

## Ímãs permanentes (10 pontos)

Os ímãs permanentes fortes são feitos da liga NdFeB que obedece a uma curva de histerese muito larga para que a magnetização  $J$  pode ser considerado constante em uma ampla gama de aplicações; no que segue, assumimos que  $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$ , em que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ , e a magnetização de todos os ímãs permanentes é homogênea. A magnetização é definida como a densidade de volume do momento de dipolo magnético da matéria.

Dica 1. A seguinte igualdade pode ser útil:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dica 2. O campo magnético criado por um ímã esférico é idêntico ao de um dipolo pontual. Os campos magnéticos criados por ímãs de outras formas tornam-se equivalentes a campos de dipolos pontuais apenas em distâncias muito maiores que seu diâmetro.

Dica 3. Os campos elétricos e magnéticos de dipolos pontuais elétricos e magnéticos em função das coordenadas e do momento de dipolo correspondente são semelhantes, ou seja, um pode ser obtido do outro multiplicando-o por um fator constante.

Dica 4. O campo induzido devido a uma condição de contorno sempre pode ser substituído por alguma configuração de fontes de campo fora dos limites dados.

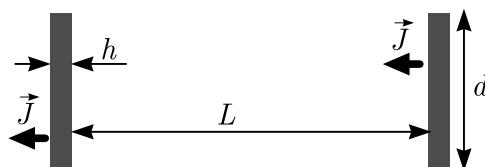
### Parte A. Interação entre os ímãs (4.5 pontos)

Quando a distância de um ímã é muito maior que seu tamanho, o campo magnético criado por ele pode ser aproximado com o campo magnético de seu momento de dipolo  $\vec{m}$ ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Em que  $r = |\vec{r}|$ , e decomparamos o momento de dipolo em componentes paralelas e perpendiculares ao vetor raio  $\vec{r}$  desenhado do dipolo ao ponto de observação,  $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$ .

- A.1** Encontre o módulo da força de interação entre dois ímãs cilíndricos de diâmetro  $d = 20 \text{ mm}$  e espessura  $h = 2 \text{ mm}$ , colocados coaxialmente, magnetizados paralelamente ao seu eixo, se a distância entre os centros dos ímãs é  $L = 20 \text{ cm}$ . Você pode considerar que  $L \gg d, h$ . 0.6pt



- A.2** Para distâncias muito maiores que  $\frac{h}{2}$ , o campo criado pelo ímã da tarefa A.1 é o mesmo criado por uma corrente circular  $I$ . Encontre  $I$ . 0.4pt

**A.3** Encontre a força de interação entre os ímãs para a configuração da tarefa A.1 1.0pt  
se, em vez disso,  $L = 5 \text{ mm}$ . Você pode assumir que  $d \gg L \gg h$ .

**A.4** Ímãs esféricos idênticos de diâmetro  $\delta = 5 \text{ mm}$ , unidos por atração magnética, 1.0pt  
formam uma cadeia. Qual é o comprimento máximo de tal cadeia de modo  
que ela não se quebra devido ao seu próprio peso quando pendurada abaixo  
do ímã superior? A densidade do ímã de NdFeB vale  $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ .

**A.5** Considere a cadeia da parte A.4. Obtenha uma expressão para o módulo do 1.5pt  
campo magnético  $B$ , em um ponto  $P$  que está a distância  $r$  do ponto  $O$ , que  
é um dos pontos finais da cadeia, e o ângulo entre a cadeia e a linha  $OP$  é  $\theta$   
(conforme a figura abaixo), considerando que  $l \gg r$  e  $r \sin \theta \gg \delta$ .



### Parte B. Interação com materiais ferromagnéticos (3.5 pontos)

Agora, assumimos que, além dos ímãs permanentes, também temos placas feitas de um material ferromagnético, semelhante ao que é usado em núcleos de transformadores. Nas situações em que estamos preocupados, pode-se considerar que há uma permeabilidade relativa constante, mas muito grande,  $\mu_r \sim 10^5$ .

*Dica 5.* Grande permeabilidade significa que as linhas de campo magnético próximas à superfície externa de um objeto feito desse material são quase perpendiculares à sua superfície. Isso é semelhante ao comportamento das linhas de campo elétrico nas proximidades da superfície externa de um condutor.

**B.1** Um ímã esférico da parte A.4 está a uma distância  $s = \delta$  de uma placa ferromagnética, infinita e espessa (veja a folha de respostas). A magnetização da esfera é orientada perpendicularmente à placa. Esboce as linhas de campo na seção transversal mostrada na folha de respostas. Nessa figura, três pontos (indicados como 1, 2 e 3) são marcados; você precisa mostrar as linhas de campo passando por cada um desses pontos em seu comprimento total, ou seja, tanto quanto couber na figura. 1.0pt

**B.2** Agora, o ímã esférico é colocado em contato direto com a placa. Qual a direção e o sentido do vetor magnetização do ímã esférico, em equilíbrio estável, e qual é a força normal entre a placa e o ímã? Marque a(s) direção(ões) correta(s) com um visto na caixa correspondente na folha de respostas. Marcação incorretas reduzirão sua pontuação. 1.0pt

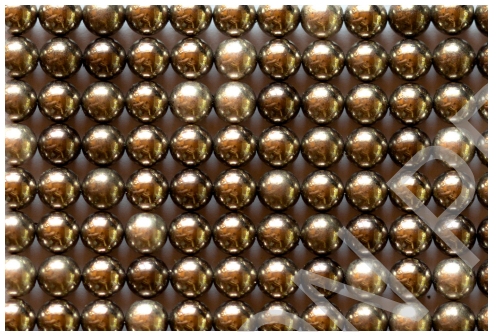
**B.3** Agora, um ímã da parte A.1 é colocado entre duas placas espessas, ferromagnéticas, circulares de diâmetro  $D = 2d$ , de modo que as faces planas do ímã sejam pressionadas contra as placas, e todos sejam coaxiais. Encontre a força magnética que atua em cada placa. *Dica:* Você pode desprezar o campo magnético na parte externa das placas. 1.5pt

### Parte C. Ordem (anti) ferromagnética (2 pontos)

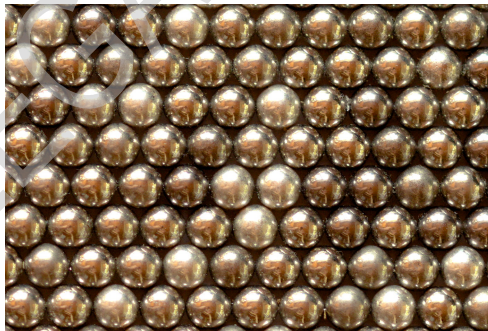
As propriedades magnéticas dos materiais são devidas aos momentos de dipolo magnético dos elétrons e núcleos atômicos. Se os momentos de dipolo se orientam paralelamente um ao outro, o campo criado por eles é ampliado - estes são materiais ferromagnéticos. Por outro lado, se para cada momento de dipolo houver outro momento de dipolo antiparalelo próximo, os campos se cancelam - esses são materiais antiferromagnéticos.

No que segue, consideramos um número muito grande de ímãs esféricos da parte A.4, dispostos nos nós de uma rede bidimensional; veja **fotos reais de configurações de equilíbrio estável** abaixo. Suponha que todos os vetores de magnetização estejam no plano da figura. Considere em seus cálculos apenas interações de vizinhos mais próximos (na figura de C.1, cada ímã tem quatro vizinhos mais próximos e na figura de C.2 - seis).

- C.1** Mostre os sentidos de magnetização dos ímãs na figura abaixo. Você não é obrigado a provar que a configuração sugerida é a única possibilidade. Você ainda precisa justificar que a configuração que você sugeriu é realmente estável. Encontre a energia necessária para puxar um ímã de algum lugar no meio da rede para fora dela, supondo que os outros ímãs sejam mantidos estacionários. Essa configuração corresponde à ordem dos materiais ferromagnéticos ou antiferromagnéticos? 0.8pt

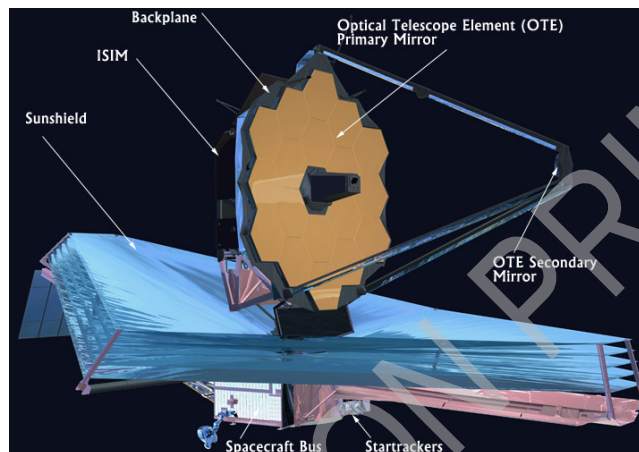


- C.2** Responda as mesmas perguntas da tarefa C.1 para a configuração mostrada na figura abaixo. 1.2pt



## Telescópio Espacial James Webb (12 points)

Esta é uma questão sobre a física do Telescópio Espacial James Webb. A luz de uma estrela atinge o espelho primário, que possui uma área de  $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ , e reflete em um espelho secundário. A distância focal do sistema é  $f = 130 \text{ m}$ . A luz é focada no ISIM (Integrated Science Instrument Module), que contém as câmeras CCD (charged-coupled device).



Crédito da imagem: NASA

### Parte A. Imagem de uma estrela (1,8 pontos)

A Gigante Vermelha mais próxima está a 89 anos-luz de distância, tem uma temperatura de  $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ , e um diâmetro de  $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$ .

**A.1** Calcule o diâmetro de uma imagem focada da estrela na superfície da câmera de imagem CCD. 0.4pt

**A.2** Estime o diâmetro de um máximo central de difração na superfície da câmera de imagem CCD. Suponha um comprimento de onda  $\lambda = 800 \text{ nm}$ , que é o comprimento de onda de maior intensidade da estrela gigante vermelha. 0.4pt

**A.3** Se o CCD não é resfriado e pode perder calor apenas irradiando do topo da superfície da imagem, qual seria a temperatura de equilíbrio do CCD no local da imagem da estrela gigante vermelha? Suponha que a superfície do CCD seja um corpo negro. Forneça uma equação e uma estimativa numérica. 1.0pt

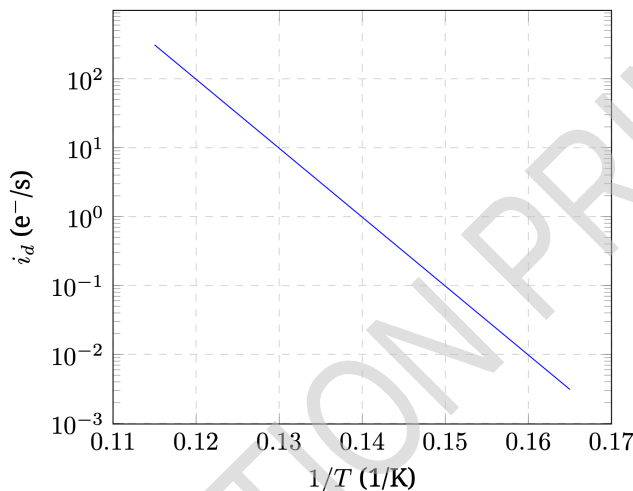
### Parte B. Contando fótons (1,8 pontos)

A absorção de um fóton pela câmera CCD leva à emissão de um elétron dentro do aparelho. Isso ocorre somente se o fóton tiver energia suficiente para excitar um elétron através de um Gap de energia  $\Delta E_g$ . Suponha que todo fóton com energia suficiente seja bem-sucedido. Há também fuga de elétrons através do gap causado pela temperatura da câmera CCD; esta é a corrente escura  $i_d$  e é medida em número de

elétrons por segundo. É uma função da temperatura de acordo com

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/6k_B T}. \quad (1)$$

Onde  $i_0$  é uma constante.



O gráfico mostra como a corrente escura varia com a temperatura. As unidades para corrente escura,  $e^-/s$  devem ser pensadas como a contagem de um número de elétrons por segundo.

- B.1** A partir do gráfico da corrente escura, forneça uma estimativa da ordem de grandeza para a temperatura de uma fonte de fótons térmicos distante que seria capaz de excitar um elétron no pixel. 0.4pt

Os elétrons são coletados em um capacitor, e após um tempo de exposição  $\tau$ , os elétrons são contados. Existem três principais fontes de incerteza no processo: uma incerteza fixa no processo de contagem chamada ruído de leitura; um erro de distribuição de Poisson associado à corrente escura e um erro com distribuição com Poisson associado aos fótons de entrada detectados. Os erros com distribuição de Poisson são iguais à raiz quadrada do número de contagens associadas a um processo. A contagem de fótons medida é igual ao número de elétrons no capacitor, menos o número de elétrons associados à corrente escura.

- B.2** Escreva uma expressão para a incerteza total da contagem  $\sigma_{t,r}$ , se houver um ruído de leitura  $\sigma_r$ , uma corrente escura  $i_d$ , uma taxa de fótons de entrada  $p$ , e um tempo de exposição  $\tau$ . 0.4pt

Para as perguntas restantes nesta parte, suponha que o tempo de exposição seja  $\tau = 10^4$  s e o ruído de leitura é fixo  $\sigma_r = 14$ .

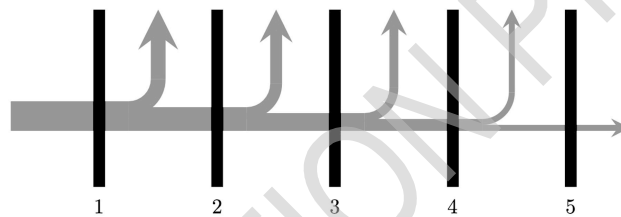
- B.3** Considere uma temperatura de operação de  $T_p = 7.5$  K. Calcule a taxa mínima de fótons  $p$  de modo que a contagem de fótons seja dez vezes a incerteza da contagem. 0.5pt

- B.4** Assumindo que todos os fótons são capazes de excitar um elétron através do gap, qual é a intensidade da fonte de fótons encontrada em B.3 no espelho primário? Expresse sua resposta em  $W/m^2$  0.5pt

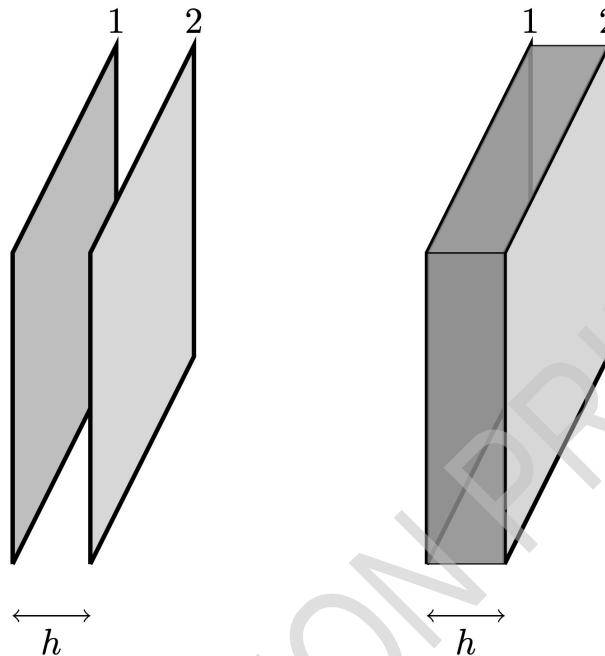
### Parte C. Refrigeração Passiva (4,4 pontos)

Uma câmara CCD de infravermelho deve ser mantida a uma temperatura baixa. A primeira ferramenta é um escudo para proteger da radiação do sol.

O escudo solar consiste em cinco camadas refletoras separadas em folhas finas (escuras); a energia radiante (cinza) do sol é incidente na primeira folha à esquerda, e alguma energia escapa entre cada par de folhas.



Esquema do fluxo de energia: as linhas verticais (escuras) são as folhas, o fluxo de energia (cinza) é da esquerda para a direita, contudo, entre folhas, alguma energia flui para cima, fora no espaço.



À esquerda está um modelo simples de duas folhas adjacentes 1 e 2 separadas por uma distância  $h$ . As folhas não estão ligadas, e o perímetro está aberto para o espaço. Assuma que as folhas são paralelas. A radiação térmica pode ser trocada entre as folhas, e a radiação térmica pode escapar através da abertura do perímetro. À direita, a abertura do perímetro foi sombreada para ajudar a visualizar.

Assuma as seguintes simplificações:

- As folhas são quadradas, cada uma com área  $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$ .
- As folhas são paralelas e separadas por  $h = 25 \text{ cm}$  ao longo do perímetro.
- As folhas têm emissividade constante  $\epsilon \ll 1$ . Assuma que todos os reflexos fora das superfícies das folhas são difusos.
- As folhas são finas com as temperaturas na superfície frontal e traseira iguais e uniformes.
- A fração do fluxo radiante emitida por uma folha que é absorvida pela folha adjacente é  $\alpha \leq 1$ . Isto significa que se a folha 1 na figura acima emitir uma quantidade de calor  $Q_1$  para a folha 2, então a folha 2 absorverá uma quantidade  $\alpha Q_1$  da folha 1.
- A quantidade de fluxo radiante ejetada para fora do intervalo perimetral entre duas folhas é aproximada como  $\beta Q_{12}$  onde  $\alpha Q_{12}$  é o fluxo líquido entre as duas folhas. A fração  $\beta < 1$ . Isto é equivalente a dizer que a perda de calor para o espaço entre duas folhas é proporcional à troca líquida de calor entre as folhas. Isto é uma aproximação para este problema.
- A temperatura de fundo do espaço é insignificante.

**C.1** Encontre expressões para as temperaturas de equilíbrio da primeira folha e da quinta folha em função da intensidade de radiação solar incidente  $I_0$ , das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , e quaisquer constantes físicas necessárias. Para simplificar a sua expressão, você pode definir constantes adicionais em termos de  $\alpha$  e  $\beta$ , etc. 2.4pt

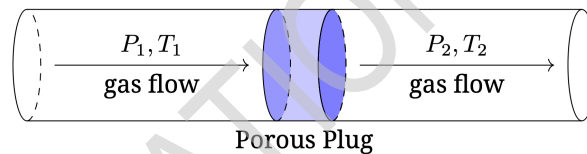


**C.2** Obtenha estimativas numéricas para  $\alpha$  e  $\beta$  a partir da informação sobre a geometria da folha, assumindo uma emissividade  $\epsilon = 0.05$ . Você é encorajado a considerar o modelo de caixa retangular das folhas acima, onde a área perimetral atua efetivamente como um perfeito absorvedor de energia radiante. 1.6pt

**C.3** Determine numericamente as temperaturas da folha 1 e da folha 5. A intensidade solar é  $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$ . 0.4pt

### Parte D. Cryo-cooler (4 pontos)

A última fase do sistema de arrefecimento esfria diretamente a câmara CCD. Um sistema de refrigeração de ciclo fechado tem um tubo que faz circular gás hélio de uma pressão constante  $P_1$  através de um tampão poroso, como uma esponja, para um tubo com pressão constante  $P_2$ . O tubo transporta o gás para esfriar o CCD. O gás hélio passa então através de uma bomba antes de regressar à linha de abastecimento.



O Gás hélio fornecido à esquerda está a uma pressão bem definida  $P_1$  e temperatura  $T_1$ , ele é forçado a passar através do tampão para uma pressão bem definida  $P_2$  e temperatura  $T_2$ , onde é transportado à direita.

A medida que o gás se move através do tampão poroso, o atrito viscoso com as paredes estreitas dos canais no tampão torna-se um efeito importante; contudo, nenhum calor é transferido para ou do gás durante o processo. A velocidade do fluxo do gás na região 2 é apenas marginalmente maior do que a velocidade do fluxo do gás na região 1.

O hélio não é um gás ideal, mas permanece num estado gasoso durante todo este processo.

**D.1** Considere um mol de gás que passa da esquerda para a direita através do tampão poroso. Complete a tabela na sua folha de resposta escrevendo '>' ou '<' para identificar a quantidade que deve ser maior, '=' para identificar quantidades que devem ser iguais, ou '?' se não for possível saber qual é maior ou igual sem mais informação. 1.0pt

**D.2** Identifique uma quantidade conservada, construída a partir da  $U$  (energia interna),  $P$  (pressão), e  $V$  (volume) à medida que um mol de gás se desloca através do tampão; mostre como você encontrou esta quantidade conservada. 0.6pt

As suas folhas de resposta têm gráficos de energia interna por massa *versus* volume por massa, para hélio com isotermas e linhas de entropia constante.

**D.3** Assumindo que  $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$  e  $T_2 = 7.5 \text{ K}$ , use o gráfico para encontrar um valor numérico para a quantidade conservada que você encontrou na Parte D.2. Mostre a construção no gráfico! 1.4pt

**D.4** Encontre a temperatura máxima possível para  $T_1$ . Mostre a construção no gráfico! 0.8pt

**D.5** Assumindo o seu valor para o máximo  $T_1$  encontrado em D.4, encontre um valor numérico para  $P_1$ . 0.2pt

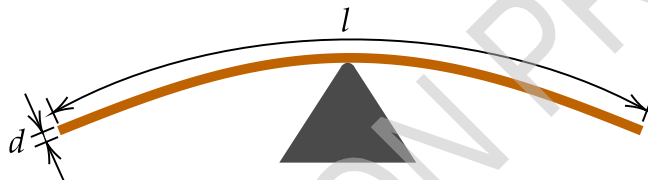
DELEGATION PRINT

## Leis de escalas (8 pontos)

As leis de escala descrevem a relação funcional entre duas quantidades físicas que escalam uma com a outra durante um intervalo significativo. Esta relação funcional pode ser uma lei de potência, mas existem outras possibilidades, também. Muitas vezes, as expressões exatas estão fora do alcance, mas as leis de escala ainda podem ser encontradas.

### Parte A. Espaguete (2,0 pontos)

- A.1** Um canudo de espaguete de diâmetro  $d$  está equilibrado horizontalmente a partir do seu centro. Se  $d = 1$  mm, o canudo parte-se sob o seu próprio peso quando o seu comprimento atinge  $l = 50$  cm. Qual é o comprimento máximo  $l'$  do canudo de diâmetro  $d' = 1$  cm antes de quebrar sob o seu próprio peso? 2.0pt



### Parte B. Castelo de areia (2,0 pontos)

- B.1** O volume médio do grão da areia grão é 10 vezes maior do que o da areia fina. A areia de fina úmida e a areia grossa úmida têm um teor ótimo de água (isto é, assumem uma resistência máxima para as construções feitas a partir dela) e são utilizadas para construir dois cilindros exatamente com a mesma forma e tamanho. A resistência de cada cilindro é testada pressionando-o entre duas placas paralelas. O cilindro feito de areia grossa é destruído quando a força aplicada para prensar as placas atinge  $F_c = 10$  N. Qual valor da força  $F_f$  necessária para destruir o cilindro feito de areia fina? Pode-se ignorar os efeitos da gravidade. 2.0pt

**Parte C. Viagem interestelar (2,0 pontos)**

- C.1** A nave espacial de uma expedição interestelar viaja com uma aceleração própria  $g = 10 \text{ m/s}^2$  de módulo constante, ou seja, esta é a aceleração da nave espacial em um referencial inercial no qual ela se encontra instantaneamente em repouso. Os passageiros devem ser capazes de regressar à Terra dentro da sua de vida restante, esperada em 50 anos. A distância máxima da Terra alcançada pela nave espacial é  $d$ . Se a aceleração for aumentada para  $g' = 15 \text{ m/s}^2$ , a nave espacial pode atingir uma distância superior  $d'$ . Qual é a razão  $d'/d$ ? 2.0pt

*Dica 1.* Pode-se desejar usar a fórmula de adição de velocidade relativista, no entanto, existem também outras abordagens.

*Dica 2.* Pode-se ter de lidar com funções hiperbólicas definidas da seguinte forma:  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,  $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

*Dica 3.* Dependendo da sua abordagem, poderá necessitar de um ou mais destas integrais:  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{atanh } x + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{asinh } x + C$ ,  $\int \sinh x dx = \cosh x + C$ , onde  $\text{asinh } x$  e  $\text{atanh } x$  são as funções inversas das respectivas funções hiperbólicas.

**Parte D. Aquela sensação de afundamento (2,0 pontos)**

- D.1** Uma bola sólida de madeira de raio  $r_0$  está flutuando na água. Ignorando os efeitos de fricção, a frequência de pequenas oscilações seria  $\omega_0$ , mas devido ao atrito viscoso, depois de ser deslocada verticalmente, a frequência de oscilações diminuem até  $0.99\omega_0$ . Qual é o raio mínimo  $r_{\min}$  de uma bola de madeira que flutua na água e que, ao ser deslocada, sofre pequenas oscilações? *Dica:* A força de atrito viscosa que atua sobre um determinado corpo é proporcional à sua velocidade em relação ao fluido como um todo, e à viscosidade  $\eta$  do fluido. A unidade da viscosidade é  $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ . 2.0pt