3^a fase – Prova Teórica

Prova para alunos do 1º e 2º anos

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES ABAIXO:

01) Esta prova destina-se exclusivamente a alunos dos 1º e 2º anos do ensino médio. Ela contém **dezesseis** questões. Os alunos do 1º ano podem escolher livremente **oito questões** para responder. Alunos da 2º ano podem escolher também **oito questões e não devem** escolher as questões indicadas como **"exclusiva para alunos do 1º ano"**.

02) O **Caderno de Resoluções** possui instruções que devem ser lidas cuidadosamente antes do início da prova.

03) Todos os resultados numéricos devem ser expressos em unidades no Sistema Internacional quando necessário.

04) A duração desta prova é de **quatro** horas, devendo o aluno permanecer na sala por **no mínimo noventa minutos**. Use quando necessário g=10m/s^2 como aceleração gravitacional.

Questão 1 (exclusiva para alunos do 1º ano) – Neste problema você será apresentado a um método desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Leibnitz independentemente. Nele você irá aprender a derivar a velocidade de um corpo em movimento tendo conhecimento apenas da sua função horária da posição.
Considere um móvel cuja equação horária é $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$, onde $x(t)$ é dado em metros e t em segundos.

(a) Qual a posição do móvel nos instantes $t_0 = 0s$, $t_1 = 1s$ e $t_2 = 2s$.

Sabendo que a velocidade média de um móvel entre os instantes t e $t + \Delta t$ é dada por

$$v_m = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

(b) Determine a velocidade média do móvel nos intervalos (t_0, t_1), (t_1, t_2) e (t_0, t_2).

Agora, vamos aprender a determinar a velocidade instantânea de um móvel num instante dado. Para calcular a velocidade do móvel no instante $t_1 = 1s$, proceda da seguinte maneira:

(c) Determine o valor da velocidade média do móvel entre t_1 e $t_1 + \Delta t$, em função de Δt.

(d) A velocidade do móvel é obtida fazendo-se $\Delta t = 0$ na expressão obtida no item anterior. Determine essa velocidade.

(e) Repita o mesmo procedimento dos itens (c) e (d) para determinar o valor da velocidade em qualquer instante de tempo t.

Questão 2(exclusiva para alunos do 1º ano) – Segundo a teoria da Relatividade de Einstein um elétron relativístico tem uma massa de repouso m_0 e uma massa inercial m definida pela seguinte equação:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

onde *v* é a velocidade do elétron relativa a um referencial inercial e *c* a velocidade da luz no vácuo. Esta equação implica que o elétron em movimento tem uma massa que depende da sua velocidade!

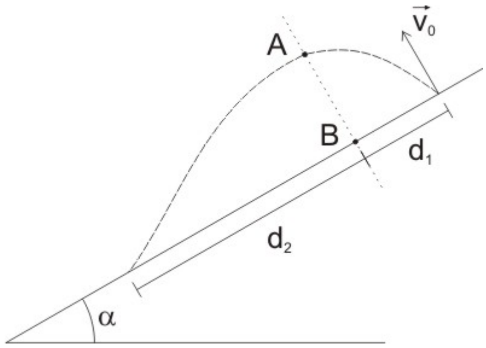
a) Escreva a energia cinética Newtoniana para o elétron usando a massa inercial da teoria de Einstein em função de m_0, *v e c.*

b) Segundo a teoria da Relatividade de Einstein a energia total do elétron é dada por:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

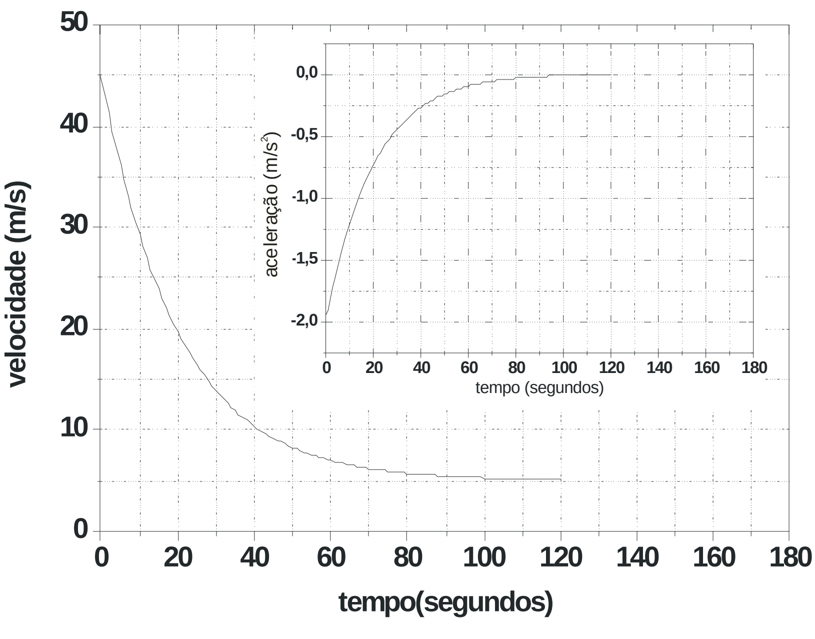
onde p é o momento da partícula. Qual a diferença entre a energia do elétron na teoria de Newton e a relativística?

Questão 3 – Uma partícula é lançada com velocidade v_0 perpendicularmente a um plano inclinado, de inclinação α com a horizontal, como mostra a figura. Determine:



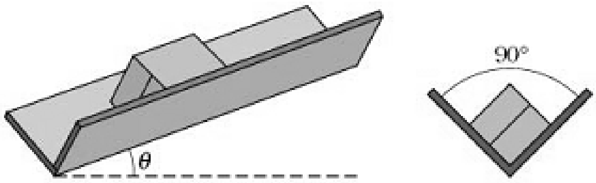
(a) A distância máxima $\overline{AB}$ que a partícula fica do plano inclinado.
(b) O alcance da partícula ao longo do plano inclinado.
(c) A razão entre d_1 e d_2 mostrada na figura. Obs.: Sendo A o ponto cuja partícula está à distância máxima do plano e B sua projeção sobre o mesmo, as distâncias d_1 e d_2 são definidas como a distância do ponto de lançamento a B, e a distância de B ao ponto de retorno da partícula ao plano, respectivamente.

Questão 4 - Um pára-quedista de 80kg em queda livre leva 3 minutos, após a abertura (início da contagem do tempo t=0) do pára-quedas, para atingir o solo de uma altura de 1700m. O gráfico a seguir representa a velocidade do pára-quedista nos primeiros dois minutos após a abertura do pára-quedas. A dependência da aceleração do pára-quedista esta indicada no gráfico anexo ao da velocidade.

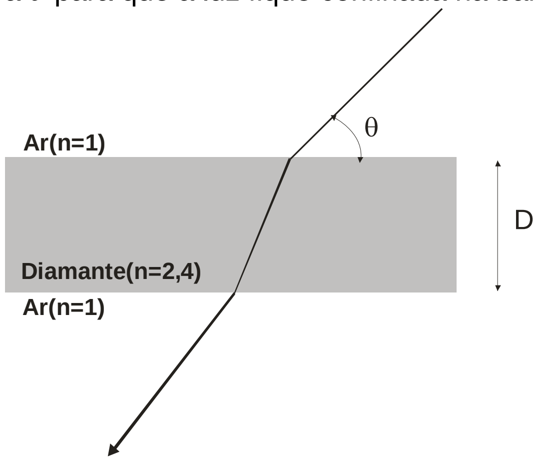


a) Faça um esboço do gráfico da distância percorrida pelo do pára-quedista *s(t)* como função do tempo de queda a partir da abertura do pára-quedas (*s(0)=0*).
b) Estime a distância percorrida pelo pára-quedista em t=20 s.

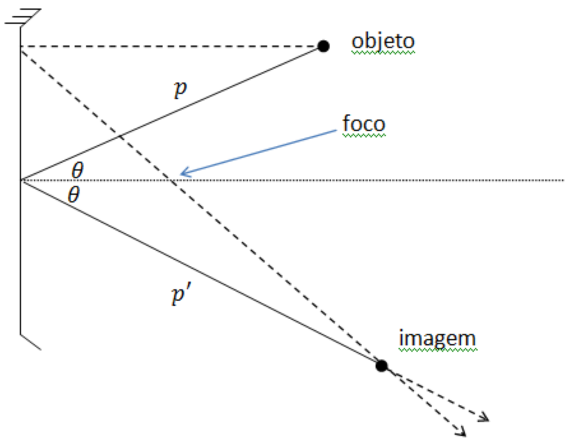
Questão 5 – Na figura a seguir, um caixote escorrega para baixo em uma vala inclinada cujos lados fazem um ângulo reto entre si. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a vala é μ_C. Qual é a aceleração do caixote em termos de μ_C, θ e g?



Questão 6 – O diamante é um material que possui um índice de refração de 2,4 , maior, por exemplo, que o do vidro que tem um índice de refração de 1,5. Esta é uma das razões para que o diamante seja utilizado na fabricação de jóias devido às multiplas reflexões internas. No modelo representado abaixo um raio de luz penetra numa barra de diamante de faces planas e paralelas de espessura D e com um ângulo θ como indicado. Determine os valores para θ para que a luz fique confinada na barra (não saia mais para o ar).



Questão 7 – Vamos determinar a posição da imagem formada por um espelho esférico (gaussiano) quando o objeto não se encontra sobre seu eixo principal, isto é, a linha normal ao espelho em seu centro.

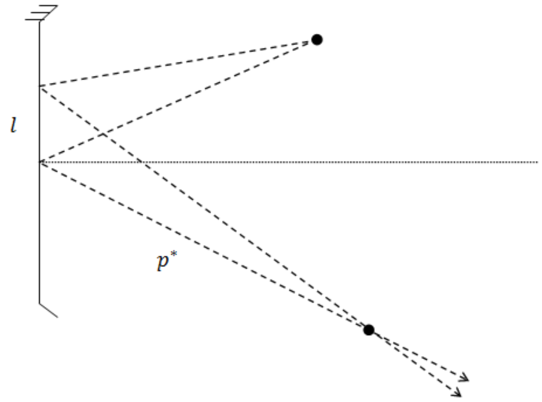


Sendo p a distancia do objeto ao centro do espelho e θ o ângulo com relação ao eixo principal, e este suficientemente pequeno, para que as aproximações do espelho gaussiano continuem validas. Considerando os raios ilustrados na figura acima vemos que se uma imagem bem definida se formar, ela deve estar no plano da figura e seu ângulo com relação ao eixo principal deve ser o mesmo θ.

a) Sendo f a distancia focal do espelho, prove usando os dois raios ilustrados (um que passa pelo centro e outro paralelo ao eixo principal) que p', a distancia da imagem até o centro do espelho, deve obedecer a relação

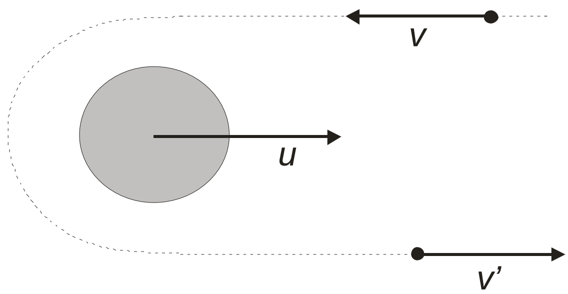
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{cos\theta}{f}$$

b) Vamos considerar agora outros raios que saem do corpo, para verificar se a imagem será bem definida, isto é, se todos os raios convergem para ela. No entanto, limitemo-nos ao plano da figura acima, pois fica mais complicado mostrar isso para raios fora do plano. Há um raio que sai do corpo e atinge o espelho, a uma distancia l acima de seu centro, e se encontra com o raio que passava pelo centro a uma distancia p^* do centro do espelho, conforme a figura abaixo



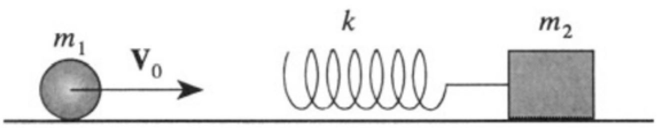
Mostre que $p^* = p'$, isto é, todos os raios, independentemente de l, convergem para o mesmo ponto.

Questão 8 – O *efeito estilingue gravitacional* já foi bastante usado para impulsionar naves e sondas espaciais sem gasto de combustível, apenas aproveitando-se do movimento de planetas. A sonda *Cassine*, lançada em 15 de outubro de 1997, aproveitou muito deste efeito, sendo acelerada duas vezes por Venus, depois pela Terra e Júpiter, seguindo para Saturno, seu destino final, chegando lá em 1º de Julho de 2004. Consideremos um modelo simples para entender o mecanismo. Suponha uma nave se aproximando com velocidade v de um planeta (muito mais pesado que nave) que se move em sua direção, com uma velocidade u. Estas velocidades estão sendo medidas em relação a um referencial inercial. Para simplificar, assuma que a nave apenas inverta o sentido de sua velocidade ao contornar o astro e que seus motores permaneçam desligados, isto é, ela contorna o planeta somente devido a atração gravitacional dele. A nave é então lançada com velocidade v', contraria a sua velocidade inicial.



Calcule então *v'*, em função de *v* e *u*, assumindo que todas essas velocidades são paralelas.

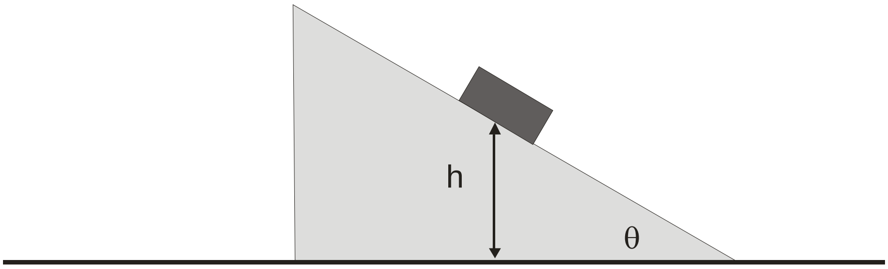
Questão 9 (exclusiva para alunos do 1º ano) – Uma massa m_1, com velocidade inicial V_0, atinge um sistema massa-mola,cuja massa é m_2, inicialmente em repouso, mas livre para se movimentar. A mola é ideal e possui constante elástica k, conforme a figura. Não há atrito com o solo.



a) Qual é a compressão máxima da mola?
b) Se, após um longo tempo, ambos os objetos, se deslocam na mesma direção, qual serão as velocidades finais V_1 e V_2 das massas m_1 e m_2, respectivamente?

Questão 10 (exclusiva para alunos do 1º ano) – Em uma região de inverno rigoroso, um tanque com água é deixado aberto ao ar livre até que se forme sobre a superfície da água uma camada de gelo com espessura igual a 5 cm. O ar acima da água está a -10^{o}C. Calcule a taxa de formação de gelo (em cm/h) sobre a superfície inferior da camada de gelo. Considere a condutividade térmica, a densidade e o calor de fusão do gelo como sendo 0,0040cal/s.cm^{0}C, 0,92 g/cm³ e 80cal/g, respectivamente. Assuma que nenhuma quantidade de calor deixa ou passa para a água através das paredes do tanque.

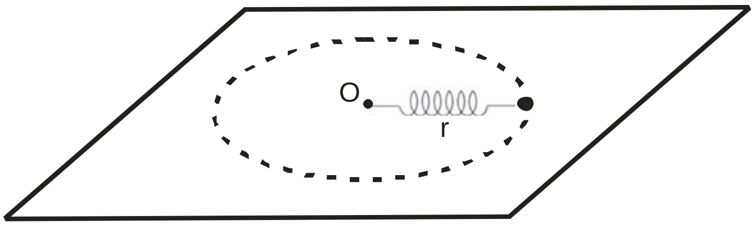
Questão 11 - Considere um plano inclinado (uma cunha) de massa M e ângulo de inclinação θ que pode deslizar sem atrito sobre o chão. Um pequeno bloco de massa m também pode deslizar sem atrito sobre a superfície do plano inclinado.



O bloco é então solto a partir do repouso, de uma altura h em relação ao solo.

a) Calcule a aceleração da cunha, em função de *m, M, θ e g* (a gravidade local)
b) Calcule a velocidade da cunha quando o bloco chegar ao chão. Expresse o resultado em termos de *m, M, θ, h e g.*

Questão 12 – Um corpo de massa m é conectado por uma mola num ponto O sobre uma superfície horizontal, sobre a qual o corpo pode se mover sem atritos.

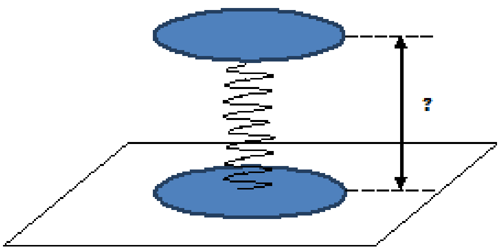


O comprimento relaxado da mola é l_0 e sua constante elástica é k. Num dado instante, a distancia do corpo até o ponto O é r. Suponha que se faça o corpo girar com frequência angular ω e no instante inicial ele não possui nenhuma componente radial de velocidade.

a) Calcule o raio de equilíbrio $r = r_0$ para o qual o corpo realiza movimento circular em torno de O. Expresse r_0 em termos de m, k, l_0 e ω.
b) Calcule o período de pequenas oscilações radiais do corpo em relação ao raio de equilíbrio r_0. Imagine que inicialmente o corpo se encontrava em movimento circular em r_0 e com velocidade angular ω_0 quando uma pequena perturbação radial fez com que ela começasse a oscilar. Dê o resultado em função de k, m e ω_0.

Você pode precisar usar que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, se x<<1

Questão 13 – Dois discos estão ligados por uma mola de constante elástica k. Cada disco tem massa m e a gravidade local vale g. Eles estão sobre o chão, conforme o desenho a seguir.



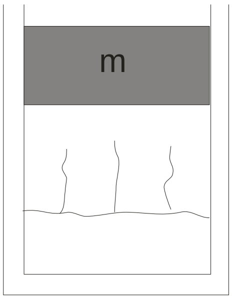
Quando o sistema está em equilíbrio (em repouso) sob a ação do peso, a distância entre os discos é l.

a) Calcule o comprimento l_0 relaxado desta mola, isto é, quando a mola não está nem distendida nem comprimida. Dê o resultado em termos dos parâmetros básicos deste problema, que são m, l, k e g.

Pressiona-se o disco superior para baixo, deslocando-o de uma quantidade x, e o mantem assim em repouso. Solta-se então o sistema.

b) Supondo que o disco inferior não perca contato com o solo, mostre que o disco superior realizará um movimento harmônico simples e calcule seu período, em termos dos parâmetros básicos do problema.
c) Há um valor máximo de x para o qual a suposição do item anterior seja valida, isto é, que o disco inferior não perca o contato com o solo. Chame este x limite de x_0 e calcule-o em termos dos parâmetros básicos.
d) Pressionando-se o disco superior de um $x > x_0$, o disco inferior será levantado da mesa. Calcule a altura máxima atingida pelo centro de massa do sistema, em termos de x e dos parâmetros básicos.
e) Enquanto o sistema estiver todo no ar, os discos vão oscilar em relação ao centro de massa. Calcule o período dessas oscilações em função dos parâmetros básicos.

Questão 14 – Um cilindro de paredes condutoras térmicas possui um embolo de massa *m* bem ajustado (mas sem atritos), cuja secção de área transversal é S. O cilindro contem água e vapor à temperatura T = 100^oC, ou seja, estão na temperatura de condensação.



Observa-se que o embolo cai vagarosamente à velocidade constante v, porque alguma quantidade de calor flui através das paredes do cilindro e fazendo que um pouco de vapor se condense continuamente. A densidade de vapor no interior do recipiente é ρ.
a) Calcule a taxa de condensação do vapor, variação de massa de vapor por unidade de tempo, em termos dos parâmetros dados no problema.
b) A que taxa o calor flui para fora do cilindro? Dê o resultado em função do calor de condensação L da água e dos outros dados do problema.
c) Qual a taxa de variação da energia interna do vapor? O calor específico molar a volume constante da água é C_v e sua massa molar é M.
d) E qual a taxa de variação da energia interna da água líquida?

Questão 15 – Há um copo de água em contato com o ambiente, e ambos se encontram a uma temperatura T_0.
a) Mostre, usando o conceito de entropia (e a segunda lei da termodinâmica), que não é natural ver a água do copo variar sua temperatura e resolver se manter em equilíbrio a uma temperatura diferente de T_0.

Dicas: A variação de entropia associada à variação de temperatura de uma massa m de um corpo com calor específico c, que vai de uma temperatura T_0 até T é:

$$\Delta S = mc\ ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Onde ln é o logaritmo natural.
Você pode usar também a desigualdade $\ln(1+x) < x$, para todo $x > 1$ e diferente de 0.

b) Dois corpos em contato térmico se encontram isolados do resto do universo. Eles possuem massas e calores específicos m_1, c_1 e m_2, c_2, com os índices (1, 2) se referindo a cada corpo. Se ambos estão na mesma temperatura T_0, mostre que não é esperado que eles troquem calor e se equilibrem (termicamente) em temperaturas diferentes.

Dica: use que $(1+x)^n \approx 1 + nx$, se x<<1

Questão 16 – Ana Beatriz está sentada próxima à janela aberta de um trem movendo-se à velocidade v para o norte. Seu tio está parado perto dos trilhos vendo o trem se afastar. O apito da locomotiva vibra com freqüência f_0 e a velocidade do som no ar vale s.
a) Se o ar estiver parado, quais são as freqüências ouvidas pelo tio e por Ana, em função de v, f_0 e s?
b) Se um vento constante e uniforme soprar à velocidade u para norte, quais serão as freqüências ouvidas pelo tio e por Ana, em função de v, f_0, s e u?

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO