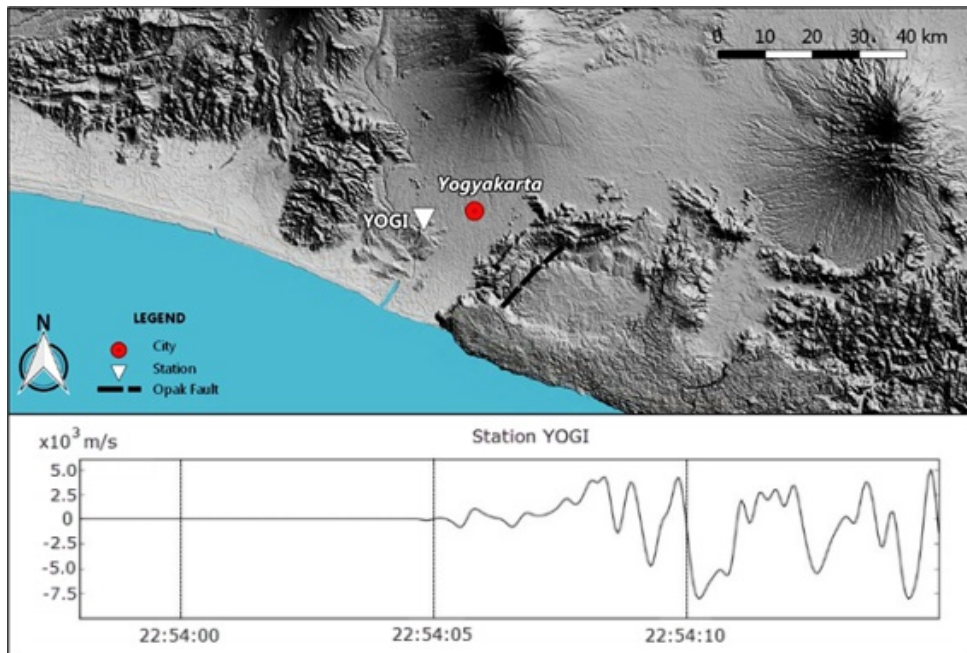
A.4	Expresse a velocidade do gás durante a erupção em termos de p , m e V , a menos de uma constante de proporcionalidade κ .	0.3 pt.
-----	--	---------

A pressão observada é da ordem de 100 MPa. Isso faz com que a velocidade (relativa) da erupção possa ser da ordem de uma velocidade balística.

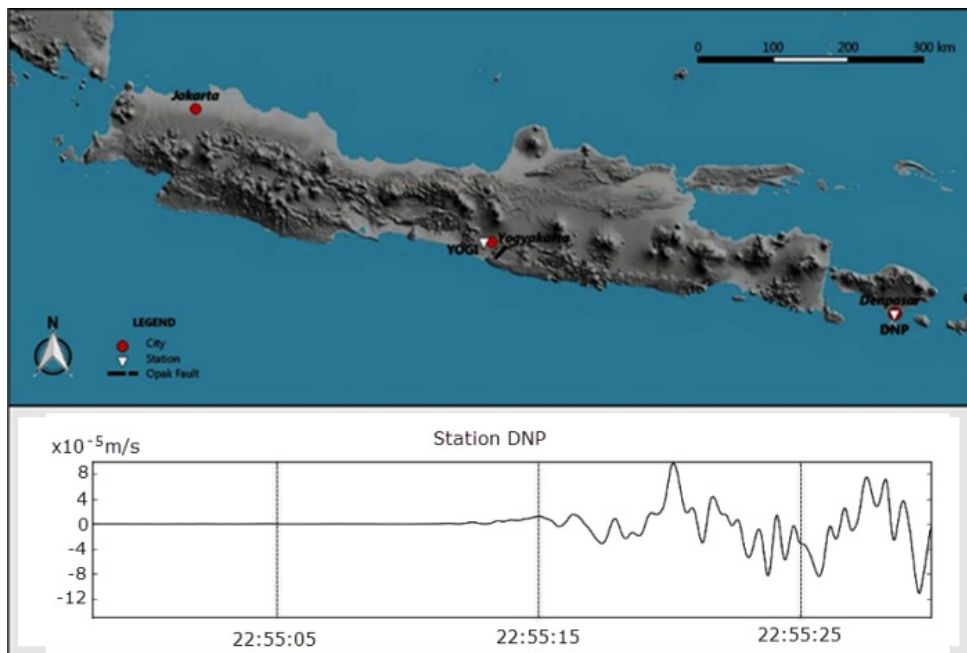
B. O terremoto de Yogyakarta

Em 2006, o terremoto de Yogyakarta com magnitude $M_w = 6.4$, que destruiu vários prédios nas áreas de Bantul e Yogyakarta, ocorreu às 05:54:00.00 no horário local ou 22:54:00.00 UTC. O terremoto foi causado por um deslocamento rápido na falha de Opak (veja a Fig. 2). O hipocentro foi localizado 15 km abaixo da superfície.

A onda sísmica que se propaga dentro crosta da Terra pode ser gravada usando um sismógrafo. O diagrama do sismógrafo é chamado de sismograma (parte inferior das Figs. 2 e 3). Os sismogramas representam a velocidade vertical do solo como função do tempo gravado pela estação sísmica em Gamping Station Yogyakarta (YOGI) (Fig. 2) e Denpasar, Bali (DNP) (Fig. 3). Em geral, uma onda sísmica consiste de três tipos de onda: a onda longitudinal ou primária (onda- P), a transversal ou secundária (onda- S) e a onda superficial. A onda- P e a onda- S viajam na subsuperfície enquanto a onda superficial viaja na superfície da Terra. Ondas sísmicas viajando através da camada da crosta para as estações podem ser divididas naquelas que se propagam em linha reta, naquelas que se refletem na interface com o manto, e naquelas que retornam à crosta após serem refratadas pelo manto e se propagarem na interface dos mesmos. A onda longitudinal ou onda primária possui a maior velocidade, enquanto a onda superficial possui a menor velocidade, cerca de 60% da onda- P .



(Fig. 2: Localização no mapa de YOGI)



(Fig. 3: Localização no mapa de DNP (Denpasar))

A distância entre o epicentro (a projeção do hipoc ntro na superfície da Terra) e as estações YOGI e DNP são, respectivamente, 22.5 e 500 km. A profundidade da crosta da Terra em Java, Indonésia,   30 km. Logo abaixo da crosta da Terra está a camada de manto terrestre. Assim como qualquer outro fen meno ondulatório, as ondas sísmicas também satisfazem a lei de Snell. Neste problema assumimos que a curvatura da Terra pode ser desprezada.

B.1	A Fig. 2 mostra o sismograma na estação YOGI. Utilize os dados para encontrar a velocidade da onda- P na crosta da Terra.	0.5 pt.
B.2	Encontre o tempo de deslocamento das ondas direta P e da onda refletida devido ao terremoto de Yogyakarta e que chegaram à estação DNP em Denpasar.	0.6 pt.

Assuma que a Terra é composta por apenas duas camadas: a crosta e o manto, a onda primária se propaga na crosta e no manto com velocidades constantes e diferentes. A velocidade dentro do manto é maior que na crosta. Note que a onda- P refratada no manto em um ângulo reto (90°) é refratada de volta para a crosta em todos os pontos de sua trajetória ao percorrer a interface entre a crosta e o manto.

B.3	Encontre a velocidade da onda- P dentro o manto.	1.2 pt.
-----	--	---------

Para considerar uma estrutura mais realista da Terra, a crosta pode ser dividida em um número de camadas finas de forma que a velocidade de uma onda sísmica é uma função que depende da profundidade z de acordo com $v(z) = v_0 + az$, onde a é uma constante e agora podemos considerar que o hipocentro está na superfície. Neste modelo, a trajetória descrita pela onda é curva.

B.4	Vamos definir o parâmetro da trajetória $p = \sin \theta(z)v(z)$, onde $\theta(z)$ é o ângulo entre o raio e a normal. Suponha que a onda sísmica chega à estação com parâmetro de trajetória p ; expresse a distância até o epicentro em termos de p , v_0 e a . Assuma que o hipocentro está muito próximo da superfície da Terra.	1.4 pt.
-----	---	---------

B.5	Encontre o tempo de deslocamento T do epicentro até uma estação T , na forma de uma integral em z .	1.0 pt.
-----	---	---------

A Terra consiste de um empilhado de camadas homogêneas cuja velocidade em cada camada é v_i e a espesura de cada uma δz_i .

B.6	Partindo do resultado do problema anterior, encontre o tempo de deslocamento aproximado (T) do epicentro até a estação DNP assumindo que a crosta consiste de somente três camadas discretas, ($i = 1, 2, 3$), caracterizadas por $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km.	1.0 pt.
-----	--	---------

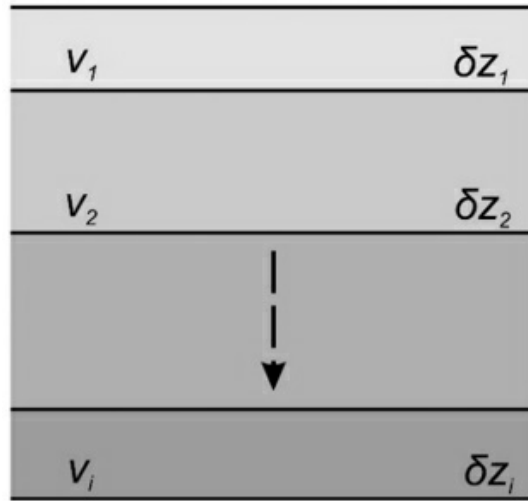


Fig. 4: Um modelo simplificado das camadas da Terra.

C. Tsunami de Java

O terremoto e o tsunami de 2006 de Pangandaran ocorreu às 15:19:27 do horário local em 17 de julho na costa oeste e central de Java. Durante um terremoto onde o epicentro está sob uma falha na crosta que se encontra no oceano, é possível que uma quantidade considerável de água seja deslocada, produzindo uma onda na água chamada de tsunami. Em outras palavras, um tsunami é uma onda de águas rasas que é iniciada por uma pequena amplitude mas com comprimento de onda extremamente longo. Considere que uma falha causa uma subida repentina do solo oceânico conforme mostrado na Fig. 5. Assuma que a energia do terremoto é transformada em energia potencial da água erguida nesse oceano. Para um modelo simples, consideramos a parte da água erguida durante o terremoto como uma caixa de área $\lambda L/2$ (onde $L \gg \lambda$) e altura h .

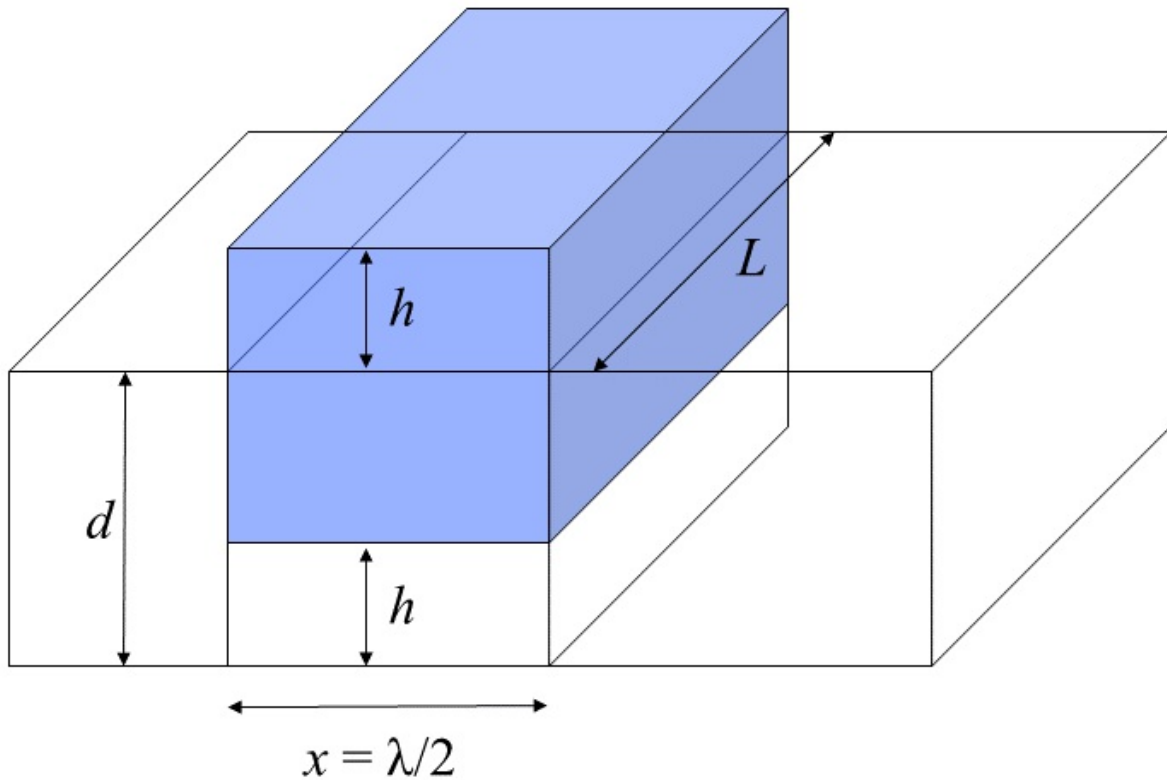


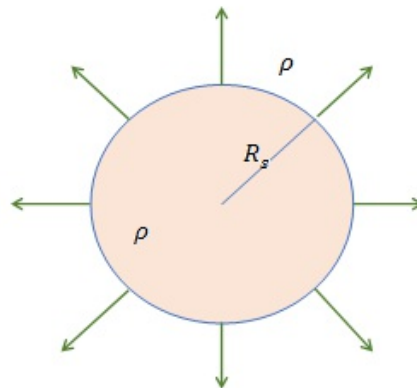
Fig. 5: Ilustração da onda tsunami, a profundidade do oceano é d .

C.1	Encontre a energia potencial armazenada na água erguida devido ao terremoto. Assuma que a densidade da água do mar é ρ .	0.4 pt.
C.2	Encontre a velocidade do tsunami a menos de um fator adimensional.	1.2 pt.
C.3	Utilizando um argumento de energia, determine a amplitude da onda tsunami como função da profundidade, assumindo que a profundidade varia lentamente e sabendo que a uma profundidade d_0 a amplitude é A_0 .	1.3 pt.

Expansão Cósmica

Devido ao movimento relativo das galáxias observado da Terra, o comprimento de onda do espectro visível de uma galáxia em particular difere do seu comprimento de onda original, esse é conhecido como o efeito Doppler eletromagnético. Espera-se que para um conjunto de galáxias, haja distribuições aleatórias dos desvios no comprimento de onda: alguns positivos (desvio para o vermelho) e alguns negativos (desvio para o azul). Contudo, observações mostram que todas, exceto para grupos de galáxias mais próximos, possuem desvios para o vermelho. Isso deve ser verdade mesmo que a observação seja feita num ponto diferente do universo. Como conclusão, nosso universo deve estar se expandindo. Por outro lado, irregularidades locais do universo podem ser desprezadas para escalas com mais de 100 Mpc, sendo $1 \text{ pc} = 3.26$ anos-luz. Tomando as médias sobre grandes escalas, as distribuições aglomeradas de galáxias se torna mais e mais isotrópica (independente da direção) e homogênea (independente da posição). Portanto, podemos assumir o universo como um corpo com densidade de massa uniforme ρ e que está expandindo.

A. Expansão do Universo



Como um modelo simples do universo, vamos considerar uma esfera de densidade constante expandindo imersa num meio de uma esfera infinita com a mesma densidade. Suponha que num determinado instante, o raio da esfera é R_s . Para expressar a expansão da esfera, a dependência temporal do raio $R(t)$ pode ser expressa pelo fator de escala $a(t)$, ou seja $R(t) = a(t)R_s$.

Usando a Lei de Newton da gravitação para determinar a velocidade do elemento de massa nas bordas da esfera de acordo com o modelo do nosso universo, podemos obter as equações de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

onde k é uma constante adimensional.

A.1	Determine a constante A_1 na equação (1).	1.3 pt.
-----	---	---------

A discussão a seguir é não relativística. No entanto, ela pode ser estendida para um sistema relativístico ao reinterpretar $\rho(t)c^2$ como a densidade de energia total (excluindo a energia potencial gravitacional). Nesse sistema relativístico a segunda equação de Friedmann é:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

que pode ser obtida usando a primeira lei da termodinâmica de um sistema adiabático, onde c e p denotam a velocidade da luz e a pressão na esfera.

A.2	Determine as constantes A_2 na equação (2).	0.9 pt.
-----	---	---------

Para resolver as Eqs. (1) e (2), podemos assumir a relação $p = p(\rho)$, de forma que $p(t)/c^2 = wp(t)$, onde w é uma constante. Há ainda um fator $H = \dot{a}/a$ chamado de parâmetro de Hubble. Os valores iniciais dos parâmetros serão simbolizados com o subscrito 0, ou seja $t_0, \epsilon_0, H_0, a_0$ e assim por diante. Por simplicidade, tomamos $a_0 = 1$.

Acredita-se que o universo se iniciou de uma grande explosão chamada de Big-Bang que produziu radiação de partículas relativísticas. Durante a expansão, o universo está resfriando e as partículas se tornam não relativísticas. Contudo, observações recentes mostram que o universo atual está dominado por uma densidade de energia cosmológica constante. Para o caso de um fóton, como o universo está expandindo, o comprimento de onda do fóton expande proporcionalmente ao fator de escala.

A.2	Para cada um dos três casos a seguir determine o valor resultante de w : (i) um universo preenchido somente com radiação (i.e. energia do fóton), (ii) um universo preenchido somente com matéria não relativística e (iii) um universo com densidade de energia constante.	1.2 pt.
-----	---	---------

A.3	No caso de $k = 0$, encontre $a(t)$ para cada um dos casos de (i) a (iii) mencionados no item A.3. Use a condição inicial $a(t = 0) = 0$ para os casos (i) e (ii) e a condição $a_0 = 1$ para o caso (iii).	1.2 pt.
-----	--	---------

A constante k na Eq. (1) se refere à classificação da geometria espacial do universo. Seu valor pode ser $k = +1$ para uma curvatura positiva do universo (fechado) $k = 0$ para um universo plano (infinito), e $k = -1$ para um universo de curvatura negativa (aberto, infinito). Vamos definir a razão das densidades $\Omega = \rho/\rho_c$, onde $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ é a densidade de energia crítica. Note que A_1 foi obtido no problema A.1.

A.4	Expresse k na Eq. (1) em termos de Ω , H , a e R_0 .	0.1 pt.
A.5	Encontre um intervalo para Ω que corresponde a cada valor de $k = +1$, $k = 0$ e $k = -1$.	0.3 pt.

B. Motivação para introduzir a fase de expansão e suas condições gerais

A observação da radiação cósmica de fundo na faixa de microondas (CMB) sugere que no presente o universo é plano. O problema é que se isto for verdade então o universo presente deveria ter se iniciado de um universo exatamente plano, de outra forma qualquer desvio da planicidade iria eventualmente crescer ao longo do tempo e destruiria a planicidade atual.

B.1	Encontre $(\Omega(t) - 1)$ como função do tempo para o universo quando ele é dominado por radiação ou por matéria não-relativística (veja o problema A.3).	0.5 pt.
-----	--	---------

Para resolver o problema, em um instante anterior na sua história, o universo deveria seguir um período dominado por uma densidade de energia constante que leva a uma expansão exponencial chamada de período de expansão.

B.2	Para esse período dominado por uma densidade de energia constante, encontre $(\Omega(t) - 1)$ como função do tempo. Assuma que $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 pt.
B.3	Mostre que a condição para expansão implica nas várias condições a seguir: pressão negativa, expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$), e um raio de Hubble decrescente ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 pt.

B.4	Mostre que a condição para o raio de Hubble decrescente pode ser expressa em termos do parâmetro $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ com $\epsilon < 1$.	0.2 pt.
-----	---	---------

A expansão ocorre desde que $\epsilon < 1$ e então pára quando $\epsilon = 1$. Podemos definir o parâmetro N de forma que $dN = d \ln a = H dt$ e $N = 0$ no fim da expansão.

C. Expansão gerada por partículas distribuídas homoganeamente

Como exemplo de um sistema físico simples que pode gerar um período de expansão é um universo dominado por partículas distribuídas homoganeamente. Este tipo de matéria é chamado de *inflaton* e pode ser caracterizado por uma função $\phi(t)$.

A equação dinâmica desta partícula pode ser expressa como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

onde $V = V(\phi)$ é uma função potencial e $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. O parâmetro de Hubble satisfaz

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

onde M_{pl} é uma constante chamada massa de Planck reduzida. A fase de expansão ocorre durante o período onde a energia potencial V domina sobre a energia cinética $\dot{\phi}^2/2$ por um tempo suficientemente longo de tal forma que o termo $\ddot{\phi}$ na equação (3) possa ser desprezado. Essa condição é chamada de aproximação *slow-roll*.

As quantidades ϵ e $\eta_V = \delta + \epsilon$, onde $\delta = -\ddot{\phi}/H(\dot{\phi})$, são chamadas de parâmetros 'slow-roll'.

C.1	Estime o parâmetro ϵ , o parâmetro η_V , $dN/d\phi$ em termos do potencial $V(\phi)$ e das suas derivadas primeira e segunda (V' e V'').	1.7 pt.
-----	--	---------

D. Expansão com um potencial simples

As previsões de qualquer modelo de expansão podem ser comparadas com vínculos observacionais da CMB como a seguir com $n_s = 0.968 \pm 0.006$ e $r < 0.12$, onde $r = 16\epsilon$ e $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ são calculados em $\phi = \phi_{start}$ para um modelo de expansão gerado pelo domínio das partículas. Assuma que o potencial da partícula toma a forma simplificada $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ onde n é um inteiro e Λ é uma constante.

D.1	Calcule ϕ_{end} durante a expansão.	0.5 pt.
D.2	Expresse r e n_s em termos do número N e do inteiro n . Estime o valor de n que melhor produz os valores observados de r e n_s . Tome $N = 60$ nos seus cálculos.	0.6 pt.