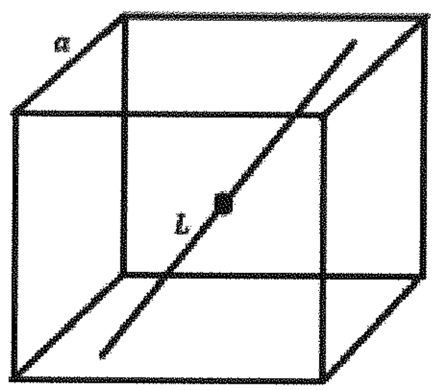
Problemas Diversos (10 pontos)

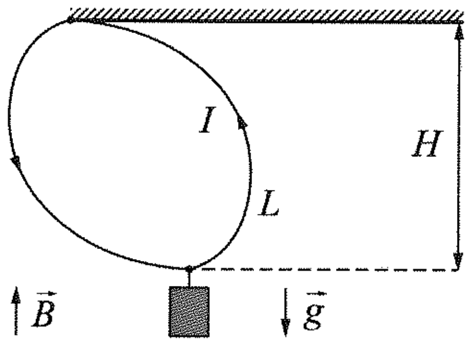
Parte A. Oscilações cúbicas (2.5 pontos)

A.1 Um canal retilíneo estreito passa pelo centro de um cubo fixo de lado a. O cubo é uniformemente carregado em todo o seu volume com uma densidade de carga ρ constante. A distância do centro do cubo até à interseção do canal com uma das faces é L. O canal contém uma partícula com massa m e carga q. Determine o período das pequenas oscilações da partícula perto do centro. A interação gravitacional da partícula e do cubo pode ser desprezada. As cargas do cubo e das partículas têm sinal contrário. 2.5pt



Parte B. Suspensão num campo magnético (3 pontos)

B.1 Um fio flexível forma uma espira com massa desprezável. Através deste fio passa uma corrente I. O ponto superior da espira é ligado ao teto e uma massa é suspensa no seu ponto inferior. O comprimento de metade da espira é L. A espira é colocada sob a influência de um campo magnético vertical B. O sistema atinge um equilíbrio estável, no qual o ponto de suspensão no teto e o ponto de suspensão da massa não se encontraram na mesma vertical. Determine a tensão T no fio e o peso P da massa se a distância do teto até à parte inferior da espira for H. 3.0pt



Parte C. Haste num campo magnético (4.5 pontos)

C.1 Uma haste leve de comprimento $2R$ está colocada perpendicularmente à direção de um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Duas pequenas esferas idênticas, de massa m e carga q , são fixas nas extremidades da haste. Considere que o o vetor unitário do eixo z coincide com a direção do campo magnético, e a origem deste eito se encontra no centro da haste. As esferas têm inicialmente as mesmas velocidades v mas com sentidos opostos, e uma delas coincide com a direção do campo magnético. Determine as coordenadas máximas z_{max} das esferas. Exprima a sua resposta em termos de q, B, m, v, R. Obtenha a magnitude da aceleração das esferas nesse momento. Exprima a sua resposta em termos de q, B, m, v, R e z_{max}. 4.5pt

Atrito Anisotrópico (10 pontos)

O atrito não é sempre isotrópico. Frequentemente a magnitude e a direção da força de atrito podem depender da direção do movimento do corpo. Por exemplo, o atrito anisotrópico pode surgir na presença de "sulcos" presentes numa determinada orientação na superfície de contato dos corpos (sabe-se que o coeficiente de atrito do carvalho contra o carvalho ao longo das fibras é igual a 0,48, ao passo que do carvalho contra o carvalho na direção perpendicular às fibras é de 0,34). A presença de anisotropia no atrito pode levar a propriedades invulgares de movimento, o que será estudado neste problema.

O que precisa saber sobre o atrito anisotrópico

Suponhamos que uma superfície seja feita de um material anisotrópico. Um dos modelos mais populares de atrito anisotrópico sugere que existem eixos X e Y perpendiculares um ao outro (que são chamados *eixos primários*), de modo que a força de atrito $\vec{F}$ que atua no corpo depende da direção do movimento do corpo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{|N|}{|v|}\mu_x v_x \\ F_y &= -\frac{|N|}{|v|}\mu_y v_y \end{aligned} \tag{1}$$

onde F_x, F_y são as componentes da força de atrito, N é a força de reação normal no corpo, v_x e v_y são as componentes da velocidade $\vec{v}$, e μ_x e μ_y são os coeficientes de atrito ao longo dos eixos primários.

Considere que os eixos do sistema de coordenadas no plano estão alinhados com os eixos primários. Os coeficientes de atrito são $\mu_x = 0{,}75$ e $\mu_y = 0{,}5$, a menos que seja indicado outro valor.

Nas partes A e B, o corpo pode ser considerado pontual. O plano onde os corpos se movem é horizontal em todas as partes do problema.

Apresente uma resposta numérica sempre que possível.

Parte A. Movimento do corpo numa superfície horizontal (4.0 pontos)

A.1	Que ângulo α_1 deverá fazer a velocidade do corpo com o eixo X de forma a que o valor absoluto da potência da força de atrito seja máxima?	0.5pt

A.2	Que ângulo α_2 deverá ter a velocidade do corpo com o eixo X de forma a que o valor absoluto da potência da força de atrito seja 1,2 vezes inferior ao valor máximo?	0.5pt

A.3	Considere que a velocidade inicial do corpo tem componentes $v_{0x} = 1\ \mathrm{m/s}$ e $v_{0y} = 1\ \mathrm{m/s}$. Depois de algum tempo, a componente da velocidade no eixo Y é igual a $v_{1y} = 0{,}25\ \mathrm{m/s}$. Qual é a magnitude da velocidade do corpo neste instante?	1.0pt

A.4	Considere que a velocidade do corpo tenha magnitude $v_2 = 1.0\ \mathrm{m/s}$. Qual o valor do ângulo α_3 que deverá fazer a velocidade do corpo com o eixo X de forma a que o raio de curvatura da trajetória seja mínimo? Qual será o valor deste raio mínimo? Considere que $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.	1.0pt

A.5	Para os coeficientes de atrito indicados, reproduza num desenho simples as trajetórias do corpo no plano XY com os ângulos iniciais $\alpha_4 = \pi/6$ e $\alpha_5 = \pi/3$. As magnitudes das velocidades iniciais são as mesmas. Repita a resolução do problema para os coeficientes de atrito $\mu_x = 0{,}4$ e $\mu_y = 0{,}7$.	1.0pt

Parte B. Condições para o início do movimento do corpo (2.0 pontos)

B.1	Um corpo de massa m está em repouso na origem. Uma força é aplicada segundo um ângulo α com a direção do eixo X. A magnitude da força $F(t) = \gamma t$ aumenta de forma linear com o tempo. Determine a dependência do instante em que o corpo se começa a mover com o ângulo α. Ignore o fenómeno da estagnação.	2.0pt

Parte C. Movimento circular do corpo (4.0 pontos)

Duas massas pontuais idênticas de massa m são ligadas por uma haste inextensível leve de comprimento $L = 1\ \mathrm{m}$, e este sistema está colocado numa superfície com atrito anisotrópico. A haste está alinhada ao longo do eixo Y e não toca a superfície. Um dos corpos recebe uma velocidade inicial na direção perpendicular à haste.

C.1	Considerando que a velocidade inicial do corpo é v_0 e que o outro corpo está em repouso durante todo o movimento subsequente, obtenha a velocidade v da massa que se move em função do ângulo de rotação φ da haste.	1.5pt

C.2	Obtenha o valor máximo da velocidade inicial $v_{0\mathrm{max}}$ para a qual qual o outro corpo irá continuar em repouso.	1.5pt

C.3	Qual é o deslocamento total do corpo ao longo da sua trajetória, até parar completamente, se a sua velocidade inicial for $v_{0\mathrm{max}}$?	1.0pt

Tecnologias Laser (10 pontos)

Ao solucionar o problema, use os seguintes valores para as constantes físicas:

a velocidade da luz no vácuo $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s;

constante de Planck $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J · s;

constante de Coulomb e constante da permitividade elétrica $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9$ $\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$;

carga elementar $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C.

Part A. Modelo clássico de superradiância

Lasers são fontes de radiação ótica coerente. A radiação laser é formada quando um grande número de átomos que foram transferidos para um estado de excitação através de uma ação externa (bombeamento) emite fotões com a mesma fase e polarização. Para construir uma teoria consistente da radiação laser, é preciso usar mecânica quântica, mas alguns aspetos do seu funcionamento podem ser entendidos com a ajuda da eletrodinâmica clássica.

Primeiro vamos considerar a emissão de um fotão por um único átomo. Do ponto de vista da eletrodinâmica clássica, um átomo pode ser considerado como um emissor dipolar. Neste modelo, um dipolo elétrico é associado a um átomo, sendo formado por um núcleo imóvel, carregado positivamente com uma carga $+q$, e uma carga negativa $-q$ que vibra harmonicamente em torno dele (localizada no centro da distribuição de carga da nuvem eletrónica).

Neste caso, o momento dipolar do átomo varia de acordo com a lei $\vec{p}(t) = \vec{p}_m \cos(\omega t + \varphi)$. A frequência angular de oscilação está relacionada com a energia dos fotões emitidos pela relação Planck $E_\gamma = \hbar\omega$. Nas partes que se seguem, a frequência dos fotões irá significar a sua frequência angular. A potência de radiação de um sistema clássico com um momento dipolar variável $\vec{P}(t)$ é determinada pela fórmula

$$W = \frac{2k}{3c^3} \left\langle \left(\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} \right)^2 \right\rangle, \tag{1}$$

onde os parêntesis angulares significam uma média sobre o período de oscilação.

A.1	O átomo emite luz com um comprimento de onda de $\lambda_0 = 300$ nm. Usando este modelo clássico, estime o tempo de emissão τ (ou seja, o tempo que leva ao átomo emitir uma energia igual à energia de um único fotão). Esse tempo coincide, em ordem de magnitude, com o tempo característico durante o qual o átomo emite um fotão. Toda a radiação é criada por um eletrão localizado a uma distância de cerca de $a_0 = 0.1$ nm do núcleo. Exprima a sua resposta em termos das constantes físicas λ_0 e a_0.	1.0pt

Vamos assumir que, num certo volume, são transferidos N átomos para um estado excitado por ação de um bombeamento de curta duração. Sabe-se que um átomo emite um fotão com a frequência ω num tempo característico τ.

A.2	Determine a potência W_s da radiação eletromagnética de todos os átomos N no modo de emissão espontânea, ou seja, quando a direção do dipolo atómico e a fase das suas oscilações variam aleatoriamente de átomo para átomo. Na sua resposta, escreva a fórmula para a potência em termos de N, ω e τ.	0.25pt

A.3	Estime a duração do pulso de emissão espontânea desse sistema de átomos. Exprima a sua resposta em termos das mesmas grandezas.	0.25pt

A.4	Estime a potência W_i da radiação eletromagnética de todos os átomos N no modo de superradiância, ou seja, quando a direção dos dipolos atómicos e as fases das suas oscilações coincidem para todos os átomos num estado excitado. Exprima a sua resposta em função de N, ω e τ.	0.5pt

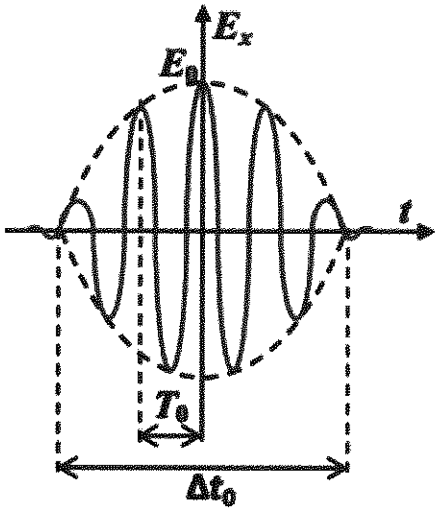
A.5	Estime a duração do pulso de radiação do sistema de átomos no modo de superradiância. Exprima a sua resposta em termos das mesmas grandezas.	0.25pt

Parte B. Ótica não linear e compressão do pulso

Pulsos de ainda menor duração podem ser obtidos reduzindo a duração dos pulsos laser já gerados. A duração do pulso Δt e a dispersão de frequência das oscilações $\Delta\omega$ (largura espectral) estão relacionadas pela desigualdade $\Delta\omega\Delta t \geq 2\pi$. Os pulsos laser gerados no modo de superradiância já possuem a duração mais curta possível para uma certa dispersão de frequência $\Delta t_0 \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega_0}$. Portanto, a duração do pulso pode ser reduzida em dois passos: primeiro, aumentando a largura espectral do pulso (sem alterar a sua duração), e depois comprimindo o pulso no tempo.

Uma das maneiras mais comuns de resolver o primeiro problema é "pulse chirping". Este método é baseado no uso da não linearidade do meio, ou seja, a dependência do índice de refração do meio n com a amplitude das oscilações do campo elétrico da onda E_m. Esta dependência tem a forma $n = n_0 + n_2 E_m^2$, onde n_0 e n_2 são constantes que dependem das propriedades da substância. Os efeitos não lineares são pequenos, por exemplo, no quartzo, com uma intensidade luminosa de $I_1 = 10^9$ W/cm^2, o índice de refração aumenta apenas de $n_2 E_{m1}^2 \approx 3.2 \cdot 10^{-7}$. A intensidade de uma onda eletromagnética num meio é determinada pela fórmula $I = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} E_m^2$.

Considere um pulso de duração Δt_0 com uma dispersão de frequência pequena de $\Delta\omega_0 \approx \frac{2\pi}{\Delta t_0}$, sendo a frequência média do pulso ω_0. A figura mostra uma dependência aproximada do campo elétrico com o tempo num destes pulsos. A velocidade de movimento dos máximos da onda nas extremidades do pulso é a mesma, e na parte central ela diminui devido aos efeitos da não linearidade. Devido a isso, a duração total do pulso não se altera, a frequência na parte "traseira" do pulso aumenta, e na "dianteira" ela diminui. Esses impulsos são chamados de "dispersos" (chirped).



B.1	Considere que as amplitudes de dois máximos são iguais a E_{m1} e E_{m2}. Determine a diferença das suas velocidades de propagação Δv. Exprima a sua resposta em função de n_0, n_2, c, E_{m1} e E_{m2}.	0.5pt

B.2	Um pulso de luz com um comprimento de onda no vácuo de $\lambda_0 = 300$ nm e uma intensidade máxima de $I_0 = 3 \cdot 10^9$ W/cm^2 propaga-se ao longo do eixo de uma fibra de quartzo. Considere que o envelope do quadrado do campo elétrico da onda em função do tempo $E_m^2(t)$ é uma parábola. Determine o comprimento s da fibra, durante a passagem pela qual a largura espectral do pulso irá aumentar $K = 200$ vezes. Exprima a sua resposta em termos de K, λ_0, n_2, E_m, e calcule o valor numérico (em metros, arredondado para um valor inteiro).	2.0pt

Para comprimir no tempo um pulso disperso ("chirped"), pode-se passá-lo por um meio no qual a velocidade de grupo da onda depende da sua frequência. Considere que num determinado meio, a dependência do número de onda na frequência pode ser representada como $k(\omega) = k_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2$, próximo da frequência média ω_0. Para o meio usado, consideramos $\beta_1 = 5$ ns/m, $|\beta_2| = 20$ fs^2/mm.

B.3	Qual deve ser o sinal de β_2 para que o pulso, disperso de acordo com o esquema descrito acima, seja comprimido no tempo nesse meio? Por favor indique "+" ou "-" na sua resposta. Nas perguntas abaixo, considere que β_2 tem sempre o sinal que indicou.	0.5pt

B.4	O pulso descrito tem uma duração de $\Delta t_0 = 10$ ps e uma largura espectral inicial de $\Delta\omega_0 \approx 2\pi/\Delta t_0$ (antes do "chirping") e propaga-se no meio descrito acima. Determine a distância que o pulso deve viajar para alcançar a sua duração mínima possível após a dispersão com o alargamento do espectro de $K = 200$. Exprima a sua resposta em função de constantes físicas, $K, \Delta t_0, \beta_1$ e β_2, e calcule o valor numérico em metros, arredondado a um valor inteiro.	1.0pt

B.5	A não linearidade do meio leva ao desaparecimento da difração de um feixe de luz de intensidade suficientemente alta. Estime a potência mínima de um pulso de luz W_c, para a qual ele não sofre difração, ou seja, quando ele se propaga dentro de um canal cilíndrico estreito de raio constante. Exprima a sua resposta para W_c em função de constantes físicas, frequência ω_0, n_0 and n_2. Considere que a distribuição de intensidade numa secção transversal do canal como sendo aproximadamente uniforme. Encontre o valor numérico da potência para um pulso com um comprimento de onda no vácuo de $\lambda_0 = 300$ nm, propagando-se no quartzo, onde o coeficiente $n_0 = 1.47$.	1.5pt

Parte C. Exoplanetas

Na astronomia, a observação de objetos luminosos é feita durante longos períodos de tempo. Isso torna possível estudar as alterações nos seus espectros de emissão. As medidas espectrais podem detectar planetas orbitando estrelas distantes – "exoplanetas". Exoplanetas não possuem radiação própria, então é preciso estudar o espetro de radiação das suas estrelas. Se para um exoplaneta, a direção da Terra estiver quase no plano de sua órbita, esse exoplaneta pode ser descoberto pela diminuição da luminosidade da estrela no momento da passagem do exoplaneta pelo disco estelar. No entanto, se o plano da órbita estiver inclinado no que diz respeito à direção da Terra, este método não irá funcionar.

C.1	Proponha um método que permita detectar exoplanetas com uma inclinação clara das suas órbitas no que diz respeito ao campo de visão, através do estudo do espetro da sua estrela no intervalo óptico. Na resposta, cite o fenómeno físico que sustenta o seu método.	1.0pt

C.2	Digamos que um exoplaneta de massa m gira em torno de uma estrela de massa M numa órbita circular com raio R. O período da revolução é T, o plano orbital desse planeta faz um ângulo θ com a direção da Terra. Estime a precisão da medida de frequência relativa, $\Delta\omega/\omega$, necessária para detectar esse exoplaneta pelo seu método. Na sua resposta, exprima a precisão relativa $\Delta\omega/\omega$, em função das constantes fundamentais, R, T, θ, m e M.	1.0pt

C.3	Assuma que a massa do exoplaneta e da sua estrela sejam iguais à massa da Terra e do Sol, respectivamente, e que o raio da órbita circular coincida com a distância da Terra ao Sol ($R \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ m). Considere que o ângulo é $\theta = 60°$, e a massa do Sol é 330.000 vezes a massa da Terra, o período da revolução da Terra em redor do Sol é de 1 ano. Determine um número inteiro n de modo que 10^{-n} seja a precisão da frequência relativa exigida pelo seu método. O uso de pulsos laser ultracurtos (femtosecond) torna possível medir frequências no intervalo óptico (10^{15} Hz) com uma precisão de cerca de 10 Hz. Essa precisão é suficiente para registrar o exoplaneta?	0.25pt